О СПОСОБЕ ВВЕДЕНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. П. Проскуряков

(Москва)

Метод малого параметра получил широкое применение в теории нелинейных колебаний. Построение периодических решений этим методом обычно сводится к последовательному определению коэффициентов рядов по целым степеням малого параметра. После формального построения таких рядов возникает вопрос об оценке их радиуса сходимости. В этом отношении сделано пока еще мало.

Вопрос о сходимости рядов, представляющих периодическое решение системы, тесно связан со способом введения малого параметра в уравнения колебательной системы. Следует оговориться, что не всегда исследователь располагает возможностью вводить малый параметр по своему усмотрению. Иногда малый параметр задается условиями задачи. Тем не менее обследование некоторых способов введения малого параметра представляет интерес.

Рассмотрим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка частного вида и покажем, к чему приводят различные способы введения малого параметра. Имеем [1]

$$\frac{dx}{dt} = -y + xf(r^2), \qquad \frac{dy}{dt} = x + yf(r^2) \tag{1}$$

Функция $f(r^2)$ является полиномом n-й степени от $r^2 = x^2 + y^2$

$$f(r^2) = b_n r^{2n} + \ldots + b_1 r^2 + b_0$$

Умножив первое уравнение системы (1) на x, а второе на y и сложив, получим

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = r^2 f(r^2)$$

Это уравнение имеет очевидные периодические решения $r^2 = \text{const}$, которые являются корнями правой части уравнения. Из этих решений отберем те, которые удовлетворяют начальному условию

$$y(0) = 0 \tag{2}$$

Получим $x = 0$, $y = 0$ и

$$x = A^* \cos t, \quad y = A^* \sin t \tag{3}$$

где A^* является корнем уравнения $f(A^{*2}) = 0$.

Других периодических решений система (1) не имеет.

Введем малый параметр μ обычным образом:

$$\frac{dx}{dt} = -y + \mu x f(r^2), \qquad \frac{dy}{dt} = x + \mu y f(r^2) \tag{4}$$

Решение системы (4) ищем в виде рядов по целым степеням параметра μ:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots$$
$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots$$

при выполнении начального условия (2). При $\mu = 0$ имеем решение

$$x_0 = A\cos t, \quad y_0 = A\sin t$$

зависящее от произвольного параметра A. Для определения x_1 и y_1 получаем уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = -y_1 + Af(A^2)\cos t, \qquad \frac{dy_1}{dt} = x_1 + Af(A^2)\sin t$$

Эти уравнения имеют периодическое решение при условии $Af(A^2) = 0$.

Из дальнейших вычислений нетрудно установить, что все x_n и y_n при $n = 1, 2, \ldots$ равны нулю. Таким образом, система (4) имеет те же решения, что и система (1). Получить семейство решений, зависящее от параметра μ, таким способом введения параметра не удается.

---

[1] Пример предложен Н. Г. Четаевым.

Заметим, что метод Ван дер Поля приводит к тому же результату, так как показано [1], что этот метод является лишь первым приближением в методе малого параметра.

Введем малый параметр μ другим способом:

$$\frac{dx}{dt} = \mu\left[-y + xf(r^2)\right], \quad \frac{dy}{dt} = \mu\left[x + yf(r^2)\right] \tag{5}$$

Эта система при $\mu = 0$ с учетом начального условия (2) имеет решение $x_0 = a_0$, $y_0 = 0$.

Из условий периодичности функций x_1 и y_1 следует, что $a_0 = 0$. Дальнейшие вычисления показывают, что все x_n и y_n равны нулю. Таким образом, при данном способе введения параметра μ не только не удается получить семейство периодических решений, зависящее от этого параметра, но даже не находятся периодические решения (3), которые принадлежат системе (5) при $\mu = 1$. В данном случае, исходя из нулевого решения порождающей системы, не удается отыскать других решений системы.

Предыдущие способы введения малого параметра не дают возможности получить однопараметрическое семейство периодических решений, зависящее от параметра. Однако, как указал Н. Г. Четаев, это можно сделать другим способом введения параметра. Возьмем для простоты функцию $f(r^2)$ в таком виде:

$$f(r^2) = r^2(r^2 - A_1^2)$$

Введем параметр μ следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -y + xr^2(r^2 - \mu^2 A_1^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + yr^2(r^2 - \mu^2 A_1^2) \tag{6}$$

При $\mu = 0$ имеем решение $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Далее получим

$$x_n = a_n \cos t, \qquad y_n = a_n \sin t \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$$

Для определения x_5 и y_5 имеем уравнения

$$\frac{dx_5}{dt} = -y_5 + a_1^3(a_1^2 - A_1^2)\cos t, \quad \frac{dy_5}{dt} = x_5 + a_1^3(a_1^2 - A_1^2)\sin t$$

Из условий периодичности функций x_5 и y_5 следует, что $a_1 = A_1$ или $a_1 = 0$.

Дальнейшие вычисления показывают, что все x_n и y_n $(n = 2, 3, \ldots)$ равны нулю. Следовательно, помимо нулевого решения, система (6) имеет периодическое решение, зависящее от параметра:

$$x = \mu A_1 \cos t, \qquad y = \mu A_1 \sin t$$

Заметим, что если ввести параметр μ еще дополнительно в качестве множителя перед вторыми слагаемыми правых частей уравнений (6), то результат от этого не изменится. Изменятся только вычисления.

Таким образом, при удачном введении малого параметра удается получить периодическое решение даже в том случае, когда порождающее уравнение имеет нулевое решение.

Опуская выкладки, дадим таблицу, в которой приведены различные способы введения параметра μ в систему (1). Рассмотренные выше варианты также включены в эту таблицу. Во всех вариантах нулевые решения опущены.

Вариант IV аналогичен варианту III, но имеет еще изолированное периодическое решение. В варианте V решением порождающей системы служит изолированное периодическое решение $x_0 = A_1 \cos t$, $y_0 = A_1 \sin t$ с заданным значением амплитуды A_1. В варианте VI ряд, представляющий семейство периодических решений, имеет конечный радиус сходимости.

Заметим, что в данном примере вводить малый параметр, используя преобразование независимого переменного с неопределенными коэффициентами (А. М. Ляпунов), нецелесообразно, так как период решений рассматриваемых систем уравнений является постоянной величиной, равной 2π.

Из рассмотрения указанных выше и других возможных вариантов можно сделать следующие выводы. Периодические решения системы могут быть получены, если решения порождающей системы образует семейство решений, зависящих от произвольного параметра. Примером таких систем служат квазилинейные системы.

Если решение порождающей системы является изолированным периодическим ре-

Таблица

№ варианта	Система уравнений	Периодические решения по методу малого параметра
I	$\dot{x} = -y + \mu x f(r^2)$ $\dot{y} = x + \mu y f(r^2)$	$x = A^* \cos t,\ y = A^* \sin t$ $f(A^{*2}) = 0$
II	$\dot{x} = \mu[-y + x f(r^2)]$ $\dot{y} = \mu[x + y f(r^2)]$	Не найдены
III	$\dot{x} = -y + xr^2(r^2 - \mu^2 A_1^2)$ $\dot{y} = x + yr^2(r^2 - \mu^2 A_1^2)$	$x = \mu A_1 \cos t, \quad y = \mu A_1 \sin t$
IV	$\dot{x} = -y + x(r^2 - \mu^2)(r^2 - A_1^2)$ $\dot{y} = x + y(r^2 - \mu^2)(r^2 - A_1^2)$	$x = \mu \cos t, \quad y = \mu \sin t$ $x = A_1 \cos t, \quad y = A_1 \sin t$
V	$\dot{x} = -y + xr^2[r^2 - (A_1 + \mu)^2]$ $\dot{y} = x + yr^2[r^2 - (A_1 + \mu)^2]$	$x = (A_1 + \mu)\cos t,\ y = (A_1 + \mu)\sin t$
VI	$\dot{x} = -y + \frac{xr^2}{c^2}[(c-\mu)^2 r^2 - c^2 A_1^2]$ $\dot{y} = x + \frac{yr^2}{c^2}[(c-\mu)^2 r^2 - c^2 A_1^2]$ $c > 0$	$x = \frac{A_1}{1 - \mu / c} \cos t$ $y = \frac{A_1}{1 - \mu / c} \sin t$ $\mu < c$

шением или даже нулевым решением, то параметр μ должен быть введен таким образом, чтобы удалось построить семейство периодических решений, зависящих от этого параметра, с достаточно большим радиусом сходимости ряда, представляющего это семейство решений.

Поступила 12 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. К построению периодических решений автономных систем с одной степенью свободы. ПММ, т. XXI, вып. 4, 1957, стр. 585—590.

О СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ

Е. А. Девянин

(Москва)

Метод осреднения, возникший при решении некоторых проблем небесной механики, к задачам теории нелинейных колебаний был впервые применен Ван дер Полем [1,2]. Дальнейшее свое развитие метод получил в трудах П. Фату[3], Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси[4], Б. В. Булгакова[5,6], Н. Н. Боголюбова[7].

В настоящей работе рассматриваются квазилинейные колебательные системы, содержащие одну нелинейную зависимость от одной из неизвестных координат. Исследуются свойства осредненных («укороченных», первого приближения) уравнений движения В основу работы положен один из вариантов метода осреднения, разработанный Б. В. Булгаковым. Показано, что при весьма широких предположениях осредненные уравнения могут быть приведены к специальной форме, которая позволяет установить некоторые их свойства, а также оказывается полезной при решении ряда конкретных задач.