К ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

М. Мишонов

(София)

§ 1. О дифференциальных уравнениях пологих оболочек в случае нормальной нагрузки. Дифференциальные уравнения технической теории пологих оболочек, предложенные В. З. Власовым [1, 2] в случае нормальной нагрузки Z, действующей нормально к поверхности оболочки, могут быть записаны следующим образом:

$$\Delta\Delta\varphi + Eh\Delta_k w = 0, \qquad D\Delta\Delta w - \Delta_k\varphi = Z, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.1}$$

Здесь за неизвестные величины приняты нормальный прогиб w и функция напряжения φ, компоненты нагрузки X и Y считаются равными нулю, толщина оболочки h принята постоянной, E — модуль упругости материала, ν — коэффициент Пуассона.

Операторы Δ и Δ_k имеют следующий вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Delta_k = k_x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \tag{1.2}$$

Здесь k_x и k_y — кривизна изгиба, а k_{xy} — кривизна кручения поверхности оболочки.

Если F — функция, определяющая поверхность пологой оболочки, то приближенные зависимости

$$k_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad k_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad k_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial k_x}{\partial y} - \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

Нормальные усилия N_x и N_y, тангенциальное усилие S, изгибающие моменты M_x и M_y и крутящий момент M_{xy} определяются по формулам

$$N_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$N_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{1.5}$$

$$S = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \qquad M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

Поверхность оболочки, координатная система и положительные направления усилий показаны на фигуре 1. Плоскость Oxy является координатной плоскостью пологой оболочки. Подвижная координатная система $O'x'y'z'$ связана с произвольной точкой оболочки таким образом, что оси $x'y'$ находятся в тангенциальной плоскости, а ось z' — в направлении нормали к поверхности оболочки. При этом оси x' и y' находятся в плоскости $y = \text{const}$ и $x = \text{const}$. Положительные направления перемещений u, v, w и компонент распределений поверхности нагрузки X, Y, Z совпадают с направлением координатных осей x', y', z'.

В. З. Власов [1] вводит скалярную функцию W по формулам

$$w = \Delta\Delta W, \qquad \varphi = -Eh\Delta_k W \tag{1.6}$$

и преобразует системы (1.1) к виду

$$D\Delta\Delta\Delta\Delta W + Eh\Delta_k\Delta_k W = Z \tag{1.7}$$

Этим уравнением удобно пользоваться в том случае, когда кривизны k_x и k_y постоянны и кривизна k_{xy} равна нулю.

Следует обратить внимание, что в случае сферической оболочки формулы (1.6) и (1.7) становятся неправильными. В случае, когда $k_x = k_y = 1 / R = \text{const}$ и $k_{xy} = 0$, уравнения (1.6) принимают вид:

$$w = \triangle\triangle W, \qquad \varphi = -\frac{Eh}{R}\triangle W, \qquad \triangle_k = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{R}\triangle \tag{1.8}$$

Исключая из этих уравнений W, имеем

$$w = -\frac{R}{Eh}\triangle\varphi \tag{1.9}$$

С другой стороны, первое уравнение исходной системы (1.1) дает нам формулу

$$\triangle w = -\frac{R}{Eh}\triangle\triangle\varphi \tag{1.10}$$

Очевидно, что формулы (1.9) и (1.10) не тождественны, а должны были быть тождественны. Например, при $\triangle\varphi = 0$ из (1.9) получаем $w = 0$, а из (1.10) имеем $\triangle w = 0$. Вследствие этого в частном случае сферической оболочки уравнения

$$D\triangle\triangle\triangle\triangle w + \frac{Eh}{R^2}\triangle\triangle W = Z \tag{1.11}$$

$$D\triangle\triangle w + \frac{Eh}{R^2} w = Z \tag{1.12}$$

полученные из (1.7) и (1.8), не являются правильными и могут привести к ошибочным результатам.

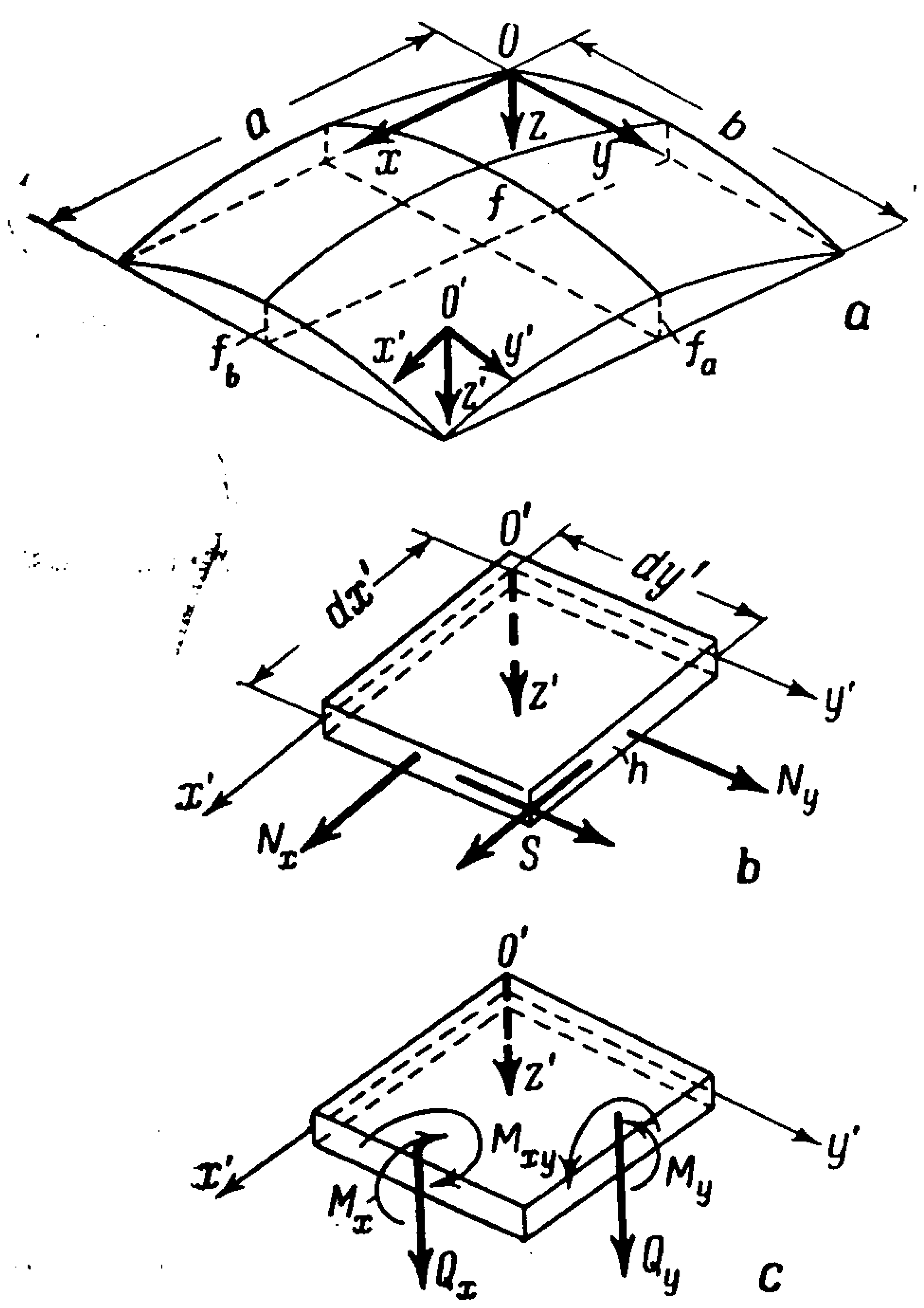
В случае сферической оболочки следует применить исходную систему дифференциальных уравнений (1.1) или воспользоваться новой функцией W^*, которая определяется по формулам

$$\triangle w = \triangle W^*, \qquad \triangle\varphi = -\frac{Eh}{R} W^* \tag{1.13}$$

При исключении W^* из двух указанных выше формул получаются зависимости (1.10), как и должно быть.

Подставляем формулы (1.13) во второе уравнение системы (1.1) и получаем

$$D\triangle\triangle W^* + \frac{Eh}{R^2} W^* = Z \tag{1.14}$$



Фиг. 1

Уравнения (1.13) и (1.14) в отличие от уравнений (1.8) и (1.12) правильны, и нет опасности получить ошибочные результаты.

§ 2. **О дифференциальных уравнениях пологих оболочек в случае произвольной нагрузки.** Для произвольной нагрузки можно воспользоваться системой из трех дифференциальных уравнений, предложенных также В. З. Власовым [2], в которую в качестве неизвестных величин введены компоненты полного перемещения u, v и w. Однако эта система сравнительно сложна и в большинстве случаев неудобна для применения. Поэтому желательно иметь обобщение системы уравнений (1.1), которое можно было бы применить при любой нагрузке.

Для частного случая круговых цилиндрических оболочек подобное обобщение встречается в книге Рюдигера и Урбана [4].

Оказывается, что и для общего случая пологой оболочки с любыми кривизнами такое обобщение не представляет затруднений. Для этого вместо первых двух зависимостей (1.5) следует принять следующие:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \int X dx, \qquad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \int Y dy \tag{2.1}$$

В дальнейшем можно идти путем, указанным В. З. Власовым [2], ограничившись при этом только линейными членами. Таким путем находим

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi + Eh\Delta_k w &= \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\,\partial x + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,dy - \nu\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\ D\Delta\Delta w - \Delta_k\varphi &= Z - k_x \int X dx - k_y \int Y dy \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вместо указанной выше системы (2.2) можно применить дифференциальное уравнение с комплексными коэффициентами, получаемое при подстановке

$$u^* = w + i\alpha\varphi \qquad \left(\alpha = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}, \quad i = \sqrt{-1}\right) \tag{2.3}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta\Delta u^* + i\,\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}\,\Delta_k u^* = \frac{1}{D}\Big\{Z - k_x \int X dx - k_y \int Y dy + \\ + i\,\frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left[\int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\,dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,dy - \nu\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Произведя интегрирование и определив u^* разделением действительной и мнимой частей, найдем прогиб w и функцию напряжения φ.

При известных условиях перемещения в оболочке определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w &= \frac{1}{Eh}(N_x - \nu N_y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w &= \frac{1}{Eh}(N_y - \nu N_x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} S \end{aligned} \tag{2.5}$$

§ 3. Случай равномерно распределенной тангенциальной нагрузки. Если оболочка в плане прямоугольна и кривизна кручения равна нулю, то задача может быть решена весьма просто. Принимаем обычные граничные условия, а именно: свободно опертая оболочка и стрингеры жестки в своей плоскости и гибки вне ее.

Не нарушая общности, будем считать, что тангенциальная нагрузка действует только в направлении одной координатной оси.

В таком случае можно записать

$$X = X_0 = \text{const}, \quad Y = Z = 0, \quad k_{xy} = 0, \quad \int X_0 dx = X_0 x$$

$$w,\ v,\ M_x,\ N_x = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a; \quad w,\ u,\ M_y,\ N_y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b$$

Система (2.2) получает следующий вид:

$$\Delta\Delta\varphi + Eh\Delta_k w = 0, \qquad D\Delta\Delta w - \Delta_k\varphi = k_x X_0 x \tag{3.1}$$

Легко установить, что эта система, а также принятые граничные условия для w, M_x, M_y, N_x и N_y будут удовлетворены, если

$$w = 0, \qquad \varphi = \frac{1}{2} X_0 x y^2 + Cxy \tag{3.2}$$

Постоянную C определяем из граничных условий для u и v. Усилия во всей оболочке, за исключением тангенциального усилия S, равны нулю. Для S получаем

$$S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -X_0 y - C \tag{3.3}$$

Полученные величины для w и для усилий подставляем в систему (2.5) и получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2(1+\nu)}{Eh}(X_0y+C) \tag{3.4}$$

Из первых двух уравнений этой системы видно, что u может быть функцией только y, а v — только x. В этом случае третье уравнение (3.4) приобретает вид:

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=-\frac{2(1+\nu)}{Eh}(X_0y+C) \tag{3.5}$$

Для перемещений u и v нужно принять

$$u=-\frac{1+\nu}{Eh}X_0y^2+C_1y+C_2,\qquad v=C_3x+C_4 \tag{3.6}$$

Здесь C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные интегрирования. Подставляем (3.6) в (3.5) и получаем

$$C_1+C_3=-\frac{2(1+\nu)}{Eh}C \tag{3.7}$$

Исходя из принятых граничных условий для u и v, получаем

$$C_1=\frac{(1+\nu)b}{Eh}X_0,\qquad C_2=C_3=C_4=0 \tag{3.8}$$

Приняв во внимание (3.2), (3.3), (3.6), (3.7) и (3.8), получаем

$$u=\frac{1+\nu}{Eh}y(b-y)X_0,\qquad \varphi=-\frac{1}{2}(b-y)xyX_0,\qquad S=\frac{1}{2}(b-2y)X_0 \tag{3.9}$$

Все остальные перемещения и усилия равны нулю. Следует заметить, что полученные формулы не зависят от кривизн k_x и k_y, которые могут быть произвольными. В данном случае пологая оболочка работает как балка-стенка.

Задача становится более сложной, когда кривизна кручения k_{xy} не равна нулю. В этом случае удобно принять

$$w=w_0+w_1,\quad \varphi=\varphi_0+\varphi_1 \tag{3.10}$$

Здесь для w_0 и φ_0 принимаются результаты (3.9), т. е.

$$w_0=0,\quad \varphi_0=-\frac{1}{2}(b-y)xyX_0 \tag{3.11}$$

w_0 и φ_0 удовлетворяют строго принятым граничным условиям. Включив (3.10) в систему (3.1), получим

$$\Delta\Delta\varphi_1+Eh\Delta_k w_1=0,\quad D\Delta\Delta w_1-\Delta_k\varphi_1=k_{xy}(b-2y)X_0 \tag{3.12}$$

Благодаря этому дальнейшее решение задачи сводится к исследованию конструкции при действии фиктивной нормальной нагрузки:

$$Z^*=k_{xy}(b-2y)X_0$$

§ 4. Оболочка постоянной кривизны в случае произвольной тангенциальной нагрузки. Этот случай при условии отсутствия кривизны кручения и для обычных граничных условий (свободно подпертая оболочка и стрингеры жестки в своей плоскости и гибки вне ее) рассмотрен О. Д. Ониашвили [3]. При выводе формул им использованы непосредственно условия для равновесия. Ниже при рассмотрении той же задачи используются зависимости (2.1) и (2.2). Решение будем проводить при помощи двойных тригонометрических рядов. Для упрощения изложения исследуем влияние только одного произвольного члена из ряда нагрузки X.

Тогда можем записать

$$X=X_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\qquad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\ldots \\ n=1,2,3,\ldots \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Постоянные X_{mn} считаем за известные величины. Для w и φ принимаем

$$w=A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\qquad \varphi=B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{4.2}$$

Выражения (4.1) и (4.2) удовлетворяют строго принятым граничным условиям.

Подставив (4.1) и (4.2) в систему уравнений (2.2), получим систему алгебраических линейных уравнений, из которой имеем

$$A_{mn} = -\frac{a^3 m}{D\pi^5}\,\frac{m^2(k_1+\nu k_2)+\lambda^2 n^2[(2+\nu)k_1-k_2]}{(m^2+\lambda^2n^2)^4+\mu(k_2m^2+k_1\lambda^2n^2)^2}\,X_{mn}$$

$$B_{mn} = -\frac{a^3}{\pi^3 m}\,\frac{(m^2+\lambda^2n^2)(\lambda^2n^2-\nu m^2)+\mu k_1(k_2m^2+k_1\lambda^2n^2)}{(m^2+\lambda^2n^2)^4+\mu(k_2m^2+k_1\lambda^2n^2)^2}\,X_{mn} \qquad (4.3)$$

Здесь

$$\lambda=\frac{a}{b},\qquad \mu=\frac{12(1-\nu^2)a^4}{\pi^4h^2},\qquad k_x=k_1=\mathrm{const},\qquad k_y=k_2=\mathrm{const}$$

Использовав (1.5), (2.1) и (2.5) для перемещений и для усилий, получим

$$u=\frac{a^2}{\pi^2Eh}\,\frac{1}{\vartheta_1(m,n)}\{\vartheta_2(m,n)[(1-\nu^2)m^2+2(1+\nu)\lambda^2n^2]+$$
$$+\mu[(k_1^2+k_2^2+2\nu k_1k_2)m^2+2(1+\nu)k_1^2\lambda^2n^2]\}X_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{\pi xy}{b} \qquad (4.4)$$
$$v=-\frac{a^2m\lambda n}{\pi^2Eh}\,\frac{(1+\nu)^2\,\vartheta_2(m,n)+\mu(k_1-k_2)^2}{\vartheta_1(m,n)}\,X_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$N_x=-\frac{am}{\pi}\,\frac{\vartheta_2(m,n)[m^2+(2+\nu)\lambda^2n^2]+k_2\vartheta_3(m,n)}{\vartheta_1(m,n)}\,X_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (4.5)$$
$$N_y=\frac{am}{\pi}\,\frac{\vartheta_2(m,n)\vartheta_4(m,n)+k_1\vartheta_3(m,n)}{\vartheta_1(m,n)}\,X_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$
$$S=\frac{a\lambda n}{\pi}\,\frac{\vartheta_2(m,n)\vartheta_4(m,n)+k_1\vartheta_3(m,n)}{\vartheta_1(m,n)}\,X_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$M_x=-\frac{a^3m(m^2+\nu\lambda^2n^2)}{\pi^3}\,\frac{\vartheta_5(m,n)}{\vartheta_1(m,n)}\,X_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$
$$M_y=-\frac{a^3m(\lambda^2n^2+\nu m^2)}{\pi^3}\,\frac{\vartheta_5(m,n)}{\vartheta_1(m,n)}\,X_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (4.6)$$
$$M_{xy}=-\frac{(1-\nu)a^3m^2\lambda n}{\pi^3}\,\frac{\vartheta_5(m,n)}{\vartheta_1(m,n)}\,X_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

Здесь введены обозначения

$$\vartheta_1(m,n)=(m^2+\lambda^2n^2)^4+\mu(k_2m^2+k_1\lambda^2n^2)^2$$
$$\vartheta_2(m,n)=(m^2+\lambda^2n^2)^2,\qquad \vartheta_3(m,n)=\mu(k_2m^2+k_1\lambda^2n^2)$$
$$\vartheta_4(m,n)=\lambda^2n^2-\nu m^2,\qquad \vartheta_5(m,n)=m^2(k_1+\nu k_2)+\lambda^2n^2[(2+\nu)k_1-k_2]$$

Суммируя по m и n, можем учесть влияние всех членов ряда тангенциальной нагрузки X.

Следует отметить, что если X зависит только от $y\,(m=0)$, то w, v, N_x и N_y равны нулю по всей поверхности оболочки. Затем, если $X=X_0=\mathrm{const}$ и

$$X=\sum_n X_{0n}\sin\frac{n\pi y}{b}=\frac{4X_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

то путем улучшения сходимости бесконечных тригонометрических рядов по методу А. Н. Крылова получаем формулы (3.9), как и следовало ожидать.

Поступила 16 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГТТИ, 1949.
2. Власов В. З. Некоторые задачи сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости. Известия АН СССР, ОТН, № 9, 1950.
3. Ониашвили О. Д. К расчету пологих оболочек на сейсмостойкость. Академия наук Грузинской ССР. Труды Института строительного дела, т. III, 1951.
4. Rüdiger D., Urban J. Kreiszylinderschalen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1955.