Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРАНДТЛЯ О СЖАТИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ДВУМЯ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Д. Д. Ивлев
(Москва)

Отыскание замкнутых частных решений в теории идеальной пластичности представляет несомненный интерес. Ряд таких решений для случая плоской задачи был указан и исследован Л. Прандтлем, А. Надаи, Г. Генки, К. Каратеодори и Е. Шмидтом, С. Л. Соболевым, С. Г. Михлиным, В. В. Соколовским, Р. Хиллом и другими. Эти решения приведены, например, в монографиях [1—3].

Ниже рассмотрены некоторые частные решения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условиях пластичности Мизеса и Треска — Сен-Венана и ассоциированными с ними законами пластического течения.

Отметим, что подробное исследование частных решений осесимметричной задачи, описывающих пластическое напряженное состояние в сходящемся канале, принадлежит В. В. Соколовскому [1] и Р. Шилду [4—5].

1. Уравнения осесимметричной задачи в цилиндрических координатах при условии пластичности Мизеса имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \tag{1.1}$$

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6\tau_{\rho z} = 6 \tag{1.2}$$

$$\dot\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial\rho} = \lambda(2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_z) \qquad \dot\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} = \lambda(2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_\rho)$$

$$\dot\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda(2\sigma_z - \sigma_\rho - \sigma_\theta), \qquad 2\gamma_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial\rho} = 6\tau_{\rho z} \tag{1.3}$$

где все величины полагаются безразмерными: компоненты напряжения отнесены к постоянной, стоящей в правой части условия пластичности, координаты — к некоторой характерной длине, скорости перемещений — к некоторой характерной скорости.

I. Простейшее частное решение может быть указано при $\tau_{\rho z} = w = 0$. В этом случае имеет место хорошо изученное осесимметричное напряженное состояние при плоской деформации.

II. Р. Хилл [3] показал, что компоненты напряжений и скоростей перемещений, удовлетворяющие соотношениям (1.1) — (1.3), могут иметь вид:

$$\tau_{\rho z} = \rho, \quad \sigma_\rho = \sigma_\theta = -2z + C_1, \quad \sigma_z = -2z - \mu_1\sqrt{3(1-\rho^2)} + C_1 \tag{1.4}$$

$$u = -\rho, \qquad w = 2z + 2\sqrt{3}\mu_1\sqrt{1-\rho^2} + C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные, $\mu_1 = \operatorname{sign}(\sigma_\rho - \sigma_z)$.

Р. Хилл применил это решение для изучения выдавливания пластического материала из сжимающейся шероховатой цилиндрической втулки и заметил, что это решение аналогично циклоидальному решению Л. Прандтля для массы, сжатой между шероховатыми плитами.

III. Можно указать решение, также аналогичное циклоидальному решению Л. Прандтля, соответствующее сдавливанию пластического материала расширяющейся шероховатой цилиндрической трубой. В самом деле, положим

$$\tau_{\rho z} = \frac{1}{\rho}, \qquad u = \frac{1}{\rho} \tag{1.5}$$

Тогда из соотношений (1.3) следует, что

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta)$$

и условие пластичности (1.2) примет вид:

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4 \tag{1.6}$$

Из (1.6) и (1.5) получим

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = 2\mu_2 \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}, \qquad \mu_2 = \operatorname{sign}(\sigma_\rho - \sigma_\theta) \tag{1.7}$$

Подставляя выражение (1.7) в первое из уравнений равновесия (1.1), получим, что

$$\sigma_\rho = 2\mu_2 \left[\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} - \ln(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \right] + f(z) \tag{1.8}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_\theta = -2\mu_2 \ln(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) + f(z) \tag{1.9}$$

Из второго уравнения равновесия (1.1) и (1.5) найдем, что

$$\sigma_z = \varphi(\rho)$$

поэтому в соотношениях (1.8) и (1.9) следует положить $f(z) = C_1$.

Очевидно, что

$$\sigma_z = \mu_2 \left[\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} - 2\ln(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \right] + C_1$$

Определим скорость перемещения w. Взяв отношение второго и четвертого уравнений (1.3), после интегрирования получим

$$w = -2\mu_2 \arccos\frac{1}{\rho} + C_2$$

IV. Наиболее общим аналогом циклоидального решения Л. Прандтля для осесимметричной задачи является решение, содержащее в себе как частные случаи решения, приведенные в II и III. Положим

$$\tau_{\rho z} = m_1\rho + \frac{m_2}{\rho}, \qquad u = n_1\rho + \frac{n_2}{\rho} \tag{1.10}$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 — постоянные.

Два первых уравнения (1.3) запишутся в виде

$$n_1 - \frac{n_2}{\rho^2} = \lambda(2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_z), \qquad n_1 + \frac{n_2}{\rho^2} = \lambda(2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_\rho)$$

откуда легко получить

$$\sigma_z = \frac{3n_1\rho^2}{2n_2}(\sigma_\rho - \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta) \tag{1.11}$$

Подставляя выражение (1.11) в условие пластичности (1.2), получим, что

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \frac{2\mu_2 n_2}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}{n_2^2 + 3n_1^2\rho^4}} \tag{1.12}$$

Из (1.10), (1.12) и первого уравнения (1.1) определим

$$\sigma_\rho = -2\mu_2 n_2 \int \sqrt{\frac{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}{n_2^2 + 3n_1^2\rho^4}} \frac{d\rho}{\rho^2} + f_1(z) \tag{1.13}$$

$$\sigma_\theta = -2\mu_2 n_1 \int \sqrt{\frac{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}{n_2^2 + 3n_1^2\rho^4}} \frac{d\rho}{\rho^2} - \frac{2\mu_2 n_2}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}{n_2^2 + 3n_1^2\rho^4}} + f_1(z)$$

Из (1.10) и второго уравнения (1.1) найдем, что

$$\sigma_z = -2m_1 z + \varphi_1(\rho) \qquad (1.14$$

Используя выражения (1.11) — (1.14), получим, что

$$\sigma_z = -2m_1 z + \mu_2 \left(3n_1\rho - \frac{n_2}{\rho}\right) \sqrt{\frac{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}{n_2^2 + 3n_1^2\rho^4}} -$$

$$- 2\mu_2 n_2 \int \sqrt{\frac{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}{n_2^2 + 3n_1^2\rho^4}} \frac{d\rho}{\rho^2} + C_1$$

$$f_1(z) = -2m_1 z + C_1$$

Взяв отношение второго и четвертого уравнений (1.3), получим

$$w = 6 \int \frac{\tau_{\rho z} u \, d\rho}{\rho\,(2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_\rho)} + f_2(z) \tag{1.15}$$

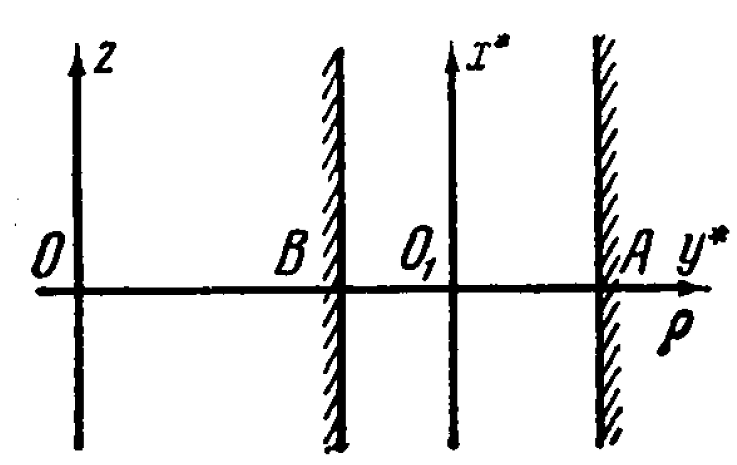
С другой стороны, из уравнения несжимаемости следует, что

$$w = -2n_1 z + \varphi_2(\rho) \tag{1.16}$$

Сравнивая выражения (1.15) и (1.16), найдем, что

$$f_2(z) = 2n_1 z + C_2$$

Полученное решение соответствует сдавливанию пластического цилиндрического слоя шероховатыми коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Подобный процесс штамповки является гипотетическим, однако если рассматривать цилиндры достаточно большого радиуса, то пластический материал будет находиться приблизительно в условиях сжатия двумя параллельными цилиндрическими поверхностями.



Фиг. 1

Для дальнейшего удобно перейти к системе координат x^*, y^*, z^*, располагая ось z^* перпендикулярно плоскости x^*y^*. Имеем на фигуре

$$OO_1 = R, \quad AO_1 = h_1, \quad BO_1 = h_2, \quad AB = 2h, \quad x^* = z, \quad y^* = \rho - R$$

За характерный линейный размер выберем величину h, сохраним обозначения для безразмерных величин R, h_1, h_2 и опустим звездочки наверху у координат x^*, y^*, z^*.

Предположим, что на поверхностях касательное напряжение τ_{xy} принимает максимальные значения, тогда

$$m_1(R + h_1) + \frac{m_2}{R + h_1} = -1, \qquad m_1(R - h_2) + \frac{m_2}{R - h^2} = 1 \quad (1.17$$

Значение величины R определим из условия

$$m_1 R + \frac{m_2}{R} = 0 \tag{1.18}$$

Из уравнений (1.17) и (1.18) получим

$$m_1 = -\frac{1}{2}, \qquad m_2 = \frac{R^2}{2}, \qquad R = \frac{h_1 h_2}{h_1 - h_2} \tag{1.19}$$

Предполагая, что радиус наружной поверхности уменьшается с единичной скоростью, а радиус внутренней увеличивается с той же скоростью, аналогично получим

$$n_1 = -\frac{1}{2}, \qquad n_2 = \frac{1}{2} R^2 \tag{1.20}$$

Рассмотрим случай достаточно большого радиуса R. Полагая $\delta = 1/R$, пренебрежем величинами, содержащими члены при степенях δ^2 и выше. Положив $h_1 = 1 + \delta_1$, $h_2 = 1 - \delta_1$, из (1.19) найдем, что $\delta_1 = {}^1/_2\,\delta h^2$. Упрощая соотношения (1.11) — (1.15), получим

$$\tau_{xy} = -y - \delta\frac{y^2}{2}$$

$$\sigma_x = x - 2\mu_2\sqrt{1-y^2} + \frac{\mu_2\delta}{2}\left[\arcsin y + \frac{y(1-3y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\right] + C_1$$

$$\sigma_y = x + \frac{\mu^2\delta}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y\right) + C_1$$

$$\sigma_z = x - \mu_2\sqrt{1-y^2} + \frac{\mu^2\delta}{2}\left[\arcsin y + \frac{y(4-5y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\right] + C_1$$

$$u = -y + \delta\frac{y^2}{2}, \qquad w = x + \mu_2\delta\left[3\arcsin y - \frac{y(3-2y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\right] + C_2$$

При $\delta = 0$, $\mu_2 = -1$ получим соотношения, данные Л. Прандтлем. Легко определить уравнения линий скольжения, отождествляя их с линиями действия максимальных касательных усилий.

2. При использовании условия пластичности Треска-Сен-Венана ограничимся рассмотрением случая, когда пластическое напряженное состояние соответствует ребру призмы, интерпретирующей в пространстве главных напряжений условие пластичности Треска-Сен-Венана; другими словами, будем предполагать выполнение условия полной пластичности.

Справедливость этого допущения обоснована построением полных решений задач.

Условие пластичности будет иметь вид:

$$\frac{1}{4}(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + \tau_{\rho z}{}^2 = 1, \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + 1 \tag{2.1}$$

Для определения поля скоростей будем иметь уравнения

$$\dot\varepsilon_\rho + \dot\varepsilon_\theta + \dot\varepsilon_z = 0, \qquad \frac{\dot\varepsilon_\rho - \dot\varepsilon_z}{\sigma_\rho - \sigma_z} = \frac{\dot\gamma_{\rho z}}{\tau_{\rho z}} \tag{2.2}$$

Уравнения, определяющие пластическое напряженное состояние при условии полной пластичности, являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Известно, что если сделать замену переменных

$$\sigma_\rho = \omega + \sin 2\psi, \qquad \sigma_z = \omega - \sin 2\psi, \qquad \tau_{\rho z} = \cos 2\psi$$

то уравнения характеристик исходных уравнений (1.1), (2.1) имеют вид:

$$d\rho - \operatorname{tg}\psi\, dz = 0, \qquad d\rho + \operatorname{ctg}\psi\, dz = 0 \tag{2.3}$$

причем характеристики совпадают с линиями скольжения (линиями максимальных сдвигов).

Так как

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\psi}{1+\cos 2\psi}}$$

то уравнения (2.3) можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{dz} = \sqrt{\frac{1-\tau_{\rho z}}{1+\tau_{\rho z}}}, \qquad \frac{d\rho}{dz} = -\sqrt{\frac{1+\tau_{\rho z}}{1-\tau_{\rho z}}} \tag{2.4}$$

I. Простейшее решение в этом случае принадлежит Г. Генки [6], положившему начало применению условия полной пластичности в теории идеальной пластичности:

$$\tau_{\rho z} = 0, \qquad \sigma_\rho = (1-\mu_1)\ln\rho + C_1$$

$$\sigma_z = (1-\mu_1)\ln\rho - 2\mu_1 + C_1 \tag{2.5}$$

Уравнения (2.2) для определения скоростей перемещений принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$$

Характеристиками в этом случае являются прямые линии

$$\rho + z = \text{const}$$

Покажем, что решение (2.5) не может быть применено для изучения напряженного состояния толстостенной трубы при плоской деформации.

Рассмотрим приращение работы напряжений на приращениях пластических деформаций:

$$dA = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3$$

Если имеет место условие полной пластичности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2$, то $dA = \mp 2 d\varepsilon_3$ и, следовательно, условие полной пластичности может быть использовано лишь при $\varepsilon_3 \neq \text{const}$. Поэтому следует ожидать, что условие полной пластичности будет давать хорошие результаты в случаях, когда напряженное состояние существенно отличается от плоского деформированного состояния.

II. Рассмотрим решение, аналогичное решению Р. Хилла, приведенное выше в II п. 1.

Положим

$$\tau_{\rho z} = \rho, \qquad u = -\rho$$

Тогда

$$\sigma_\rho - \sigma_z = 2\mu_1\sqrt{1-\rho^2}, \qquad \sigma_\rho - \sigma_\theta = \mu_1\sqrt{1-\rho^2} - 1$$

Легко найти, что

$$\sigma_\rho = -2z - \mu_1\left[\sqrt{1-\rho^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right] + \ln\rho + C_1$$

$$\sigma_z = -2z + \mu_1\left[3\sqrt{1-\rho^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right] + \ln\rho + C_1$$

$$w = -2z - \mu_1\left[\sqrt{1-\rho^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right] + \ln\rho + C_2$$

Уравнения характеристик запишутся в виде

$$z = -\sqrt{1-\rho^2} + 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} + \text{const}$$

$$z = -\sqrt{1-\rho^2} - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} + \text{const}$$

III. Предположим, что

$$\tau_{\rho z} = \frac{1}{\rho}, \quad u = -\frac{1}{\rho}$$

Легко определить, что в этом случае компоненты напряжений, удовлетворяющие уравнениями (1.1) и (2.1), будут иметь вид:

$$\sigma_\rho = -\mu_1\left[\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}} - \ln\left(\rho + \sqrt{\rho^2-1}\right)\right] + \ln\rho + C_1$$

$$\sigma_z = \mu_1\left[\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}} + \ln\left(\rho + \sqrt{\rho^2-1}\right)\right] + \ln\rho + C_1$$

Далее легко получить, что

$$w = -\mu_2\left[\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}} - \ln\left(\rho + \sqrt{\rho^2-1}\right)\right] + C_2$$

Уравнения характеристик

$$z = \pm\sqrt{\rho^2-1} + \ln\left(\rho + \sqrt{\rho^2-1}\right) + \text{const}$$

IV. Можно получить решение, обобщающее решения, приведенные в II и III п. 2. Полагая

$$\tau_{\rho z} = m_1\rho + \frac{m_2}{\rho}, \qquad u = n_1\rho + \frac{n_2}{\rho} \tag{2.6}$$

из условия пластичности (2.1) получим

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \mu_1\sqrt{1-\left(m_1\rho + \frac{m_2}{\rho}\right)^2 - 1} \tag{2.7}$$

Подставляя выражения (2.6) и (2.7) в уравнения (1.1), получим

$$\sigma_\rho = -2m_1 z - \mu_1\int\sqrt{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}\,\frac{d\rho}{\rho^2} + C_1$$

$$\sigma_z = -2m_1 z - \mu_1\int\sqrt{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2}\,\frac{d\rho}{\rho^2} - \frac{2\mu_1}{\rho}\sqrt{\rho^2 - (m_1\rho^2 + m_2)^2} + C_1$$

Легко также найти, что

$$w = -2n_1 z + \int\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\tau_{\rho z}}{(\sigma_\rho - \sigma_z)}\,d\rho + C_2$$

Аналогично можно найти уравнение характеристик.

Поступила 21 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. АН СССР, 1946. Гостехтеоретиздат, М., 1950.
2. Михлин С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности. АН СССР, 1934.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ИЛ., М., 1956.
4. Shield R. T. Plastic flow in a converging channal. J. Mech. and Phys. Solids, vol. 3, No. 4, 1955. Механика. Сб. переводов, вып. 3 (37), 1956.
5. Shield R. T. On the plastic, flow of metals under conditions of axial symmetry. Proc. of Royal Soc., 1955. Механика. Сб. переводов, вып. 1 (41), 1957.
6. Hercky H. Ueber einige statisch bestimmten Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM, Bd. 3, H. 4, 1923. Теория пластичности. Сб. статей. ИЛ. М., 1948.