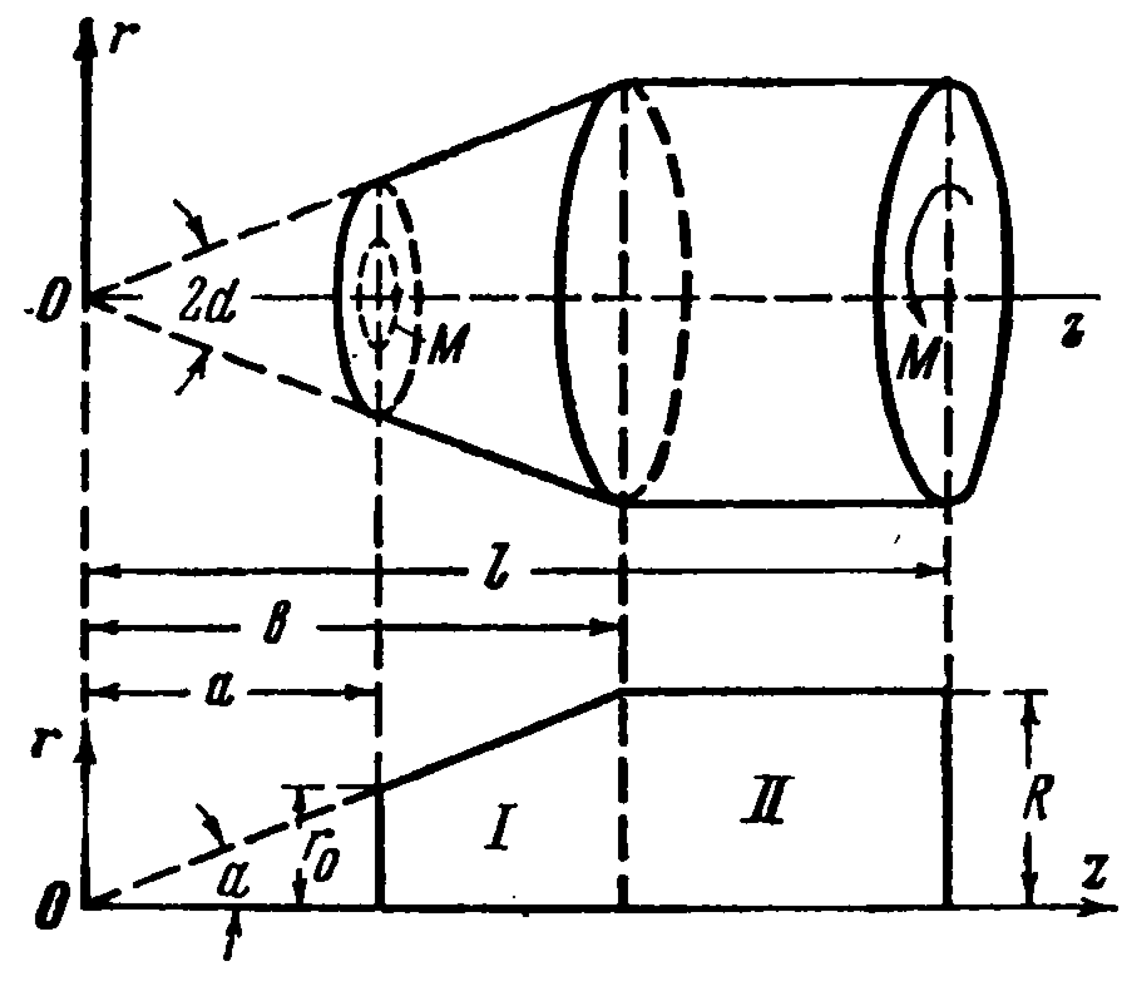
Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

# О КРУЧЕНИИ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВАЛА С КОНИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

Б. Л. Абрамян
(Ереван)

Рассмотрим вал переменного сечения, имеющий форму круглого усеченного конуса с углом растворения $2\alpha$ в одной части и круглого цилиндра в другой части см. фигуру).




Известно, что задача кручения вала переменного сечения сводится по А. Феплю [1] к отысканию функции перемещения $\Psi(r, z)$, удовлетворяющей в области осевого сечения вала уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Через функцию $\Psi(r, z)$ напряжения $\tau_{\varphi r}$, $\tau_{\varphi z}$ и перемещение $v$ определяются формулами

$$\tau_{\varphi r} = Gr\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \qquad \tau_{\varphi z} = Gr\frac{\partial\Psi}{\partial z} \tag{2}$$

$$v = r\Psi(r, z) \tag{3}$$

где $G$ — модуль сдвига.

Пусть вал скручивается крутящим моментом $M_1$, приложенным на торце конической части, и произвольной нагрузкой, приложенной на боковой поверхности и торце цилиндрической части.

Боковую поверхность конической части вала предполагаем свободной от внешней нагрузки.

Так как боковая поверхность конической части свободна от нагрузки, то на этой поверхности проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения вала равна нулю. Это условие можно записать в виде

$$\frac{\tau_{\varphi r}}{\tau_{\varphi z}} = \frac{r}{z} = \operatorname{tg}\alpha \tag{4}$$

Сумма моментов всех касательных напряжений относительно оси вала в торце $z = a$ равна крутящему моменту $M_1$:

$$M_1 = -\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r^2\tau_{\varphi z}(r, a)\,dr\,d\varphi \tag{5}$$

Условия на боковой поверхности и торце цилиндрической части выразятся равенствами

$$\tau_{\varphi r}(R, z) = f_1(z), \qquad \tau_{\varphi z}(r, l) = f_2(r) \tag{6}$$

где функции $f_1(z)$ и $f_2(r)$ кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

Решение ищем в виде

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \Psi_1(r, z) & \text{в области } I, \text{ где } a \leqslant z \leqslant b \\ \Psi_2(r, z) & \text{в области } II, \text{ где } b \leqslant z \leqslant l \end{cases} \quad (7)$$

При этом на линии контакта областей $I$ и $II$ должны быть выполнены условия сопряжения

$$\Psi_1(r, b) = \Psi_2(r, b) \qquad \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right)_{z=b} = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right)_{z=b} \quad (8)$$

Функции $\Psi_1(r, z)$ и $\Psi_2(r, z)$ берем в виде

$$\Psi_1(r, z) = \frac{C}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\Psi_2(r, z) = Az + B(4z^2 - r^2) + D + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k (z - b) +$$

$$+ \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} J_1(s_k r)(B_k \operatorname{sh} s_k z + C_k \operatorname{ch} s_k z) \quad (10)$$

где $\lambda_k = k\pi / l - b$, $s_k = \mu_k / R$, $\mu_k$ — корни уравнения

$$J_2(x) = 0 \quad (11)$$

$J_i(x)$ — функции Бесселя $i$-го порядка первого рода с действительным аргументом, $I_i(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента [2].

Решение (9) для конического стержня было дано А. Феппле м [1].

Пользуясь соотношениями (2), (9) и (10), для напряжений получим следующие выражения.

Для конической части вала

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, z) = -3CG\frac{rz}{(z^2 + r^2)^{5/2}}, \qquad \tau_{\varphi r}^{(1)}(r, z) = -3CG\frac{r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \quad (12)$$

Для цилиндрической части вала

$$\tau_{\varphi z}^{(2)}(r, z) = G\left\{Ar + 8Brz - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k (z - b) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{R} J_1(s_k r)(B_k \operatorname{ch} s_k z + C_k \operatorname{sh} s_k z)\right\} \quad (13)$$

$$\tau_{\varphi r}^{(2)}(r, z) = G\left\{-2Br^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k I_2(\lambda_k r) \cos \lambda_k (z - b) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{R} J_2(s_k r)(B_k \operatorname{sh} s_k z + C_k \operatorname{ch} s_k z)\right\} \quad (14)$$

Легко видеть, что выражениями (12) условие (4) на боковой поверхности конической части вала удовлетворяется тождественно.

Удовлетворив условию (5), получим

$$C = \frac{M_1}{2G\pi c_0} \quad (-c_0 = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2) \quad (15)$$

Второе из условий (6) дает

$$A + 8Bl = \frac{2M_2}{\pi G R^4} \qquad \left(M_2 = 2\pi\int_0^R r^2 \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, l)\, dr = 2\pi\int_0^R r^2 f_2(r)\, dr\right) \quad (16)$$

Здесь использовано значение интеграла

$$\int_0^R r^2 J_1(s_k r)\,dr = 0 \tag{17}$$

Первое из условий (6) дает

$$G\left\{-2BR^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k I_2(\lambda_k R)\cos\lambda_k (z-b)\right\} = f_1(z) \tag{18}$$

Введя обозначения

$$a_0 = \frac{1}{l-b}\int_b^l f_1(z)\,dz, \qquad a_k = \frac{2}{l-b}\int_b^l f_1(z)\cos\lambda_k (z-b)\,dz \tag{19}$$

из (18) получим

$$B = -\frac{a_0}{2GR^2}, \qquad A_k = \frac{a_k}{G\lambda_k I_2(\lambda_k R)} \tag{20}$$

Удовлетворив первому из условий (8), будем иметь

$$\frac{Cr}{(b^2+r^2)^{3/2}} = (Ab + 4Bb^2 + D)\,r - Br^3 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(\lambda_k r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} J_1(s_k r)(B_k \operatorname{sh} s_k b + C_k \operatorname{ch} s_k b) \tag{21}$$

Умножив (21) на $r^2$ и интегрируя по $r$ в пределах от нуля до $R$, получим

$$Cbd_0 = D\frac{R^4}{4} + Ab\frac{R^4}{4} + BR^4\left(b^2 - \frac{R^2}{6}\right) + R^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k I_2(\lambda_k R)}{\lambda_k} \tag{22}$$

где введено обозначение

$$d_0 = \frac{1}{b}\int_0^R \frac{r^3 dr}{(b^2+r^2)^{3/2}} = \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha} \tag{23}$$

и использовано значение интеграла

$$\int_0^R r^2 I_1(\lambda_k r)\,dr = \frac{R^2 I_2(\lambda_k R)}{\lambda_k} \tag{24}$$

Умножив (21) на $rJ_1(s_p r)$ и интегрируя полученное соотношение по $r$ в тех же пределах, получим

$$C\int_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{3/2}} = -2B\frac{R^5 J_1(\mu_p)}{\mu_p^2} + R^3 J_1(\mu_p)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k\lambda_k I_2(\lambda_k R)}{\mu_p^2 + \lambda_k^2 R^2} +$$

$$+ \frac{R^2 J_1^2(\mu_p)}{2}(B_p \operatorname{sh} s_p b + C_p \operatorname{ch} s_p b) \tag{25}$$

При этом использованы значения

$$\int_0^R r^4 J_1(s_p r)\,dr = \frac{2R^5}{\mu_p^2}J_1(\mu_p)$$

$$\int_0^R rI_1(\lambda_k r)\,J_1(s_p r)\,dp = \frac{\lambda_k R^3 I_2(\lambda_k R)\,J_1(\mu_p)}{\mu_p^2 + \lambda_k^2 R^2} \tag{26}$$

$$\int_0^R rJ_1(s_k r)\,J_1(s_p r)\,dr = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq p \\ {}^1/_2 R^2 J^2_1(\mu_p) & \text{при } k = p \end{cases} \tag{27}$$

Аналогичным образом второе условие из (8) дает

$$A + 8Bb = -\frac{4Cc_0}{R^4} \tag{28}$$

$$3Cb\int\limits_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{5/2}} = \frac{\mu_p R J_1^2(\mu_p)}{2}(B_p \operatorname{ch} s_p b + C_p \operatorname{sh} s_p b) \tag{29}$$

где использованы значения (17), (15) и (28).

Из соотношений (15), (16), (20) и (28) следует, что

$$\frac{M_2+M_1}{2\pi(l-b)R^2} + a_0 = 0 \tag{30}$$

которое является уравнением равновесия сил, скручивающих вал.

Из соотношений (22) и (16), учитывая значения (20) и (15), получим

$$A = -2\frac{M_1 l + M_2 b}{\pi G(l-b)R^4} \tag{31}$$

$$D = \frac{M_2(b^2 + {}^1/_6 R^2) + M_1(2lb - b^2 + {}^1/_6 R^2)}{\pi G(l-b)R^4} - \frac{4}{GR^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^2} + \frac{2M_1 d_0 b}{\pi G c_0 R^4} \tag{32}$$

А из (25) и (29) найдем

$$C_p = N_p \operatorname{ch} s_p b - M_p \operatorname{sh} s_p b, \qquad B_p = M_p \operatorname{ch} s_p b - N_p \operatorname{sh} s_p b \tag{33}$$

где

$$M_p = -\frac{-3bM_1}{\pi G c_0 \mu_p R J_1^2(\mu_p)}\int\limits_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{5/2}} \tag{34}$$

$$N_p = \frac{M_1}{\pi G c_0 R^2 J_1^2(\mu_p)}\int\limits_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{M_2+M_1}{\pi G(l-b)R\mu_p^2 J_1(\mu_p)} - \frac{2R}{GJ_1(\mu_p)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\mu_p^2 + \lambda_k^2 R^2} \tag{35}$$

Подставляя найденные значения для коэффициентов в формулы (2) и (3), определим напряжения $\tau_{\varphi r}$, $\tau_{\varphi z}$ и перемещение $v$.

Интегралы, входящие в выражения (34) и (35), можно вычислить, представляя их в виде рядов. Например, для интеграла

$$\int \frac{x^2 J_1(sx)\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}$$

интегрируя его по частям, получим

$$\int \frac{x^2 J_1(xs)\,dx}{(b^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{xJ_1(sx)}{(x^2+b^2)^{1/2}} + s\int \frac{xJ_0(sx)\,dx}{(x^2+b^2)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{xJ_1(sx)}{(x^2+b^2)^{1/2}} + s(x^2+b^2)^{1/2} J_0(sx) + s^2\int (x^2+b^2)^{1/2} J_1(sx)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k (x^2+b^2)^{k-1/2}(2k+1)}{(2k+1)!!}\,\frac{J_{k-1}(sx)}{x^{k-1}} \tag{36}$$

Аналогичным образом

$$\int \frac{x^2 J_1(sx)\,dx}{(b^2+x^2)^{5/2}} = -\frac{xJ_1(xs)}{3(x^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^{k+1}(x^2+b^2)^{k-1/2}(2k+1)}{(2k+1)!!}\,\frac{J_k(sx)}{x^k} \tag{37}$$

В частном случае, когда вся боковая поверхность свободна от напряжений, имеем

$$a_0 = a_k = 0, \qquad M_1 = -M_2 \tag{38}$$

Решение для цилиндрической части вала принимает вид:

$$\Psi_2(r, z) = Az + D + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} J_1(s_k r)(B_k \operatorname{sh} s_k z + C_k \operatorname{ch} s_k z) \tag{39}$$

где

$$A = -\frac{2M_1}{\pi G R^4}, \qquad D = \frac{2M_1 b}{\pi G R^4}\left(1 + \frac{d_0}{c_0}\right) \tag{40}$$

$$C_p = \frac{M_1}{\pi G c_0 \mu_p R J_1^2(\mu_p)}\left[s_p \operatorname{ch} s_p b \int\limits_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{3/2}} + 3b \operatorname{sh} s_p b \int\limits_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{5/2}}\right] \tag{41}$$

$$B_p = -\frac{M_1}{\pi G c_0 \mu R J_1^2(\mu_p)}\left[s_p \operatorname{sh} s_p b \int\limits_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{3/2}} + 3b \operatorname{ch} s_p b \int\limits_0^R \frac{r^2 J_1(s_p r)\,dr}{(b^2+r^2)^{5/2}}\right]$$

Поступила 4 V 1958

Институт математики и механики
АН Армянской СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Föppl A. Über die Torsion von runden Stäben mit Veränderlichen Durchmessern, Sitzungsberichte Bayerischer Akademie der Wissenschaften. München, Bd. 35, Berichtigung 504. 1905, 249—262.
2. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиноиздат, М., 1953.

---

# ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Б. И. Коган, А. Ф. Хрусталев

(Харьков)

В работе рассматривается один частный случай смешанной осесимметрической задачи теории упругости, который соответствует напряженному состоянию, возникающему при запрессовке абсолютно жесткого полубесконечного цилиндра в толстостенную трубу (см. фигуру).

Требуется определить функцию напряжений $\chi(r, z)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению в цилиндрической системе координат

$$\nabla^4\chi = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям на боковых поверхностях трубы

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\right) = 0 \quad \text{при} \begin{cases} r = r_2, & -\infty < z < +\infty \\ r = r_1, & 0 < z < +\infty \end{cases} \tag{2}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right] = 0 \quad \text{при} \begin{cases} r = r_2, & -\infty < z < +\infty \\ r = r_1, & -\infty < z < +\infty \end{cases} \tag{3}$$

$$u = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z} = u_0 \quad \text{при} \quad r = r_1, \quad -\infty < z < 0 \tag{4}$$

Метод, которым решается поставленная задача, был предложен А. М. Данилевским и И. Г. Альпериным [1], а затем использован в статье [2].

Образуем вспомогательное решение уравнения (1)

$$\chi_0(r, z, m) = e^{mz}\varphi(r)$$

где $m$ — комплексный параметр. Согласно [2]

$$\varphi(r) = AJ_0(mr) + BmrJ_1(mr) + CY_0(mr) + DmrY_1(mr) \tag{5}$$