ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ХАРАКТЕРИСТИЧНЫХ ЧИСЕЛ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

В работе исследуются свойства характеристичных чисел исчезающих решений уравнений возмущенного движения. Устанавливается теорема о весьма тесной связи характеристичных чисел упомянутых решений с характеристичными числами системы первого приближения. Трудно проверяемое требование устойчивости последних характеристичных чисел, которое служило ранее для доказательства аналогичной теоремы [2], снято.

Пусть задана система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n \tag{1}$$

где $X_1, \ldots, X_n$ суть голоморфные функции $x_1, \ldots, x_n$,

$$X_s = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + \sum P_s^{(m_1, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные значения $m_1, \ldots, m_n$, если $m_1 + \ldots + m_n > 1$.

Коэффициенты p_{si}, $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ суть вещественные непрерывные ограниченные функции времени, причем существуют такие положительные постоянные M и A, что при всех $t \geqslant t_0$ выполняются неравенства

$$|P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}| < \frac{M}{A^{m_1 + \ldots + m_n}} \tag{2}$$

Рассмотрим систему первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристичные числа этой системы.

В работе [2] установлена теорема.

Теорема. Если система (1) имеет исчезающее решение, а система (3) устойчивые характеристичные числа, то характеристичное число этого решения в точности равно одному из неотрицательных характеристичных чисел системы (3).

При доказательстве этой теоремы условие (2) не используется. Однако если добавить это условие и, кроме того, предположить, что система (3) есть правильная, а среди ее характеристичных чисел есть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \lambda_p > 0$, то можно установить и более глубокий результат, даже отбросив трудно проверяемое требование об устойчивости характеристичных чисел.

Теорема. а) Если система (3) есть правильная и $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0$, то у системы (1) необходимо найдутся исчезающие решения $x_1^j, \ldots, x_n^j$, обладающие характеристичными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

б) Для того чтобы решение с начальными условиями $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ обладало характеристичным числом $\lambda_1 \geqslant \lambda_p$, достаточно произвольно задать $x_1^\circ, \ldots, x_p^\circ$, заботясь только о том, чтобы их модули были достаточно малы, а $x_{p+1}^\circ, \ldots, x_n^\circ$ найти из соотношений

$$x_{p+1} = \varphi_{p+1}(x_1^\circ, \ldots, x_p^\circ), \qquad x_n = \varphi_n(x_1^\circ, \ldots, x_p^\circ)$$

где $\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n$ — голоморфные функции величин $x_1^\circ, \ldots, x_p^\circ$, уничтожающиеся, когда последние делаются нулями.

Прежде чем приступить к доказательству, изложим две теоремы первого метода Ляпунова.

Пусть $x_{ij}, \ldots, x_{nj}$ — нормальная система независимых решений системы уравнений (3).

Теоремы Ляпунова. I. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — положительные характеристичные числа правильной системы (3), то система (1) имеет решения, представимые под видом

$$x_s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{js} + \sum_{m_1+\ldots+m_k>2} L_s^{(m_1, \ldots, m_k)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_k^{m_k} \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} m_i \lambda_i t\right) \qquad (4)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произвольные постоянные, модули которых не превосходят некоторого, отличного от нуля высшего предела, а характеристичные числа функций $L_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ не менее нуля.

II. Если, разумея под ε некоторую положительную постоянную, сделаем

$$\alpha_s e^{-(\lambda_s - \varepsilon) t} = q_s \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

и величины α_s в рядах (4) заменим следующими отсюда их выражениями, то получим новые ряды

$$x_s = \sum Q_s^{(m_1, \ldots, m_k)} q_1^{m_1} \ldots q_k^{m_k} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

расположенные по восходящим степеням величин q_s, которые будут такого свойства, что при всяком ε, как бы мало оно ни было, найдутся такие положительные постоянные $Q^{(m_1,\ldots,m_k)}$, при которых для всех неотрицательных значений t будут справедливы неравенства

$$| Q_s^{(m_1, \ldots, m_k)} | < Q^{(m_1, \ldots, m_k)}$$

и ряды

$$\sum Q^{(m_1,\ldots, m_k)} q_1^{m_1}, \ldots, q_k^{m_k}$$

будут абсолютно сходящимися, пока модули величин q_s не превосходят некоторого, отличного от нуля предела q. Заметим, что такое мажорирование для функций

$$Q_s^{(m_1, \ldots, m_k)} = L_s^{(m_1, \ldots, m_k)} e^{-(m_1+\ldots+m_k)\varepsilon t}$$

может быть проведено при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Приступая к доказательству теоремы, рассмотрим решение

$$x_s^p = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{js} + \sum_{1<m_1+\ldots+m_p<l} L^{(m_1\ldots m_p)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_p^{m_p} \exp\left(-\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i t\right) +$$

$$+ \sum_{\infty \geqslant m_1+\ldots+m_p \geqslant l} L_s^{(m_1, \ldots, m_p)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_p^{m_p} \left(\exp - \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i t\right)$$

в котором $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_k$ положены нулями, а вторые слагаемые правых частей объединяют все члены порядка, меньшего l, относительно постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Здесь l — некоторое целое положительное число, большее четырех, которое можно зафиксировать произвольно.

На основании условия о том, что

$$X(L_s^{(m_1, \ldots, m_p)}) \geqslant 0$$

и теорем о характеристичном числе суммы и произведения нетрудно установить, что при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, не равных нулю одновременно:

$$X\left\{\sum_{1<m_1+\ldots+m_p<l} L_s^{(m_1, \ldots, m_p)} \exp\left(-\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i t\right)\right\} \geqslant 2\lambda_p$$

$$X\left\{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{js}\right\} = \lambda_i \geqslant \lambda_p$$

где λ_s — одно из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Символ $X\{f_s\}$ читается: характеристичное число системы функций f_s.

Рассмотрим вопрос о характеристичном числе последней суммы и покажем, что оно больше λ_p. Для этого достаточно найти такое малое $\delta > 0$, чтобы функции

$$e^{(\lambda_p+\delta)t} \sum_{\infty \geqslant m_1+\ldots+m_p \geqslant l} L_s^{(m_1,\ldots,m_p)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_p^{m_p} \exp\left[-\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i t\right] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

были ограниченными.

Перепишем их в виде

$$\sum_{\infty \geqslant m_1+\ldots+m_p \geqslant l} L_s^{(m_1,\ldots,m_p)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_p^{m_p} \exp\left(-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i m_i - \lambda_p - \delta\right) t$$

и сделаем преобразование:

$$q_1 = \alpha_1 \exp\left[-\left(\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_p\right) t\right], \qquad q_p = \alpha_p \exp\left[-\left(\lambda_p - \frac{1}{3}\lambda_p\right) t\right]$$

Тогда ряды, полученные после выполнения его, будут в качестве $Q_s^{(m_1,\ldots,m_p)}$ иметь величины

$$L_s^{(m_1,\ldots,m_p)} \exp - \sum \left(m_i \frac{\lambda_p}{3} - \lambda_p - \delta\right) t$$

Если положить $\delta = {}^1/_3\lambda_p$, то тогда

$$\left| L_s^{(m_1,\ldots,m_p)} \exp - \sum (m_i - 4) \frac{\lambda_p}{3} t \right| < \left| L_s^{(m_1,\ldots,m_p)} \right| \exp - (m_1 + \ldots + m_p) \varepsilon t \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$ выбрано следующим образом.

Так как

$$- \sum (m_i - 4) \frac{1}{3} \lambda_p \leqslant - (l - 4) \frac{1}{3} \lambda_p$$

то, фиксируя ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$(l - 4)\, {}^1/_3 \lambda_p > l\varepsilon, \qquad \text{или} \qquad 0 < \varepsilon < \left(1 - \frac{4}{l}\right) {}^1/_3 \lambda_p$$

получим, что для любых $m_1 + \ldots + m_p \geqslant l$ будет выполняться неравенство

$$- \sum (m_i - 4) \frac{\lambda_p}{3} < - (m_1 + \ldots + m_p) \varepsilon$$

а вместе с ним и неравенство (5).

Поскольку ряды, полученные подстановкой

$$q_s = \alpha_s \exp - (\lambda_s - \varepsilon) t \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

будет мажорироваться абсолютно сходящимися рядами

$$\sum_{l \leqslant m_1+\ldots+m_p \leqslant \infty} Q^{(m_1,\ldots,m_p)} q_1^{m_1} \ldots q_p^{m_p}$$

то в силу неравенства (6) изучаемые ряды (5) тоже будут обладать этим свойством. Из вида подстановки, примененной для их получения, ясно, что при любых малых $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_p|$ все ряды (5) суть исчезающие функции времени, а следовательно, и ограниченные

Кладя теперь $\alpha_1 = \ldots \alpha_p = 0$ и $\alpha_p \neq 0$, получаем

$$(x_s^p)^\circ = \alpha_p x_{ps} + \sum_{1 < m_p < l} L_s^{(m_p)} \alpha_p^{m_p} \exp(-m_p \lambda_p t) +$$

$$+ \sum_{l \leqslant m_p \leqslant \infty} L_s^{(m_p)} \alpha_p^{m_p} \exp - (m_p \lambda_p t)$$

Так как установлено

$$X\left\{\sum_{1<m_p<l} L_s^{(m_p)} \alpha_s^{m_p} \exp(-m_p \lambda_p t)\right\} \geqslant 2\lambda_p$$

$$X\left\{\sum_{l\leqslant m_p\leqslant\infty} L_s^{(m_p)} \alpha_s^{m_p} \exp(-m_p \lambda_p t)\right\} > \lambda_p$$

по условию $X\{x_{ps}\} = \lambda_p$, то на основании теоремы о характеристичном числе суммы устанавливаем

$$X\{(x_s^p)^\circ\} = \lambda_p$$

на чем заканчивается доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части положим $t = t_0$, тогда

$$x_s^{\circ p} = \alpha_1 x_{1s}^\circ + \ldots + \alpha_p x_{ps}^\circ + \psi_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \qquad (s = 1, \ldots n) \tag{7}$$

где $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ — голоморфные функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, начинающиеся с членов измерения не ниже второго относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Среди миноров матрицы (x_{js}°) наверняка найдется отличный от нуля, иначе бы решения x_{js} не могли быть независимыми. Пусть этот минор соответствует первым p строкам матрицы. Тогда уравнения

$$\begin{aligned} x_1^{\bullet p} &= \alpha_1 x_{11}^\circ + \ldots \alpha_p x_{1p}^\circ + \psi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \\ x_p^{\circ p} &= \alpha_{1p} x_{1p}^\circ + \ldots \alpha_p x_{pp}^\circ + \psi_p(\alpha_1, \ldots \alpha_p) \end{aligned} \tag{8}$$

разрешимы относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, причем функции

$$\alpha_1 = X_1(x_1^{\bullet p}, \ldots, x_p^{\bullet p}), \qquad \alpha_p = X_p(x_1^{\circ p}, \ldots x_p^{\bullet p}) \tag{9}$$

будут голоморфными функциями $x^{\bullet p}, \ldots, x_p^{\bullet p}$, если модули последних достаточно малы, и наверняка не будут все уничтожаться, если не все $x_1^{\bullet p}, \ldots, x_p^{\circ p}$ нули.

Пусть по заданной системе значений $x_1^{\bullet p}, \ldots, x_p^{\bullet p}$ нашлись из уравнений (9) $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, не все равные нулю.

Тогда, как было показано выше, решение

$$x_s^p = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{js} + \sum_{1<m_1+\ldots+m_p\leqslant\infty} L_s^{(m_1\ldots m_p)\, m_1} \alpha_1 \ldots \alpha_p^{m_p} \exp\left(-\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i t\right)$$

будет обладать характеристичным числом, не меньшим λ_p.

Остальные $\dot{x}_{p+1}, \ldots, x_n^\circ$ этого решения найдутся из уравнений (7). Если же мыслить их нахождение непосредственно через $x_1^{\bullet p}, \ldots, x_p^{\bullet p}$, то для этого в последние $n-p$ уравнений (7) нужно подставить (9) в правые части на место $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Соотношения, полученные в результате подстановки, и будут играть роль соотношений, упомянутых в формулировке теоремы.

Замечание. Из доказанного, вообще говоря, не следует, что характеристичное число решения (4) в точности равно одному из чисел $\lambda_1, \ldots \lambda_p$.

Указанный способ дает возможность показать только, что оно либо равно одному из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, либо не меньше, чем $2\lambda_p$, если

$$2\lambda_p \leqslant \lambda_j, \qquad \lambda_j = X\left\{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{js}\right\}$$

Если $2\lambda_p \neq \lambda_j$ $j = 1, \ldots, p-1$, то последнего случая наверняка не встретится тогда, когда $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ суть устойчивые характеристичные числа. Действительно, предположив противное и учитывая, что решение $x_{ij}(t)$ исчезающее, мы бы пришли в противоречие с теоремой, доказанной в работе [2].

Поступила 26 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ, 1951.
2. Пожарицкий Г. К. О характеристическом числе исчезающего решения уравнений возмущенного движения. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.