ОБ ИЗГИБЕ БЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. Л. Рвачев

(Бердянск)

Настоящая статья посвящена приложению решения пространственной контактной задачи для полосы к расчету бесконечной балки, лежащей на упругом полупространстве. В отличие от обычно принимаемой теории Герца, здесь предполагается, что между осадкой $w(x, y, 0)$ и давлением $p(x, y)$ имеет место зависимость

$$w(x, y, 0) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \iint\limits_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} + kp(x, y)$$

где ν_0 и E_0 — упругие постоянные, (S) — часть границы полупространства, на которой приложена нагрузка $p(x, y)$, k — некоторый коэффициент, зависящий от поверхностной структуры упругого основания.

Такое обобщение теории Герца было предложено И. Я. Штаерманом [1] и представляет собой своеобразное сочетание этой теории с гипотезой «коэффициента постели», включающее их в себя как частные случаи.

Указанная выше задача об изгибе бесконечной балки решается в предположении, что балка до деформации имеет плоское основание и изгибается лишь в продольном направлении.

§ 1. Дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид:

$$EIw^{\mathrm{IV}}(y) = q(y) - r(y) \tag{1.1}$$

где E — модуль упругости балки, I — момент инерции ее поперечного сечения, $w(y)$ — прогиб оси балки, $q(y)$ — нагрузка, $r(y)$ — реакция основания, приходящаяся на единицу длины балки.

Если балка имеет контакт с упругим полупространством вдоль полосы (S), так что $|x| \leqslant a$, $-\infty < y < +\infty$, то уравнение (1) примет вид:

$$w(x, y, 0) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \int\limits_{-a}^{a} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi, \eta)\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} + kp(x, y) \tag{1.2}$$

Заметим, что $w(x, y, 0) = w(y)$ в области (S) и

$$r(y) = \int\limits_{-a}^{a} p(x, y)\, dx \tag{1.3}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $q(y) = a(\lambda)\cos\lambda y$, где $\lambda > 0$ — произвольный параметр, а $a(\lambda)$ — произвольная функция этого параметра. Оказывается, что систем уравнений (1.1) и (1.2) можно в этом случае удовлетворить, полагая

$$w(y) = b(\lambda)\cos\lambda y, \qquad r(y) = c(\lambda)\cos\lambda y \tag{1.4}$$

где $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$ — некоторые функции λ.

Легко убедиться, что уравнение (1.1) будет удовлетворено, если

$$EI\lambda^4 b(\lambda) = a(\lambda) - c(\lambda) \tag{1.5}$$

Учитывая, что $w(x, y, 0) = b(\lambda)\cos\lambda y$ при $|x| < a$, уравнению (1.2) удовлетворим, полагая

$$p(x, y) = \varphi(\lambda, x)\cos\lambda y \tag{1.6}$$

где $\varphi(\lambda, x)$ — решение уравнения

$$b(\lambda) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int\limits_{-a}^{a} \varphi(\lambda, t) K_0(\lambda|x-t|)\, dt + k\varphi(\lambda, x) \tag{1.7}$$

В последней формуле $K_0(t)$ — известная функция Бесселя. Находя решение $\varphi(\lambda, x)$ уравнения (1.7) и замечая, что

$$\int\limits_{-a}^{a} \varphi(\lambda, x)\, dx = c(\lambda) \tag{1.8}$$

получим условие, которому должны удовлетворять постоянные $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$, чтобы удовлетворялось уравнение (1.4).

§ 2. Используя то обстоятельство, что функция $K_0(t)$ есть решение уравнения

$$y'' + t^{-1}y' - y = 0$$

можно показать, что функция

$$\Phi(\lambda, x, z) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int_{-a}^{a} \varphi(\lambda, t) K_0[\lambda \sqrt{(x-t)^2 + z^2}]\, dt \qquad (2.1)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \lambda^2 \Phi = 0 \qquad (2.2)$$

во всех точках плоскости xz, за исключением точек отрезка $[-a, a]$ оси x, и обращается в нуль на бесконечности.

Так как функция $K_0(t)$ имеет единственную (логарифмическую) особенность при $t = 0$, то можно получить следующие формулы, аналогичные известным формулам теории потенциала:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\lambda, x, +0)}{\partial z} &= \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \varphi(\lambda, x) \\ \frac{\partial \Phi(\lambda, x, -0)}{\partial z} &= -\frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \varphi(\lambda, x) \end{aligned}\right\} \quad (|x| < a) \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, x, 0)}{\partial z} = 0 \qquad (|x| > a) \qquad (2.4)$$

Из формул (2.3) и (1.7) следует, что в точках отрезка $|x| < a$ оси Ox имеет место равенство

$$\Phi(\lambda, x, 0) + k_1 \frac{\partial \Phi(\lambda, x, 0)}{\partial z} = b(\lambda) \qquad \left(k_1 = \frac{\pi E_0 k}{2(1-\nu_0^2)}\right) \qquad (2.5)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию решения уравнения (2.2), удовлетворяющего граничному условию (2.5) и обращающегося в нуль на бесконечности.

В статье автора [2] получено решение задачи для случая $k_1 = 0$. Пусть $\Phi_0(\lambda, x, z)$ есть решение, соответствующее этому случаю. Тогда при $|x| < a$ имеем

$$\Phi_0(\lambda, x, 0) = b(\lambda), \qquad \frac{\partial \Phi_0(\lambda, x, +0)}{\partial z} = \frac{2b(\lambda)}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{2\nu} \cos 2\nu \arccos \frac{x}{a} \qquad (2.6)$$

где

$$\delta_{2\nu} = (-1)^{\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_0^{(2i)} A_{2\nu}^{(2i)} \operatorname{Fek}_{2i}'(0, -\tfrac{1}{4}a^2\lambda^2)}{\operatorname{Fek}_{2i}(0, -\tfrac{1}{4}a^2\lambda^2)} \qquad (2.7)$$

Числа $A_{2\nu}^{(2i)}$ суть коэффициенты Фурье функций Матье $ce_{2i}(x, -\tfrac{1}{4}a^2\lambda^2)$, а $\operatorname{Fek}_{2i}(x, -q)$ — известные функции Матье [3]. Для вычисления δ_{2i} можно воспользоваться таблицами [4]. Используем формулу Грина

$$\iint\limits_{(D)} (v \nabla u - u \nabla v)\, dx\, dy = \int\limits_{[L]} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) ds$$

где (D) — внутренность круга произвольного радиуса R, из которой исключены точки отрезка $[-a, a]$ оси Ox. Полагая $v = \Phi(\lambda, x, z)$ и $u = \Phi_0(\lambda, x, z)$ и учитывая, что эти функции удовлетворяют уравнению (2.2), получим при $R \to \infty$

$$\int_{-a}^{a} \Phi(\lambda, x, 0) \frac{\partial \Phi_0(\lambda, x, +0)}{\partial z}\, dx - \int_{-a}^{a} \Phi_0(\lambda, x, 0) \frac{\partial \Phi(\lambda, x, +0)}{\partial z}\, dx = 0 \qquad (2.8)$$

В силу формул (2.5) получим

$$b(\lambda) \int_{-a}^{a} \Phi_{0z}'\, dx - k_1 \int_{-a}^{a} \Phi_z' \Phi_{0z}'\, dx - b(\lambda) \int_{-a}^{a} \Phi_z'\, dx = 0 \qquad (2.9)$$

Отсюда

$$b(\lambda) \int_{-a}^{a} \Phi_{0z}'\, dx - \frac{k_1}{2a} \int_{-a}^{a} \Phi_z'\, dx \int_{-a}^{a} \Phi_{0z}'\, dx +$$

$$+ k_1 \int_{-a}^{a} \Phi_{0z}' \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \Phi_z'\, dx - \Phi_z'\right) dx - b(\lambda) \int_{-a}^{a} \Phi_z'\, dx = 0 \qquad (2.10)$$

Из (2.10) следует

$$\int_{-a}^{a} \Phi_z' \, dx = \frac{b(\lambda) J}{b(\lambda) + (k_1/2a) J} + \varepsilon \qquad \left(J = \int_{-a}^{a} \Phi_{0z}' \, dx\right) \tag{2.11}$$

где

$$\varepsilon = \frac{k_1}{b(\lambda) + (k_1/2a) J} \int_{-a}^{a} \Phi_{0z}' \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \Phi_z' \, dx - \Phi_z\right) (k_1/2a) J \, dx \tag{2.12}$$

Нетрудно убедиться, что $\Phi_z' \to \mathrm{const}$ при $k_1 \to \infty$. Следовательно, $\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$. Кроме того, $\varepsilon \to 0$ при $k_1 \to 0$. Так как $\Phi_{z0}' \to \mathrm{const}$ при $\lambda \to \infty$, то $\varepsilon \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Таким образом, для достаточно больших и для достаточно малых значений k_1 можно пренебречь в формуле (2.11) величиной ε. Следует отметить также, что отбрасывание ε и в этой формуле равносильно допущению некоторой погрешности в нахождении величины k, характеризующей поверхностные свойства упругого полупространства.

Точное решение задачи для всех k связано с решением указанной выше краевой задачи и может явиться объектом дальнейшего исследования.

Заметим, что

$$\int_{-a}^{a} \Phi_{0z}' dx = \frac{2b(\lambda)}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{2\nu} \int_{-a}^{a} \frac{\cos 2\nu \arccos \dfrac{x}{a}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = 2b(\lambda)\, \delta_1 \tag{2.13}$$

Из формул (1.8), (2.3) и (2.11) получим

$$c(\lambda) \approx \frac{\pi E_0 a \delta_0}{(1 - \nu_0^2)(a + k_1 \delta_0)} \tag{2.14}$$

Отсюда

$$b(\lambda) \approx \frac{(1 - \nu_0^2)[R(a\lambda) + \lambda k_1]}{\pi E_0 a \lambda} c(\lambda) \qquad \left(R(a\lambda) = \frac{a\lambda}{\delta_0}\right) \tag{2.15}$$

Некоторые значения функции $R(t)$ приведены в таблице.

Таблица

t	$R(t)$	t	$R(t)$	t	$R(t)$	t	$R(t)$
0	0	0.5	1.600	1,0	2.100	2.0	2.514
0.1	0.624	0.6	1.733	1.2	2.213	4.0	2.793
0.2	0.977	0.7	1.846	1.4	2.316	6.0	2.900
0.3	1.235	0.8	1.944	1.6	2.395	∞	π
0.4	1.436	0.9	2.027	1.8	2.459		

Исключая из (1.5) и (2.15) функцию $c(\lambda)$, получим

$$b(\lambda) = \frac{(1 - \nu_0^2)[R(a\lambda) + \lambda k_1]}{\pi E_0 a \lambda + EI(1 - \nu_0^2)[R(a\lambda) + \lambda k_1]\lambda^4} a(\lambda) \tag{2.16}$$

§ 3. Из формулы (2.17) следует, что нагрузке на балку $q(y) = a(\lambda) \cos \lambda y$ соответствует осадка

$$w(y) = \frac{(1 - \nu_0^2)[R(a\lambda) + \lambda k_1] a(\lambda)}{\pi E_0 a \lambda + EI(1 - \nu_0^2)[R(a\lambda) + \lambda k_1]\lambda^4} \cos \lambda y \tag{3.1}$$

Представляя произвольную нагрузку в виде интеграла Фурье, сможем найти прогиб оси балки по формуле

$$w(y) = \frac{(1 - \nu_0^2) a^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[aR(u) + k_1 u] \, du}{a^5 \pi E_0 u + EI(1 - \nu_0^2)[aR(u) + k_1 u] u^4} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \cos \frac{u}{a}(y - t) \, dt \tag{3.2}$$

Поступила 5 V 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., 1949.
2. Рвачев В. Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
3. Мак-Лахлан И. В. Теория и приложения функций Матье М., 1953.
4. Tables relating to Mathieu functions. Columbia University Press, New York, 1951.