

Решение для цилиндрической части вала принимает вид:

$$\Psi_2(r, z) = Az + D + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} J_1(s_k r) (B_k \operatorname{sh} s_k z + C_k \operatorname{ch} s_k z) \quad (39)$$

где

$$A = -\frac{2M_1}{\pi GR^4}, \quad D = \frac{2M_1 b}{\pi GR^4} \left(1 + \frac{d_0}{c_0}\right) \quad (40)$$

$$C_p = \frac{M_1}{\pi G c_0 \mu_p R J_1^2(\mu_p)} \left[s_p \operatorname{ch} s_p b \int_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r) dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}} + 3b \operatorname{sh} s_p b \int_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r) dr}{(b^2 + r^2)^{5/2}} \right] \quad (41)$$

$$B_p = -\frac{M_1}{\pi G c_0 \mu R J_1^2(\mu_p)} \left[s_p \operatorname{sh} s_p b \int_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r) dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}} + 3b \operatorname{ch} s_p b \int_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r) dr}{(b^2 + r^2)^{5/2}} \right]$$

Поступила 4 V 1958

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. F ö p p l A. Über die Torsion von runden Stäben mit Veränderlichen Durchmessern, Sitzungsberichte Bayerischer Akademie der Wissenschaften. München, Bd. 35, Berichtigung 504. 1905, 249—262.
2. Г р е й Э., М э т ь ю з Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиноиздат, М., 1953.

ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Б. И. Коган, А. Ф. Хрусталеv

(Харьков)

В работе рассматривается один частный случай смешанной осесимметрической задачи теории упругости, который соответствует напряженному состоянию, возникающему при запрессовке абсолютно жесткого полубесконечного цилиндра в толстостенную трубу (см. фигуру).

Требуется определить функцию напряжений $\chi(r, z)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению в цилиндрической системе координат

$$\nabla^4 \chi = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям на боковых поверхностях трубы

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} r = r_2, & -\infty < z < +\infty \\ r = r_1, & 0 < z < +\infty \end{cases} \quad (2)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} r = r_2, & -\infty < z < +\infty \\ r = r_1, & -\infty < z < +\infty \end{cases} \quad (3)$$

$$u = -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} = u_0 \quad \text{при} \quad r = r_1, \quad -\infty < z < 0 \quad (4)$$

Метод, которым решается поставленная задача, был предложен А. М. Данилевским и И. Г. Альпериним [1], а затем использован в статье [2].

Образум вспомогательное решение уравнения (1)

$$\chi_0(r, z, m) = e^{mz} \varphi(r)$$

где m — комплексный параметр. Согласно [2]

$$\varphi(r) = A J_0(mr) + B m r J_1(mr) + C Y_0(mr) + D m r Y_1(mr) \quad (5)$$

Соотношения между $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ определяются так, чтобы это решение удовлетворяло первому граничному условию (2) и граничным условиям (3):

$$A [n\eta J_0(n\eta) - J_1(n\eta)] + Bn\eta [(2\nu - 1) J_0(n\eta) + n\eta J_1(n\eta)] + \\ + C [n\eta Y_0(n\eta) - Y_1(n\eta)] + Dn\eta [(2\nu - 1) Y_0(n\eta) + n\eta Y_1(n\eta)] = 0 \quad (6)$$

$$AJ_1(n\eta) - B [n\eta J_0(n\eta) + 2(1 - \nu) J_1(n\eta) + CY_1(n\eta)] - \\ - D [n\eta Y_0(n\eta) + 2(1 - \nu) Y_1(n\eta)] = 0 \quad (7)$$

$$AJ_1(\eta) - B [\eta J_0(\eta) + 2(1 - \nu) J_1(\eta)] + CY_1(\eta) - D [\eta Y_0(\eta) + 2(1 - \nu) Y_1(\eta)] = 0 \quad (8)$$

На основании (5), (6), (7), (8) получаем

$$\chi_\rho(\lambda, \rho, \eta) = \frac{r_1^3 e^{\lambda\eta} \Delta_x(\rho, \eta)}{\eta^2 \Delta_r(\eta)} k(\eta) \quad (9)$$

где

$$z = \lambda r_1, \quad r = \rho r_1, \quad mr_1 = \eta, \quad mr_2 = n\eta, \quad n = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Delta_x(\rho, \eta) = \begin{vmatrix} J_0(\rho\eta) & Y_0(\rho\eta) & \rho\eta Y_1(\rho\eta) & -\rho\eta J_1(\rho\eta) \\ J_1(\eta) & Y_1(\eta) & -\Lambda_2[Y(\eta)] & \Lambda_2[J(\eta)] \\ J_1(n\eta) & Y_1(n\eta) & -\Lambda_2[Y(n\eta)] & \Lambda_2[J(n\eta)] \\ \Lambda_1[J(n\eta)] & \Lambda_1[Y(n\eta)] & \Lambda_3[Y(n, \eta)] & -\Lambda_3[J(n\eta)] \end{vmatrix} \quad (10)$$

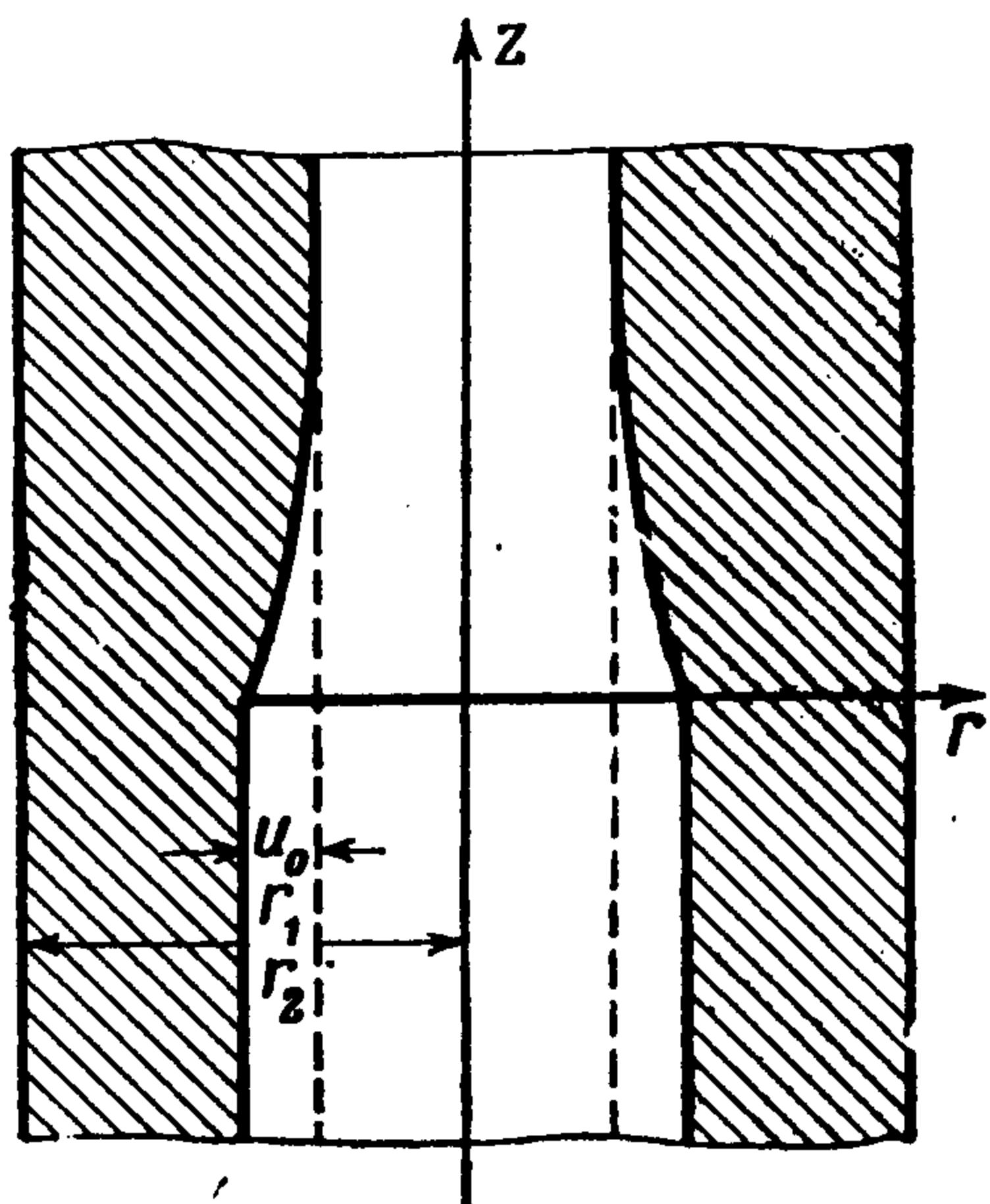
$$\Lambda_1[J(u)] = J_0(u)u - J_1(u), \quad \Lambda_2[J(u)] = 2(1 - \nu)J_1(u) + uJ_0(u)$$

$$\Lambda_3[J(u)] = u[(2\nu - 1)J_0(u) + uJ_1(u)]$$

$$\Delta_r(\rho, \eta) = \begin{vmatrix} -\Lambda_1[J(\rho\eta)] & -\Lambda_1[Y(\rho\eta)] & -\Lambda_3[Y(\rho\eta)] & \Lambda_3[J(\rho\eta)] \\ J_1(\eta) & Y_1(\eta) & -\Lambda_2[Y(\eta)] & \Lambda_2[J(\eta)] \\ J_1(n\eta) & Y_1(n\eta) & -\Lambda_2[Y(n\eta)] & \Lambda_2[J(n\eta)] \\ \Lambda_1[J(n\eta)] & \Lambda_1[Y(n\eta)] & \Lambda_3[Y(n\eta)] & -\Lambda_3[J(n\eta)] \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\Delta_r(\eta) = \Delta_r(1, \eta), \quad k(\eta) = -\frac{B\eta^2 \Delta_r(\eta)}{r_1^3 \Delta} \quad (12)$$

Δ — минор, соответствующий элементу первой строки четвертого столбца определителя (11). Группа элементов определителей (10) и (11) содержит бесселевы функции второго рода, которые имеют логарифмическую особенность в точке $\eta = 0$, однако сами определители будут однозначными функциями.



Это следует из того, что $Y_n(\eta)$ при обходе вокруг начала координат получает приращение $4iJ_n(\eta)$, а рассматриваемые определители получают приращение, которое можно представить в виде суммы определителей с одинаковыми столбцами.

Таким же образом устанавливается однозначность аналогичных определителей, встречающихся в последующих выражениях. Рассматривая η как параметр, образуем интеграл

$$\chi(\rho, \lambda) = \int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} \chi_0(\lambda, \rho, \eta) d\eta \quad (13)$$

который будет решением уравнения (1), если он вместе со своими производными по ρ и λ до четвертого порядка включительно сходится абсолютно и равномерно в области $1 < \rho < n$, $|\lambda| < \infty$. Это решение удовлетворяет первому граничному условию (2) и граничным условиям (3).

Остается так определить функцию $k(\eta)$, чтобы выполнялись второе граничное условие (2) и граничное условие (4). Из (2) и (9) следует, что

$$\sigma_r = -\frac{1}{r_1} \int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} k(\eta) e^{\lambda\eta} d\eta \quad \text{при } \rho = 1, |\lambda| < \infty \quad (14)$$

$$u = \frac{1+\nu}{E} \int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} \psi(\eta) e^{\lambda\eta} d\eta \quad \text{при } \rho = 1, |\lambda| < \infty \quad (15)$$

$$\Delta_u(\rho, \eta) = \begin{vmatrix} -J_1(\rho\eta) & -Y_1(\rho\eta) & \rho\eta Y_0(\rho\eta) & -\rho\eta J_1(\rho\eta) \\ J_1(\eta) & Y_1(\eta) & -\Lambda_2[Y(\eta)] & \Lambda_2[J(\eta)] \\ J_1(n\eta) & Y_1(n\eta) & -\Lambda_2[Y(n\eta)] & \Lambda_2[J(n\eta)] \\ \Lambda_1[J(n\eta)] & \Lambda_1[Y(n\eta)] & \Lambda_3[Y(n\eta)] & -\Lambda_3[J(n\eta)] \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$\Delta_u(\eta) = \Delta_u(1, \eta)$$

Граничное условие (14) обращается во второе граничное условие (2), если $k(\eta)$ регулярна в области $\text{Re}(\eta) \leq 0, \eta \neq 0$ и удовлетворяет в этой области требованиям леммы Жордана. Граничное условие (15) обращается в граничное условие (4), когда

$$\psi(\eta) = k(\eta) \frac{\Delta_u(\eta)}{\Delta_r(\eta)} \quad (17)$$

регулярна в области $\text{Re}(\eta) \geq 0, \eta \neq 0$ и удовлетворяет в этой области требованиям леммы Жордана. В начале координат $\psi(\eta)$ должна иметь простой полюс с вычетом

$$\text{res}[\psi(\eta)]|_{\eta=0} = -\frac{Eu_0}{2\pi i(1+\nu)}, \quad \text{res}[k(\eta)]|_{\eta=0} = -\frac{Eu_0(n^2-1)}{2\pi i[1-\nu+n^2(1+\nu)]}$$

Для построения функции $k(\eta)$, следуя И. Г. Альперину [1], образуем бесконечное произведение

$$\Pi(\eta) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\eta/a_k)(1-\eta/\bar{a}_k)}{(1-\eta/b_k)(1-\eta/\bar{b}_k)} \quad (18)$$

где a_k и \bar{a}_k — корни уравнения $\Delta_r(\eta) = 0$, расположенные в правой полуплоскости, а b_k и \bar{b}_k — корни уравнения $\Delta_u(\eta) = 0$, расположенные в правой полуплоскости.

Исследуя $\Pi(\eta)$ на бесконечности приемом, который был применен И. Г. Альпериным [1] и повторен в работе [2], получим

$$\Pi(\eta) \approx [1+O(1)] \sqrt{-\eta \frac{1-\nu+n^2(1+\nu)}{2(1-\nu^2)(n^2-1)}} \quad (19)$$

Теперь легко установить, что

$$k(\eta) = -\frac{Eu_0(n^2-1)}{2\pi i[1-\nu+n^2(1+\nu)]} \frac{\Pi(\eta)}{\eta} \quad (20)$$

удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям, а функция

$$\chi(\rho, \lambda) = \frac{Eu_0(n^2-1)r_1^2}{2\pi i[1-\nu+n^2(1+\nu)]} \int \frac{\Pi(\eta)}{\eta^3} \frac{\Delta_\chi(\rho, \eta)}{\Delta_r(\eta)} e^{\lambda\eta} d\eta \quad (21)$$

является решением рассматриваемой граничной задачи. Предельные значения компонент тензора напряжений при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ находим аналогично [2]:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sigma_r &= 0, & \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} u \sigma_r &= \frac{Eu_0}{r_1[1-\nu+n^2(1+\nu)]} \frac{\rho^2-n^2}{\rho^2}, & \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \sigma_z &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sigma_\theta &= 0, & \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \sigma_\theta &= \frac{Eu_0}{r_1[1-\nu+n^2(1+\nu)]} \frac{\rho^2+n^2}{\rho^2}, & \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \sigma_{rz} &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u &= 0, & \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} u &= \frac{u_0[(1+\nu)n^2+(1-\nu)\rho^2]}{\rho[1-\nu+n^2(1+\nu)]} \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, что напряженное состояние толстой трубы при $\lambda \rightarrow -\infty$ становится плоским, соответствующим задаче Ляме для граничных условий $u = u_0$ при $r = r_1$ и $\sigma_2 = 0$ при $r = r_2$.

В заключение найдем концентрации радиального напряжения и характер излома боковой поверхности трубы $\rho = 1$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Рассмотрим выражение (14) для σ_r при $\rho = 1$

$$\sigma_r = \frac{Eu_0(n^2 - 1)}{2\pi i r_1 [1 - \nu + n^2(1 + \nu)]} \int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} \frac{\Pi(\eta)}{\eta} e^{\lambda\eta} d\eta$$

Положим $|\lambda|\eta = \nu$, $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Eu_0(n^2 - 1)}{2\pi i [1 - \nu + n^2(1 + \nu)]} \int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} \Pi\left(\frac{\nu}{|\lambda|}\right) \frac{e^{-\nu}}{\nu} d\nu = \\ &= \frac{Eu_0(n^2 - 1)}{2\pi i [1 - \nu + n^2(1 + \nu)]} \int_C \Pi\left(\frac{\nu}{|\lambda|}\right) \frac{e^{-\nu}}{\nu} d\nu \end{aligned}$$

Контур интегрирования C состоит из мнимой оси с симметрично выключенным отрезком длины $2a$, который заменен дугой полуокружности радиуса a , расположенной в области $\operatorname{Re} \nu < 0$.

Так как $|\nu| \geq a$ всюду на C , то при достаточно малом λ отношение $|\nu|/|\lambda|$ может быть сделано сколь угодно большим. Воспользовавшись асимптотическим представлением $\Pi(\eta)$ (19), найдем выражение для σ_r , пригодное при $\rho = 1$ для малых $\lambda < 0$:

$$\sigma_r = - \frac{Eu_0(n^2 - 1)}{2\pi i r_1 \sqrt{2|\lambda|(1 - \nu^2)(n^2 - 1)[1 - \nu + n^2(1 + \nu)]}} \int_C \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{-\nu}} d\nu$$

В работе [2] показано, что

$$\int_C \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{-\nu}} d\nu = 2i \sqrt{\pi}$$

Следовательно,

$$\sigma_r \approx - \frac{Eu_0(n^2 - 1)}{r_1 \sqrt{2\pi|\lambda|(1 - \nu^2)(n^2 - 1)[1 - \nu + n^2(1 + \nu)]}} \quad (22)$$

Аналогично находим выражение для u , пригодное при малом $\lambda > 0$ и $\rho = 1$:

$$u = u_0 - 2u_0 \sqrt{\frac{2\lambda(1 - \nu^2)(n^2 - 1)}{\pi[1 - \nu + n^2(1 + \nu)]}} \quad (23)$$

Предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ получается решение для внешности цилиндра.

Поступила 21 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. А л ь п е р и н И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой на половине длины. Записки Научно-исслед. ин-та математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества, т. XX, 1950.
2. К о г а н Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.