ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО

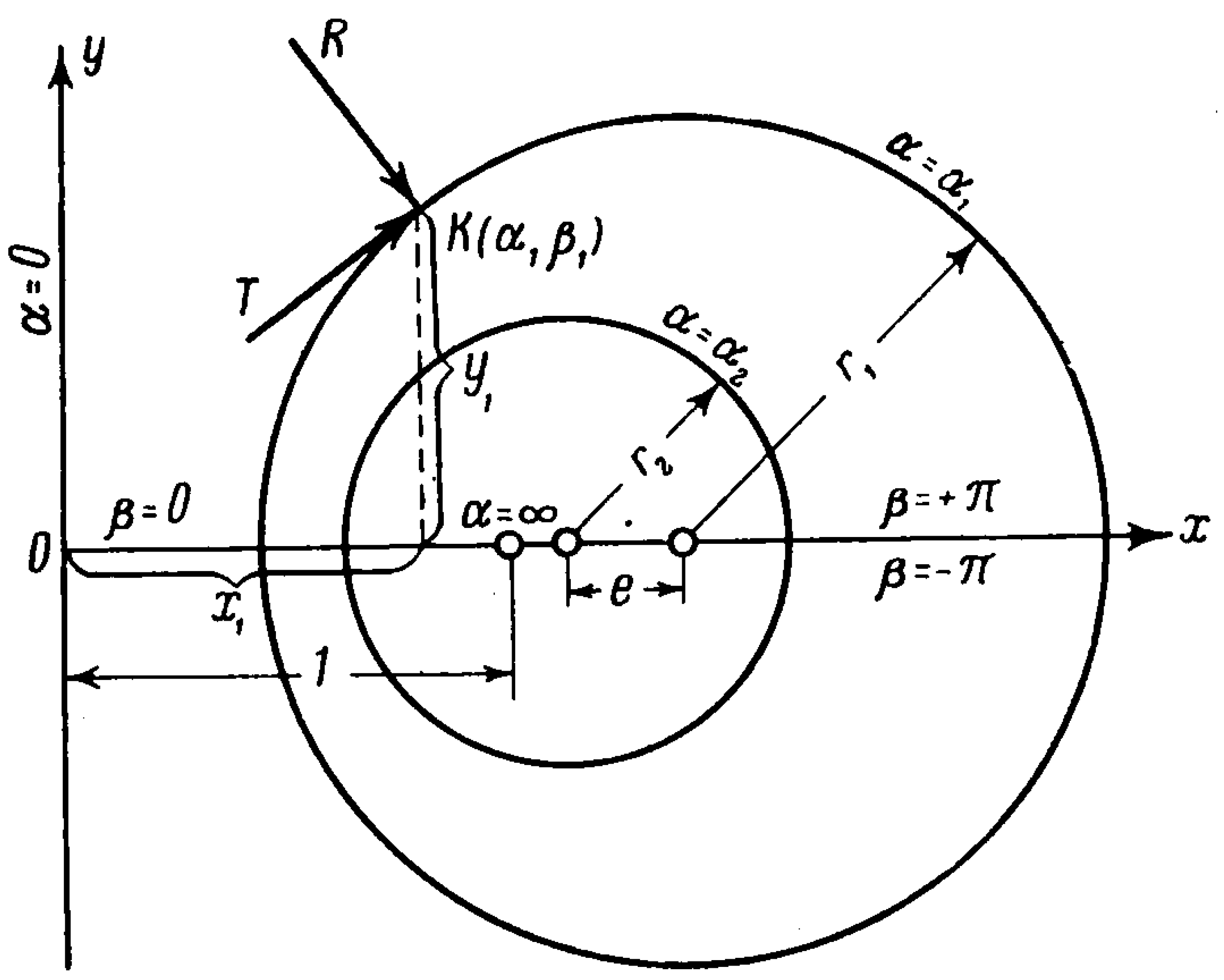
Ю. И. Соловьев

(Новосибирск)

Общее решение плоской задачи теории упругости для области, ограниченной двумя эксцентрическими окружностями, было разработано Джеффери [1] и Вайнелем [2] в биполярных координатах. При этом предполагалось, что внешняя нагрузка задана в форме тригонометрического ряда. Это решение непосредственно нельзя применить в случае действия сосредоточенной силы, так как получающиеся здесь ряды являются расходящимися.

Сенгупта [3] рассмотрел сжатие эксцентрического кольца двумя равными и противоположно направленными сосредоточенными силами, действующими по оси симметрии. Однако общий случай действия сосредоточенных сил на кольцо не был рассмотрен.

Ниже определяется функция напряжений и компоненты напряженного состояния при действии произвольно направленной сосредоточенной силы, приложенной к контуру эксцентрического кольца. Будем считать, что сосредоточенная сила уравновешивается определенной системой напряжений по границам области. Эта система напряжений такова, что при действии на кольцо нескольких сосредоточенных сил, статически уравновешенных, напряжения на контуре обращаются в нуль.



Фиг. 1

Для решения задачи воспользуемся системой биполярных координат α, β, которые связаны с прямоугольными координатами x, y соотношениями [1]

$$x = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \quad y = \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \tag{1}$$

Рассмотрим плоское напряженное состояние эксцентрического кольца, ограниченного координатными окружностями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$; радиусы окружностей равны соответственно $r_1 = \operatorname{csch}\alpha_1$ и $r_2 = \operatorname{csch}\alpha_1$; эксцентриситет равен $e = |\operatorname{cth}\alpha_1 - \operatorname{cth}\alpha_2|$ (фиг. 1).

Будем считать, что сосредоточенная сила приложена в точке K контура $\alpha = \alpha_1$ (биполярные координаты точки $K - \alpha_1\beta_1$; прямоугольные x_1, y_1) и имеет нормальную составляющую R и касательную составляющую T. Эта сосредоточенная сила уравновешивается касательными и нормальными напряжениями по обеим границам области

$$\tau_{\alpha\beta} = \pm\frac{1}{4\pi}(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)(Y\operatorname{ch}\alpha + M\operatorname{sh}\alpha)$$

$$\sigma_\alpha = \pm\frac{1}{4\pi}\left[X(\cos^2\beta + 2\operatorname{ch}\alpha\cos\beta + 1) - Y\operatorname{sh}\alpha\sin\beta + M(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)\sin\beta\right] \tag{2}$$

где X и Y — проекции сосредоточенной силы на оси x и y, $M = Xy_1 - Yx_1$ — момент ее относительно начала координат. (Верхний знак — для напряжений по внешнему контуру, нижний знак — для напряжений по внутреннему контуру кольца). Следовательно, напряжения обращаются в нуль, когда $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma M = 0$.

Функцию напряжений будем искать в виде суммы двух функций, каждая из которых является бигармонической и удовлетворяет условиям однозначности смещений

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{3}$$

---

[1] Сведения о биполярных координатах и многих задачах, решенных в этих координатах, можно найти в книге Я. С. Уфлянда [4].

Функция φ_1 имеет особенность в точке $K(x_1, y_1)$ типа

$$\frac{1}{\pi}[-X(y-y_1)+Y(x-x_1)]\operatorname{arctg}\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

соответствующую сосредоточенной силе, приложенной к границе кольца в этой точке, и определяется формулой

$$g\varphi_1=\frac{1}{2\pi}\left\{\mp\frac{1}{2}\beta[-X\sin\beta+Y\operatorname{sh}\alpha+M(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)]\pm\frac{1}{4}(1-\nu)\alpha[X\operatorname{sh}\alpha+\right.$$
$$\left.+Y\sin\beta]+[T\operatorname{sh}t-R\sin\theta+(Tx_1+Ry_1)(\operatorname{ch}t-\cos\theta)]\,2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cth}\frac{1}{2}t\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right)\right\} \quad (4)$$
$$(g=\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta,\ t=\alpha-\alpha_1,\ \theta=\beta-\beta_1)$$

где ν — коэффициент Пауссона. В этой формуле и последующих верхний знак нужно брать при $\alpha_1<\alpha_2$, т. е. если сосредоточенная сила приложена к внешней границе кольца, а нижний знак — при $\alpha_1>\alpha_2$, т. е., если сила приложена к внутренней границе кольца. Соответствующие напряжения найдем, используя известные формулы, выражающие компоненты напряженного состояния через функцию напряжений в биполярных координатах (см., например, [4], стр. 171)]:

$$[\tau_{\alpha\beta}]_1=\frac{1}{2\pi}(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\left[-(T\sin\theta+R\operatorname{sh}t)\frac{\operatorname{sh}t\sin\theta}{(\operatorname{ch}t-\cos\theta)^2}+X\sin\beta-\right.$$
$$-Y\operatorname{sh}\alpha-M(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)-(Tx_1+Ry_1)\frac{\operatorname{ch}t\cos\theta-1}{\operatorname{ch}t-\cos\theta}\pm$$
$$\left.\pm\frac{1}{2}(Y\operatorname{ch}\alpha+M\operatorname{sh}\alpha)\mp\frac{1-\nu}{4}Y\cos\beta\right]$$

$$[\sigma_\beta-\sigma_\alpha]_1=\frac{1}{\pi}(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\left[(T\sin\theta+R\operatorname{sh}t)\frac{\operatorname{ch}t\cos\theta-1}{(\operatorname{ch}t-\cos\theta)^2}-\right.$$
$$\left.-(Tx_1+Ry_1)\frac{\operatorname{sh}t\sin\theta}{\operatorname{ch}t-\cos\theta}\mp\frac{1}{2}(X\cos\beta+M\sin\beta)\pm\frac{1-\nu}{4}X\operatorname{ch}\alpha\right]$$

$$[\sigma_\beta+\sigma_\alpha]_1=\frac{1}{\pi}\left[-(T\sin\theta+R\operatorname{sh}t)\frac{\operatorname{ch}\alpha_1+\cos\beta_1}{\operatorname{ch}t-\cos\theta}+T\sin\beta_1-R\operatorname{sh}\alpha_1-\right.$$
$$\left.-X\operatorname{sh}\alpha\cos\beta+Y\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\mp\frac{3-\nu}{4}(X\operatorname{ch}\alpha\cos\beta+X-Y\operatorname{sh}\alpha\sin\beta)\right] \quad (5)$$

Функция φ_2 должна снимать с контура кольца все напряжения, не входящие в (2), и может быть выбрана в форме ряда

$$g\varphi_2=\frac{1}{2\pi}\left\{J\alpha(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)+C\cos\beta+\sum_{n=1}^{\infty}[f_n{}^c(\alpha)\cos n\beta+f_n{}^s(\alpha)\sin n\beta]\right\} \quad (6)$$

Здесь

$$f_n(\alpha)=A_n[\operatorname{ch}(n+1)t-\operatorname{ch}(n-1)t]+B_n[(n-1)\operatorname{sh}(n+1)t-(n+1)\operatorname{sh}(n-1)t]$$
$$f_1(\alpha)=A_1\operatorname{ch}2t+B_1\operatorname{sh}2t \qquad (t=\alpha-\alpha_1) \qquad (n\geqslant 2) \quad (7)$$

Постоянные, входящие в состав этой функции, должны быть такими, чтобы удовлетворялись граничные условия. Напряжения, соответствующие функции φ_2, определяются формулами

$$[\tau_{\alpha\beta}]_2=\frac{1}{2\pi}(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\left[J\sin\beta+\sum_{n=1}^{\infty}[nf_n^{c'}(\alpha)\sin n\beta-nf_n^{s'}(\alpha)\cos n\beta]\right\} \quad (8)$$

$$[\sigma_\beta-\sigma_\alpha]_2=\frac{1}{\pi}(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\left\{J\operatorname{sh}\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}[F_n^c(\alpha)\cos n\beta+F_n^s(\alpha)\sin n\beta]\right\}$$

$$[\sigma_\beta+\sigma_\alpha]_2=\frac{1}{\pi}\left\{-C+\sum_{n=1}^{\infty}[\Phi_n^c(\alpha)\cos n\beta+\Phi^s(\alpha)\sin n\beta]\right\}$$

Здесь

$$F_n(\alpha) = nA_n\,[(n+1)\operatorname{ch}(n+1)\,t - (n-1)\operatorname{ch}(n-1)\,t] +$$

$$+\, n\,(n^2-1)\,B_n\,[\operatorname{sh}(n+1)\,t - \operatorname{sh}(n-1)\,t] \qquad (n \geqslant 2)$$

$$F_1(\alpha) = 2A_1 \operatorname{ch} 2t + 2B_1 \operatorname{sh} 2t \tag{9}$$

$$\Phi_n(\alpha) = [(n+1)\,A_{n+1} + 2n \operatorname{ch}\alpha_1 A_n + (n-1)\,A_{n-1}] \operatorname{ch} nt + [-2\operatorname{sh}\alpha_1 A_n +$$

$$+\,(n+1)(n+2)\,B_{n+1} + 2\,(n^2-1)\operatorname{ch}\alpha_1 B_n + (n-1)(n-2)\,B_{n-1}] \operatorname{sh} nt \qquad (n \geqslant 3)$$

$$\Phi_2(\alpha) = [3A_3 + 4\operatorname{ch}\alpha_1 A_2 + A_1[\operatorname{ch}2t +] - 2\operatorname{sh}\alpha_1 A_2 + 12\,B_3 + 6\operatorname{ch}\alpha_1 B_2 + B_1] \operatorname{sh} 2t$$

$$\Phi_1(\alpha) = [2A_2 + 2\operatorname{ch}\alpha_1 A_1 - 2\operatorname{sh}\alpha_1 B_1\,[\operatorname{ch} t + [-2\operatorname{sh}\alpha_1 A_1 + 6B_1 + 2\operatorname{ch}\alpha_1 B_1] \operatorname{sh} t$$

Для определения постоянных, функцию $g\varphi_1$ представим также в виде тригонометрического ряда, используя разложение

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cth}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) = \pm\left[\frac{1}{2}\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{\mp nt}\sin n\theta\right] \tag{10}$$

Получим

$$g\varphi_1 = \frac{t}{2\pi}\Bigg\{G + H \pm$$

$$\mp\frac{1-\nu}{4}\,\alpha\,(X\operatorname{sh}\alpha + Y\sin\beta) + [\pm R(\operatorname{ch}\alpha_1 + \cos\beta_1) + R\operatorname{sh}\alpha_1 \mp {}^3/_2\,X]\cos\beta +$$

$$+(e^{\mp 2t}-1)\,[-T\cos\beta_1 \mp {}^1/_2\,M]\sin\beta + (e^{\mp 2t}-1)\,[T\sin\beta_1 \mp {}^1/_2\,X]\cos\beta \pm$$

$$\pm\, 2T\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} t}{n}\,e^{\mp nt}\sin n\theta + 2\sum_{n=2}^{\infty}\,[Rn\cos\theta - (Tx_1 + Ry_1)\sin n\theta]\,\frac{n\operatorname{sh} t \pm \operatorname{ch} t}{n\,(n^2-1)}\,e^{\mp nt}\Bigg\}$$

Здесь

$$G = \mp\,\beta_1\,[-X\sin\beta + Y\operatorname{sh}\alpha + M(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)] \pm$$

$$\pm\,[R\sin\beta_1 - {}^3/_2\,M]\sin\beta + Re^{\pm\alpha_1}\operatorname{sh}\alpha \mp Re^{\pm\alpha_1}(\operatorname{ch} a + \cos\beta)$$

$$H = \pm\,{}^1/_2\,\beta\,[-X\sin\beta + Y\operatorname{sh}\alpha + M(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)]$$

Слагаемые, включенные в выражение G, не влияют на напряжения, поэтому их можно не учитывать; слагаемые, включенные в выражение H, при $\alpha = \alpha_2$ дают напряжения, входящие в (2); напряжения при $\alpha = \alpha_2$, зависящие от остальных членов ряда (10), должны быть компенсированы при помощи функции φ_2.

Имея это в виду, приравняем нулю коэффициенты при $\cos n\beta$ и $\sin n\beta$ в суммах $g\varphi_1 + g\varphi_2$ и $\partial(g\varphi_1)/\partial\alpha + \partial(g\varphi_2)/\partial\alpha$ при $\alpha = \alpha_2$ и определим отсюда постоянные A_n, B_n $(n \geqslant 2)$:

$$A_n{}^c = \mp\frac{\operatorname{sh}^2 t_1}{\Delta_n}\,[Rn\cos n\beta_1 + (Tx_1 + Ry_1)\sin n\beta_2] + \frac{T\sin n\beta_1}{n\Delta_n}\,[n^2\operatorname{sh}^2 t_1 \mp$$

$$\mp\, n\operatorname{sh} t_1\operatorname{ch} t_1 \pm e^{\mp nt_1}\operatorname{sh} nt_1]$$

$$B_n{}^c = \frac{1}{n\,(n^2-1)\,\Delta_n}\,[Rn\cos n\beta_1 + (Tx_1 + Ry_1)\sin n\beta_1]\,[n^2\operatorname{sh}^2 t_1 \pm n\operatorname{sh} t_1\operatorname{ch} t_1 \pm$$

$$\pm\, e^{\mp nt_1}\operatorname{sh} nt_1] \mp \frac{T\sin n\beta_1}{\Delta_n}\operatorname{sh}^2 t_1$$

$$A_n{}^s = \mp \frac{\operatorname{sh}^2 t_1}{\Delta_n} [Rn \sin n\beta_1 - (Tx_1 + Ry_1) \cos n\beta_1] -$$
$$- \frac{T \cos n\beta_1}{n\Delta_n} [n^2 \operatorname{sh}^2 t_1 \mp n \operatorname{sh} t_1 \operatorname{ch} t_1 \pm e^{\mp nt_1} \operatorname{sh} nt_1]$$

$$B_n{}^s = \frac{1}{n(n^2-1)\Delta_n} [Rn \sin n\beta_1 + (Tx_1 + Ry_1) \cos n\beta_1] \times$$
$$\times [n^2 \operatorname{sh}^2 t_1 \pm n \operatorname{sh} t_1 \operatorname{ch} t_1 \pm e^{\mp nt_1} \operatorname{sh} nt_1] \pm \frac{T \cos n\beta_1}{\Delta_n} \operatorname{sh}^2 t_1 \qquad (11)$$

$$\Delta_n = \operatorname{sh}^2 nt_1 - n^2 \operatorname{sh}^2 t_1 \qquad (t_1 = \alpha_2 - \alpha_1)$$

Постоянные A_1, B_1, C и J найдем, вычисляя напряжения при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ по формулам (5) и (8) и сравнивая их с (2):

$$A_1{}^c = \pm T \frac{e^{\mp 2t_1} \sin \beta_1}{\operatorname{sh} 2t_1} \pm \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} J \operatorname{th} t_1, \qquad B_1{}^c = -\frac{1}{2}(X + J)$$

$$C = \mp T \frac{e^{\mp 2t_1} \sin \beta_1}{\operatorname{sh} 2t_1} - R \operatorname{sh} \alpha_1 \mp \frac{1}{2} X \mp \frac{1-\nu}{4} X \operatorname{sh}^2 \alpha_1 - \frac{1}{2} J (\operatorname{th} t_1 + \operatorname{sh} 2\alpha_1)$$

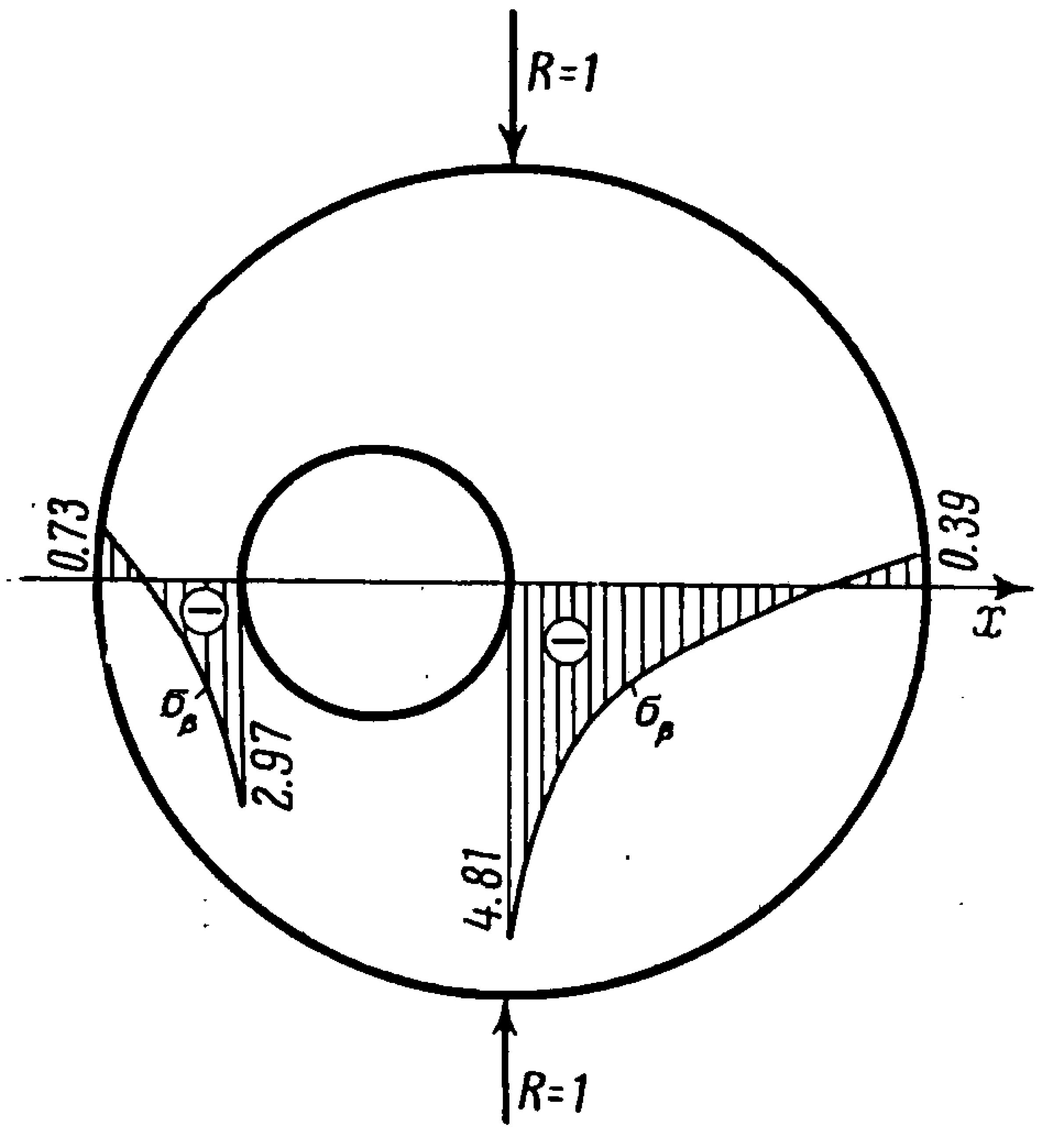
$$J = \frac{1}{\operatorname{th} t_1 (\operatorname{sh}^2 \alpha_2 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1)} \Big[\pm T \operatorname{th} t_1 \sin \beta_1 \mp R (\operatorname{ch} \alpha_1 + \cos \beta_1) \pm \frac{3}{2} X \mp$$
$$\mp \frac{1-\nu}{4} X (\operatorname{sh}^2 \alpha_2 - \operatorname{sh}^2 \alpha_1) \Big]$$

$$A_1{}^s = \mp T \frac{e^{\mp 2t_1} \cos \beta_1}{\operatorname{sh} 2t_1} \pm \frac{1}{2} M \pm \frac{1-\nu}{8} Y \operatorname{th} t_1 \qquad (12)$$

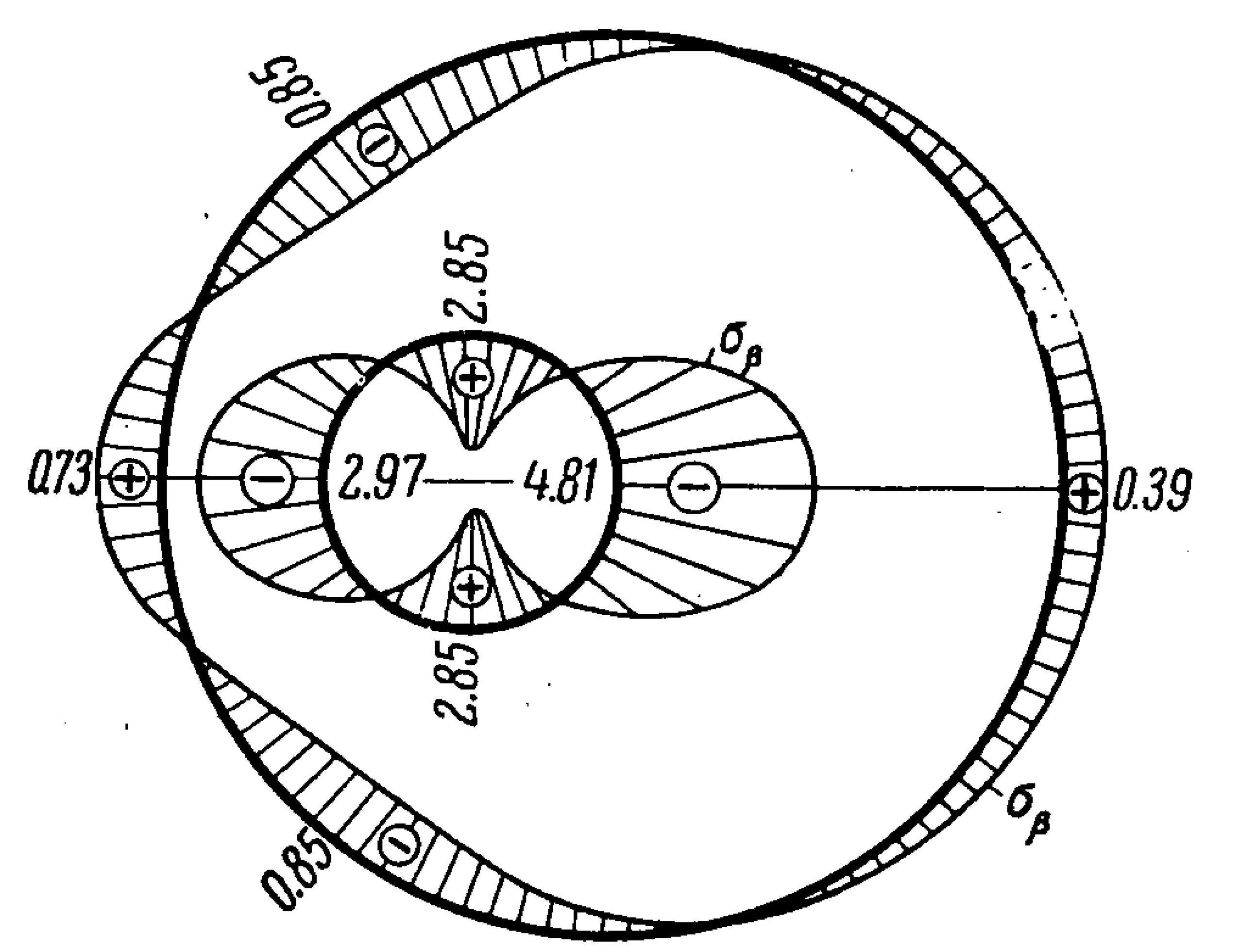
$$B_1{}^s = -\frac{1}{2} M \mp \frac{1-\nu}{8} Y$$

Таким образом, функция напряжений для поставленной задачи определена.

В качестве примера рассмотрим сжатие эксцентрического кольца двумя равными сосредоточенными силами, направленными по диаметру внешней окружности (фиг. 2).



Фиг. 2



Фиг. 3

Кольцо ограничено кривыми $\alpha_1 = 1.0$ и $\alpha_2 = 2.0$; радиус внешней окружности $r_1 = 0.8509$, радиус внутренней окружности $r_2 = 0.2757$; эксцентриситет $e = 0.2757$. Координаты точки приложения силы ($\alpha = 1$, $\beta = \pm 2.2758$). Здесь, очевидно, $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma M = 0$ и контур кольца свободен от напряжений. Для каждой из сил

$R = 1$, $T = 0$. Будем учитывать пять первых членов ряда (6) — (7). По формулам (11) — (12) получим следующие значения постоянных ($\nu = 0.3$):

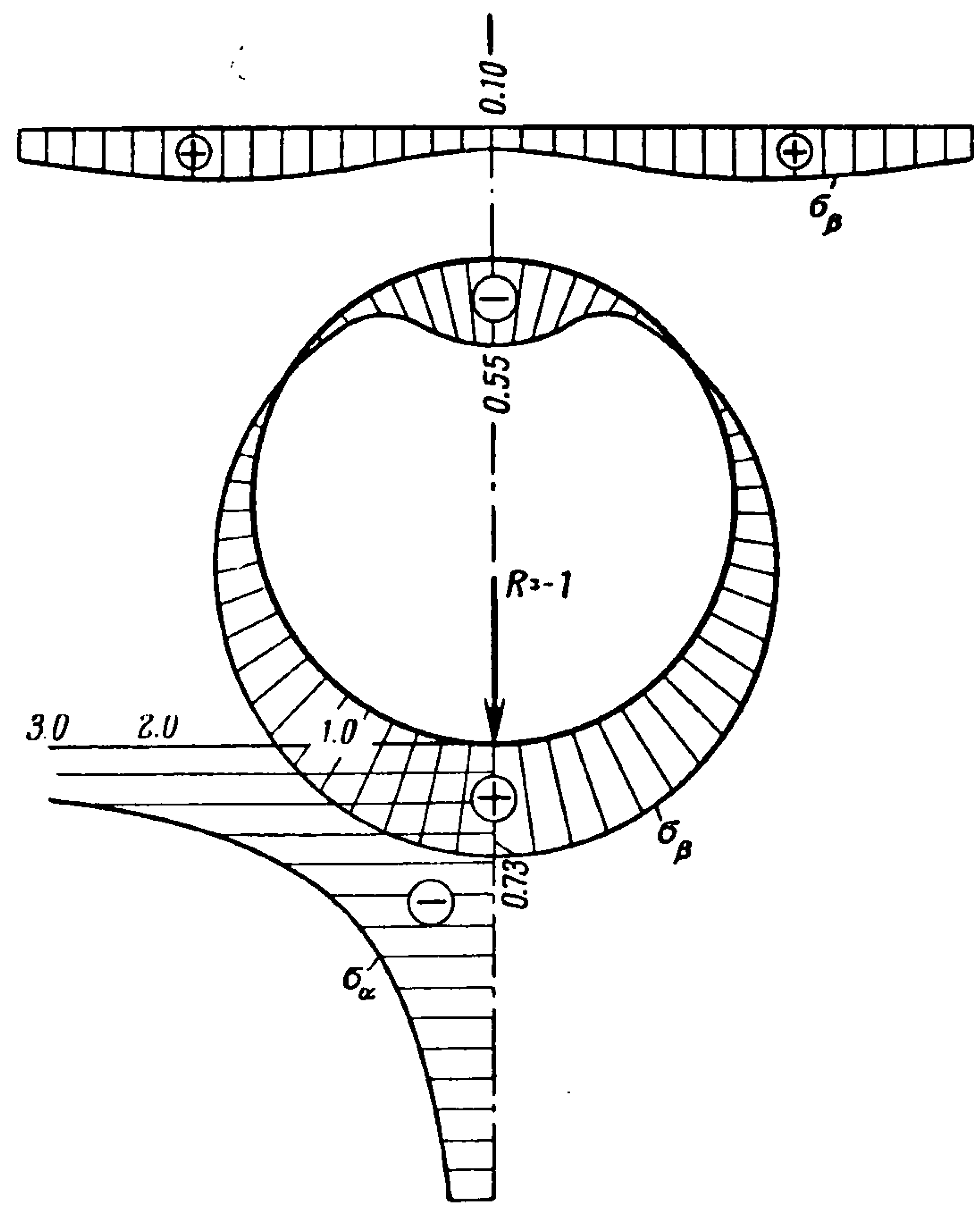
$$A_1^c = -0.06157,\quad A_2^c = 0.42017,\quad A_3^c = -0.09448,\quad A_4^c = +0.01347,\quad A_5^c = -0.00054$$

$$B_1^c = +0.08085,\quad B_2^c = -0.48890,\quad B_3^c = +0.05235,\quad B_4^c = -0.00485,$$

$$B_5^c = +0.00014,\qquad C = -1.99559,\quad J = -0.16170$$

Напряжения подсчитываем по формулам (5) для каждой из двух сил в отдельности и складываем с напряжениями по формулам (8). На фиг. 2 и 3 приведены графики напряжений σ_β в диаметральном сечении по оси ox и по контуру кольца.

Полуплоскость с круговым отверстием можно считать вырожденным случаем эксцентрического кольца, когда радиус внешней окружности равен бесконечности. Поэтому все формулы, выведенные в настоящей статье, могут быть применены и к задаче о действии сосредоточенной силы на полуплоскость с круговым отверстием, следует лишь положить для прямолинейной границы $\alpha = 0$. При этом необходимо иметь в виду, что в бесконечно удаленной точке плоскости ($\alpha = 0$, $\beta = \pm\pi$) должны быть приложены силы, уравновешивающие заданную нагрузку.



Фиг. 4

На фиг. 4 даны графики напряжений σ_β по контуру и σ_α по оси ox, возникающие при действии сосредоточенной силы на вырез внутри упругой полуплоскости. Радиус отверстия $r = 0.8509$, расстояние от границы полуплоскости до центра отверстия $d = 1.3130$. Сосредоточенная сила, имеющая составляющие $R = -1$, $T = 0$, приложена в точке с координатами $\alpha = 1.0$, $\beta = \pm\pi$. Она уравновешивается силой $R = +1$, $T = 0$, приложенной в точке $\alpha = 0.0$, $\beta = \pm\pi$.

Поступила 26 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffery G. B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. 221 p. 265. 1921
2. Weinel E. Über einige ebene Randwertprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, B. 17, H. 5, S. 276. 1937.
3. Sen Gupta A. M. Stresses due to diametral forces on a circular disk with an eccentric hole. Journal of Applied Mechanics, vol. 22, № 2, p. 263, 1955.
4. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Гостехтеоретиздат. 1950.