О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ

М. Ш. Флексер

(Харьков)

1. Система дифференциальных уравнений колебания стержня с учетом инерции вращения и влияния перерезывающих сил на прогиб имеет вид [1]:

$$\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+Cc_2^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\psi\right),\qquad C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Cc_2^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+q \tag{1}$$

Здесь ψ — угол наклона касательной к изогнутой оси стержня в предположении, что силой перерезывания пренебрежено, $u=u(x,t)$ — прогиб стержня, $q=q(x,t)$ — внешняя нагрузка,

$$C=\frac{\rho A}{EI},\qquad c_1^2=\frac{E}{\rho},\qquad c_2^2=\frac{kG}{\rho}$$

где A — площадь поперечного сечения стержня, ρ — объемная плотность, k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, EI — жесткость на изгиб, G — модуль сдвига, c_1, c_2 — скорости распространения волн при поперечных колебаниях [2]. Для однозначной характеристики процесса колебаний нужно задать начальные и граничные условия. Предположим для простоты, что при $t=0$

$$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial t}=0,\qquad u=\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{2}$$

Граничные условия будут иметь один из следующих видов [3]:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\qquad u=\psi=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\psi=0 \tag{3}$$

Из системы (1) можно исключить функцию ψ только в случае свободно опертого стержня, т. е. при выполнении первых из граничных условий (3) или когда стержень бесконечный [3]. При этом для прогиба $u=u(x,t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{1}{c_1^2c_2^2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{EICc_1^2c_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+Cc_1^2c_2^2\right)q \tag{4}$$

и начальные условия при $t=0$

$$u=\frac{\partial u}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{EIC}q,\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\frac{1}{EIC}\frac{\partial q}{\partial t} \tag{5}$$

2. В качестве примера применения уравнения (4) рассмотрим колебания бесконечного стержня, вызванные произвольной нагрузкой q.

Лапласово изображение уравнения (4) при начальных условиях (5) имеет вид:

$$\begin{aligned}L(U)&=\frac{d^4U}{dx^4}-p^2\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{d^2U}{dx^2}+p^2\left(\frac{p^2}{c_1^2c_2^2}+C\right)U=\\&=\frac{1}{EICc_1^2c_2^2}\left(p^2-c_1^2\frac{d^2}{dx^2}+Cc_1^2c_2^2\right)Q\end{aligned} \tag{6}$$

где U и Q — изображения прогиба и нагрузки соответственно.

Так как функция источника оператора $L(U)$

$$R(x,\xi,p)=\frac{1}{2(n_2^2-n_1^2)}\left(\frac{1}{n_1}e^{-n_1|x-\xi|}-\frac{1}{n_2}e^{-n_2|x-\xi|}\right) \tag{7}$$

где n_1, n_2 ($\operatorname{Re} n_1>0$, $\operatorname{Re} n_2>0$) — корни характеристического уравнения, то решение уравнения (6), стремящееся к нулю при $|x|\to\infty$, представится в виде

$$U=\frac{1}{EICc_1^2c_2^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x,\xi,p)\left(p^2-c_1^2\frac{d}{d\xi^2}+Cc_1^2c_2^2\right)Q(\xi,p)d\xi$$

или после интегрирования по частям

$$U=\frac{1}{2EIc_1^2c_2^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(n_1,n_2)e^{-n_1|x-\xi|}+\varphi(n_2,n_1)e^{-n_2|x-\xi|}]\,Q\,d\xi \tag{8}$$

где

$$\varphi=(u,v)=\frac{c_1^2u^2-Cc_1^2c_2^2-p^2}{u(u^2-v^2)} \tag{9}$$

3. Воспользуемся формулой (8) для исследования характера упругой линии бесконечного стержня, колеблющегося под действием внезапно приложенной (в момент $t = 0$) в точке $x = 0$ постоянной силы P. В этом случае $q = P\sigma_0(t)\sigma_1(x)$, где $\sigma_0(t)$, $\sigma_1(x)$ — единичная и единичная импульсивная функция.

Подставляя в (8) вместо Q изображение указанной нагрузки, получим

$$\frac{2EI}{P}U = \frac{1}{p(n_2^2 - n_1^2)}\left(\frac{1}{n_1}e^{-n_1|x|} - \frac{1}{n_2}e^{-n_2|x|}\right) + \\ + \frac{1}{Cc_1^2c_2^2p(n_2^2 - n_1^2)}\left(\frac{p^2 - c_1^2n_1^2}{n_1}e^{-n_1|x|} - \frac{p^2 - c_1^2n_2^2}{n_2}e^{-n_2|x|}\right) \tag{10}$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$\frac{2EI}{P}U = \frac{1}{p^2Cc_2}\exp\left(-p\frac{|x|}{c_2}\right) + \Phi \tag{11}$$

и после применения формулы обращения получим

$$\frac{2EI}{P}u(x, t) = \omega(x, t) + \varphi(x, t) \tag{12}$$

где

$$\omega(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } c_2t < |x| \\ \dfrac{c_2t - |x|}{Cc_2^2} & \text{при } c_2t > |x| \end{cases} \tag{13}$$

а $\varphi(x, t)$ — функция, производная которой по x обращается в нуль при $x = 0$.

Из соотношений (12), (13) следует, что в точке приложения сосредоточенной силы наклон касательной к упругой линии стержня претерпевает скачок, пропорциональный величине приложенной силы и обратно пропорциональный квадрату скорости распространения волны c_2. В самом деле, из (12) и (13) получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=+0} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-0} = -\frac{P}{EICc_2^2} \tag{14}$$

При $c_1, c_2 \to \infty$ (4) переходит в классическое уравнение поперечных колебаний стержня; но тогда, как видно из (14), скачок обращается в нуль, что является хорошо известным фактом.

В заключение заметим, что если вместо бесконечного стержня рассмотреть свободно опертый стержень конечной длины $2l$, то для изображения прогиба u мы получили бы формулу

$$\frac{2EI}{P}U = \frac{1}{p(n_2^2 - n_1^2)}\left[\frac{\operatorname{sh} n_2(|x| - l)}{n_2 \operatorname{ch} n_2l} - \frac{\operatorname{sh} n_1(|x| - l)}{n_1 \operatorname{ch} n_1l}\right] + \\ + \frac{1}{Cc_1^2c_2^2p(n_2^2 - n_1^2)}\left[\frac{p^2 - c_1^2n_2^2}{n_2 \operatorname{ch} n_2l}\operatorname{sh} n_2(|x| - l) - \frac{p^2 - c_1^2n_1^2}{n_1 \operatorname{ch} n_1l}\operatorname{sh} n_1(|x| - l)\right] \tag{15}$$

И в этом случае имеет место скачок угла наклона касательной в точке приложения силы, равный

$$-\frac{P}{EICc_2^2}$$

Задача о колебании бесконечного стержня, а также и стержня конечной длины под действием внезапно приложенной постоянной нагрузки P рассматривалась в работе [2]. Но в этой работе вторые слагаемые правых частей равенств (10) и (15) были опущены, вследствие чего наличие скачка угла наклона касательной к упругой линии в точке приложения силы не было обнаружено.

Поступила 2 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. ГТТИ, Л.— М. 1934, стр. 228.
2. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, т. XII, вып. 3, 1948.
3. Флексер М. Ш. Об учете влияния инерции вращения и перерезывающих сил на поперечные колебания стержня конечной длины. Инженерный сборник, т. XXIII, стр. 138, 1956.