ОДНА ЗАДАЧА СТАТИКИ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ИМЕЮЩЕЙ НАЧАЛЬНУЮ ПОГИБЬ

В. С. Иванов

(Ленинград)

1. Изучению работы сжатых цилиндрических оболочек, имеющих начальные отклонения от круговой формы, посвящено довольно большое количество исследований. Однако все они основываются на предположении точного совпадения формы дополнительного упругого прогиба оболочки с формой ее начальной погиби. В настоящей статье рассматривается возможность появления на оболочке, сжатой равномерно распределенным давлением, изгибных равновесных форм, отличных по числу волн от циклической начальной погиби. Задача решается для коротких, свободно опертых цилиндрических оболочек в нелинейной постановке.

2. В работе приняты следующие обозначения: δ, r, l — толщина, радиус и длина оболочки, $\xi = x / r$, $\varphi = y / r$ — безразмерные координаты, f — упругий прогиб оболочки по форме нового волнообразования, $a = W / r$ — безразмерная амплитуда прогиба оболочки по форме нового волнообразования, f^0 — начальная погибь, $a^0 = W^0 / r$ — безразмерная амплитуда начальной погиби, f_+ — дополнительный упругий прогиб по форме погиби, $a_+ = W_+ / r$ — безразмерная амплитуда дополнительного упругого прогиба по форме погиби, m — число волн погиби, n — число волн нового волнообразования, n_{*1}, n_{*2} — число волн, возникающих на поверхности идеальной оболочки при верхнем и нижнем критических давлениях, k^0, k — параметры формы погиби и нового волнообразования оболочки, E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, q — внешнее давление,

$$\alpha = \frac{\pi r}{l}, \qquad \gamma_1 = \frac{m}{\alpha}, \qquad \gamma = \frac{n}{\alpha}, \qquad D = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{\delta^2}{r^2}, \qquad \nu^2 = \alpha^4 D$$

$$T_1^0 = -\frac{1}{2} qr, \qquad T_2^0 = -qr, \qquad f_0 = f^\circ + f_+, \qquad a_0 = a^\circ + a_+$$

3. Уравнение равновесия элемента оболочки с произвольной формой дополнительного прогиба запишется

$$\frac{\partial^2 (F_0 + F_+)}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (F_0 + F_+)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \varphi^2} -$$
$$-2 \frac{\partial^2 (F_0 + F_+)}{\partial \xi \, \partial \varphi} \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \xi \, \partial \varphi} + \frac{\partial^2 (F_0 + F_+)}{\partial \xi^2} - D \nabla^2 \nabla^2 (f_+ + f) +$$
$$+ \frac{T_1^0}{E\delta} \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \xi^2} + \frac{T_2^0}{E\delta} \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (1)$$

Здесь F_0 — значение функции напряжений к моменту начала нового волнообразования на оболочке, вызываемых сложным изгибом оболочки по форме начальной погиби, F_+ — функция напряжений, дополнительно возникающих в срединной поверхности оболочки в процессе ее деформации по форме нового волнообразования.

В уравнении (1) функции F_0, F_+, f_0 и f связаны дополнительными условиями

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi \, \partial \varphi} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} -$$
$$- D \nabla^2 \nabla^2 f_+ + \frac{T_1^\circ}{E\delta} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} + \frac{T_2^\circ}{E\delta} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F_0 = \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi \, \partial \varphi} \right)^2 - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} -$$
$$- \left(\frac{\partial^2 f^0}{\partial \xi \, \partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f^0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f^0}{\partial \xi^2} \qquad (3)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F_+ = \left[\frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \xi \, \partial \varphi} \right]^2 - \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 (f_0 + f)}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi \, \partial \varphi} \right)^2 +$$
$$+ \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} \qquad (4)$$

Будем принимать следующие выражения для форм прогибов оболочки:

$$
\begin{aligned}
f^\circ &= a^\circ (\sin m\varphi + k^\circ \sin^2 m\varphi) \sin \alpha\xi \\
f_+ &= a_+ (\sin m\varphi + k^\circ \sin^2 m\varphi) \sin \alpha\xi \\
f &= a\ (\sin n\varphi + k \sin^2 n\varphi) \sin \alpha\xi
\end{aligned}
\tag{5}
$$

После интегрирования системы уравнений (1) — (4) обычным приемом, применяющимся для решения нелинейных задач устойчивости идеальных оболочек, получим условие равновесия оболочки после начала ее деформации по n волнам:

$$
ea^3 - a^2(d - I_1 a_0) + a(c - a_0 L_1 + a_0^2 L_2) - \frac{qr}{E\delta}\alpha^2 h a = 0 \tag{6}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
e &= \alpha^4 (k^4 e_1 + k^2 e_2 + e_3), & I_1 &= \alpha^2 k^\circ{}_1 (k^3 I_{11} + k I_{12}) \\
d &= \alpha^2 (k^3 d_1 + k d_2), & L_1 &= \alpha^2 k_0 (k^2 L_{11} + L_{12}) \\
c &= k^2 (c_1 + \nu^2 c_2) + c_3 + \nu^2 c_4, & L_2 &= \alpha^4 [k^{02}(k^2 L_{21} + L_{23}) + k^2 L_{22} + L_{24}] \\
h &= k^2 h_1 + h_2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$
h_1 = 0.187 + 0.500\gamma^2, \qquad c_1 = 0.25 + \frac{1}{8(1+4\gamma^2)^2}, \qquad c_3 = \frac{1}{2(1+\gamma^2)^2}
$$

$$
h_2 = 0.25 + 0.50\gamma^2, \qquad c_2 = 0.375 + \gamma^2 + 2\gamma^4, \qquad c_4 = 0.50(1+\gamma^2)^2
$$

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\gamma^2}{\pi}\left[0.75 + \frac{1}{24(1+\gamma^2)^2} + \frac{1.33}{(1+4\gamma^2)^2}\right], \qquad e_1 = \frac{\gamma^4}{32}\left[\left(1 + \frac{1}{\gamma^4}\right) + \frac{1}{2(1+\gamma^2)^2}\right] \\
d_2 &= \frac{\gamma^2}{\pi}\left[0.75 + \frac{3.33}{(1+\gamma^2)^2} + \frac{3.66}{(4+\gamma^2)^2} + \frac{1}{(1+4\gamma^2)^2}\right], \qquad e_3 = \frac{\gamma^4}{32}\left(1 + \frac{1}{\gamma^4}\right) \\
e_2 &= \frac{\gamma^4}{32}\left[\frac{60.5}{(4+\gamma^2)^2} + \frac{10}{\gamma^4} + \frac{1}{2(4+9\gamma^2)^2} + 2\left(1 + \frac{1}{\gamma^4}\right)\right] \\
I_{11} &= \frac{1}{32}\left[\frac{3}{2} + \frac{11}{4}\frac{\gamma^4}{(1+\gamma^2)^2}\right], \qquad L_{11} = \frac{\gamma^2}{32}\left[\frac{a_+}{a_0} + \frac{1}{8(1+\gamma^2)^2} + \frac{2}{(1+4\gamma^2)^2}\right] \\
I_{12} &= \frac{1}{32}\left[\frac{21}{2} + \frac{2\gamma^4}{(1+\gamma^2)^2} + \frac{33}{2}\frac{\gamma^4}{(\gamma^2+4)^2}\right] \\
L_{12} &= \frac{\gamma^2}{32}\left[\frac{a_+}{a_0} + \frac{2}{(1+\gamma^2)^2} + \frac{2}{(4+\gamma^2)^2}\right] \\
L_{21} &= \frac{1}{32}\left[\frac{5}{4} + \left(1 - \frac{a_+^2}{a_0^2}\right)\frac{\gamma^2\gamma_1^2}{2} + \frac{\gamma^4}{4(1+\gamma^2)^2} + \frac{\gamma_1^4}{4(1+\gamma_1^2)^2} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{(\gamma_1+\gamma)^4}{16[(\gamma-\gamma_1)^2+1]^2} + \frac{(\gamma-\gamma_1)^4}{16[(\gamma+\gamma_1)^2+1]^2}\right] \\
L_{22} &= \frac{1}{32}\left[3 + \left(1 - \frac{a_+^2}{a_0^2}\right)\frac{\gamma^2\gamma_1^2}{2} + \frac{\gamma_1^4}{(4+\gamma_1^2)^2} + \frac{(2\gamma+\gamma_1)^4}{4[(2\gamma-\gamma_1)^2+4]^2} + \frac{(2\gamma-\gamma_1)^4}{4[(2\gamma+\gamma_1)^2+4]^2}\right] \\
L_{23} &= \frac{1}{32}\left[3 + \left(1 - \frac{a_+^2}{a_0^2}\right)\frac{\gamma^2\gamma_1^2}{2} + \frac{\gamma^4}{(\gamma^2-4)^2} + \frac{(\gamma+2\gamma_1)^4}{4[(\gamma-2\gamma_1)^2+4]^2} + \frac{(\gamma-2\gamma_1)^4}{4[(\gamma+2\gamma_1)^2+4]^2}\right] \\
L_{24} &= \frac{1}{32}\left[4 + \left(1 - \frac{a_+^2}{a_0^2}\right)\frac{\gamma^2\gamma_1^2}{2} + \frac{(\gamma+\gamma_1)^4}{[(\gamma-\gamma_1)^2+4]^2} + \frac{(\gamma-\gamma_1)^4}{[(\gamma-\gamma_1)^2+4]^2}\right]
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Заметим, что полученное уравнение несправедливо при $m = n$ ввиду того, что при его выводе предполагалось $m \neq n$, что значительно упростило выкладки.

Структура уравнения (6) не отличается от структуры соответствующего уравнения для идеальной оболочки. Можно утверждать поэтому, что перестройка волн на поверхности оболочки аналогична потере устойчивости безызгибной формы равновесия у идеальной оболочки, т. е. также происходит с «хлопком».

Отличие состоит в абсолютном значении критических давлений.

Верхнее критическое давление, когда начинается перестройка волн при бесконечно малых возмущениях, как следует из (6), будет

$$q_*^+ = \frac{E\delta}{r}\frac{1}{\alpha^2}\frac{c - a_0L_1 + a_0^2L_2}{h} \tag{9}$$

Нижнее критическое давление, когда перестройка волн становится возможной при наличии конечных возмущений:

$$q_*^- = \frac{E\delta}{r}\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{h}\left[c - a_0L_1 + a_0^2L_2 - \frac{(d - a_0I_1)^2}{4e}\right] \tag{10}$$

Выражение (9) при $a_0 = 0$ и $k = 0$ переходит в известную формулу Мизеса [2].

4. В формулах (9) — (10) неизвестной является величина амплитуды дополнительного прогиба, который приобретает оболочка к моменту начала перестройки волн.

Уравнение для определения a_+ получим из системы (2) — (3), имея в виду (5):

$$ea^3_+ - a_+(d - 3ea^\circ) + a_+(c - a^\circ\overline{d+g} + 2ea^{\circ 2}) - \frac{qr}{E\delta}\alpha^2h(a^\circ + a_+) = 0 \tag{11}$$

где e, d, c, h — те же, что и ранее, но с γ_1 вместо γ и k° вместо k;

$$g = \alpha^2(k^{\circ 3}g_1 + k^\circ g_2)$$

где

$$g_1 = \frac{\gamma^2}{\pi}\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{12(1+\gamma_1^2)^2}\right], \qquad g_2 = \frac{\gamma^2}{\pi}\left[\frac{1}{12} + \frac{3.66}{(4+\gamma^2)^2}\right]$$

Уравнение (11) не имеет нулевых корней, что указывает на наличие изгибной деформации при любых сколь угодно малых давлениях. Заметим, что при величинах амплитуды начальной погиби, меньших

$$a^\circ < \frac{d^3}{27e^2c} = a_*^\circ$$

на равновесной кривой, определяемой уравнением (11), имеют место неустойчивые положения равновесия: оболочка может совершить «хлопок» без изменения формы волнообразования.

Равновесная кривая при деформации оболочки по форме погиби представляет собой огибающую со стороны наименьших давлений кривых, определяемых уравнением (11) и соответствующих значениям параметра k°. Как показывают расчеты, величина a_+ существенно зависит от количества волн погиби и быстро нарастает, если m приближается к значениям n_{*1} и n_{*2}.

5. В таблице приведены результаты числового расчета критических давлений для оболочки с соотношением размеров $r/l = 3$, $100\delta/r = 0{,}65$ ($\nu^2 = 0.030$) для трех значений чисел волн начальной погиби при амплитуде погиби $a^\circ = 0.001$ ($W^\circ / \delta = 0.15$). При вычислении нижнего q_*^- и верхнего q_*^+ критических давлений предполагалось, что все три оболочки получили дополнительный упругий прогиб по форме начальной погиби, соответствующий давлению 24 *ат*, т. е., что в процессе докритического изгиба по m волнам каждая оболочка смогла воспринять 24 *ат*. Затем поверхности оболочки придается отклонение по n волнам с бесконечно малой или конечной амплитудой. Верхние и нижние критические давления, приведенные в таблице, характеризуют нагрузку, способную удержать в равновесии заданное возмущение.

Таблица

m	a°	a_+	k°	q	q^-_*	q^+_*	n_{*1}	n_{*2}, k
9	0.001	0.0035	0.4	24.0	16.6	22.5	14	12) 0.6
13	0.001	0.0125	0.6	24.0	56.0	63.0	14	12) 0.6
18	0.001	0.0050	0.3	24.0	28.1	30.8	14	12) 0.6

Для сравнения укажем, что значения верхней и нижней критических нагрузок для той же оболочки, но при отсутствии начальной погиби равны соответственно: $q_*^+ = 22$ *ат* (при $n = 14$), $q_*^- = 16.2$ *ат* (при $n = 12$, $k = 0.6$). Данные таблицы свидетельствуют о повышении критических давлений оболочки с погибью по сравнению с идеально правильной, особенно, когда число волн близко к n_{*1} и n_{*2}.

В этом случае «хлопок» оболочки может происходить не вследствие перестройки волновой картины, а, как было показано выше, в результате потери устойчивости деформации по форме погиби (если $a^\circ < \overset{\circ}{a}_*$). Сказанное становится понятным, если учесть, что нарастание докритического прогиба оболочки в этом случае наиболее интенсивно и, следовательно, для перестройки волн требуется затратить гораздо бóльшую энергию, чем в том случае, когда число волн погиби отличается от n_{*1} и n_{*2} на 3—4 единицы. Например, по результатам таблицы видно, что при $m = 9$ оболочки не сможет воспринять давление 24 *ат*, деформируясь по форме начальной погиби; гораздо раньше произойдет переход к 12-волновой форме, так как не только нижнее, но и верхнее критическое давление меньше 24 *ат* (22.5 *ат*).

Оболочка с $m = 18$ близка к потере устойчивости по 12 волнам.

Несмотря на то, что приближение числа волн погиби к n_{*1} и n_{*2} ведет к увеличению критических давлений, при которых происходит перестройка волн, что может вообще ликвидировать возможность «хлопка» (если $a^\circ > \overset{\circ}{a}_*$), все же такая погибь является наиболее опасной. Отрицательное ее влияние состоит в быстром нарастании прогибов по форме погиби по мере роста давления. Для высоконапряженных оболочек этот изгиб может приводить к интенсивным пластическим деформациям, не меньшим, чем у идеальной оболочки в результате «хлопка».

Интересно отметить, что погибь с числом волн m, меньшим n_{*1} и n_{*2}, практически не оказывает влияния на критические давления (см. $m = 9$). Этот теоретический вывод подтверждается тем хорошо известным экспериментальным фактом, что при испытаниях в док-камерах оболочек, имеющих обычно двух-, трех- или четырехволновую производственную погибь, потеря устойчивости оболочки в шпации происходит при давлениях, не слишком отличающихся от критических давлений, вычисленных в предположении идеально правильной формы оболочки. Влияние погиби с числом волн, превышающим n_{*1} и n_{*2}, существеннее по причине, с одной стороны, более интенсивного докритического изгиба оболочки, а с другой стороны, из-за роста коэффициентов L_{21} и L_{24}, что указывает на необходимость затраты большей работы при перестройке коротких волн на длинные, чем при обратном процессе.

6. Вычисление критических давлений из (8) и (9) предполагает минимизацию этих выражений по параметрам γ и k, а при вычислении давлений из (4) — по k°. Более правильным является минимизация потенциальной энергии. Однако для коротких цилиндрических оболочек ($r/l > 3$) ввиду небольшой величины прогибов, при которых происходит перестройка волн, ошибка применения принципа минимального давления, как было установлено автором, относительно невелика.

Поступила 28 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности, ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
2. R. von Mises. Der kritische Aussendruck für allseits belastete zylindrische Rohre, Fest zum Geburtstag von A. Stodola, Zürich, 1929.