Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

В статье рассматриваются некоторые классические линейные задачи математической физики: граничная задача для эллиптического уравнения, задача Коши для уравнения гиперболического типа и задача о построении частного интеграла для уравнения произвольного типа. Считается, что краевые значения искомой величины и ее производных или свободный член уравнения представляют собой быстро колеблющиеся функции, так что решение задачи зависит от сколь угодно большого параметра, определяющего быстроту колебаний.

Решение основано на использовании метода, предложенного в монографии [1]. Постановка задачи и результаты частично излагались автором на 3-м Всесоюзном математическом съезде. Близкая по постановке задачи работа опубликована в заметке М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [2]. В ней был применен другой метод, развитый авторами в их работе [3]. В статье [3] можно найти подробный обзор работ по асимптотическому интегрированию уравнений в частных производных, интерес к которому сейчас проявляется как у нас, так и за границей.

В предлагаемой статье рассуждения проводятся в предположении, что число независимых переменных равно двум, однако метод допускает и обобщение на случай большего числа переменных. Основное внимание уделяется прикладной стороне вопроса, т. е. возможности достаточно быстро довести решение до конца.

Приближенное решение всех перечисленных выше задач, в том числе и задач с граничными условиями, сводится к повторному решению в комплексной области задач Коши для линейных уравнений первого порядка. В связи с этим оказалось удобным не делать различия между граничными и начальными условиями, которым в статье дано объединяющее название контурных условий.

§ 1. 1. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение порядка l

$$L(\Phi) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=l} \sum_{j=0}^{j=\nu} a_{j,\nu-j}^{(\nu)} \frac{\partial^\nu \Phi}{\partial \alpha^j \, \partial \beta^{\nu-j}} = 0 \tag{1.1}$$

где (α, β) — независимые переменные, Φ — искомая функция, $a_{jk}^{(\nu)}$ — действительные функции α, β.

Предполагается, что $a_{jk}^{(\nu)}$ имеют гладкость такого порядка, какой может понадобиться, что все характеристики L (действительные или мнимые) однократны и что в рассматриваемой области (включая границу) уравнение (1.1) не имеет особых точек, т. е. точек, в которых одновременно обращаются в нуль все коэффициенты $a_{jk}^{(l)}$.

2. Решение уравнения (1.1) будем искать в виде:

$$\Phi = e^{kf} \Phi_* = e^{kf} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} \Phi_u \qquad (\Phi_0 \not\equiv 0) \tag{1.2}$$

где k — действительная константа, f и Φ_u — функции α, β. Будем называть f функцией изменяемости, Φ_* — функцией интенсивности, Φ_u $(u = 1, \ldots, R-1)$ — коэффициентами разложения функции интенсивности, Φ_R — остаточным членом и наложим дополнительное требование, чтобы функция изменяемости и коэффициенты разложения функции интенсивности не зависели от k.

3. Пусть $D^{(s,t)}$ — символ производной порядка s по α и порядка t по β. Тогда

$$D^{(s,\,t)}(e^{kf}\Phi_*) = e^{kf}k^{s+t}\left(f_\alpha + k^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^s\left(f_\beta + k^{-1}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^t\Phi_* \tag{1.3}$$

(f_α, f_β — производные от f по α и β).

Символическое произведение, стоящее в правой части этого равенства, можно раскрыть и разложить по нисходящим степеням k. Получим

$$e^{-kf}D^{(s,\,t)}(e^{kf}\Phi_*) = k^{s+t}\left\{\sum_{u=0}^{u=s+t} k^{-u}D_u^{(s,\,t)}\right\}\Phi_* \tag{1.4}$$

где $D_u^{(s,t)}$ — некоторый дифференциальный оператор порядка u. В частности,

$$D_0^{(s,\,t)} = f_\alpha^s f_\beta^t \tag{1.5}$$

$$D_1^{(s,\,t)} = \frac{\partial}{\partial f_\alpha}\{D_0^{(s,t)}\}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_\beta}\{D_0^{(s,\,t)}\}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial f_\alpha^2}\{D_0^{(s,\,t)}\}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial f_\alpha \partial f_\beta}\{D_0^{(s,\,t)}\}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial f_\beta^2}\{D_0^{(s,\,t)}\}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}$$

При помощи (1.4) и (1.1) можно написать

$$L(e^{kf}\Phi_*) = e^{kf}k^l\sum_{v=0}^{v=l} k^{-v}L_v(\Phi_*) \tag{1.6}$$

где

$$L_0 = \sum_{j=0}^{j=l} a_{j,\,l-j}^{(l)} f_\alpha{}^j f_\beta{}^{l-j} \tag{1.7}$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial f_\alpha}\{L_0\}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_\beta}\{L_0\}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial f_\alpha{}^2}\{L_0\}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial f_\alpha\,\partial f_\beta}\{L_0\}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial f_\beta{}^2}\{L_0\}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} + \sum_{j=0}^{j=l-1} a_{j,\,l-1-j}^{(l-1)} f_\alpha{}^j f_\beta{}^{l-1-j} \tag{1.8}$$

а L_γ — линейный дифференциальный оператор порядка γ, коэффициенты которого относительно производных от f — полиномы и относительно $a_{jk}{}^{(\nu)}$ — линейные функции.

4. Подставив в (1.6) выражение (1.2) и расположив результат по нисходящим степеням k, получим

$$L(\Phi) \equiv e^{kf}\left\{k^l\sum_{v=0}^{v=l} k^{-v}\sum_{u=0}^{u=R} k^{-u}L_v(\Phi_u)\right\} = 0 \tag{1.9}$$

Отбросив экспоненциальный множитель и выполнив очевидные преобразования, напишем [1]

$$k^l \sum_{r=0}^{r=R+l} \sum_{u=0}^{u=r} k^{-r} L_{r-u}(\Phi_u) = 0 \qquad (r-u \leqslant l,\ u \leqslant R)$$

Потребуем, чтобы в левой части этого равенства обратились в нуль коэффициенты при всех степенях k от l до $l-R$. Тогда рассматриваемое уравнение обратится в систему:

$$\sum_{u=0}^{u=r} L_{r-u}(\Phi_u) = 0 \qquad (r-u \leqslant l;\ u \leqslant R;\ r=0,1,\ldots,R) \tag{1.10}$$

$$\sum_{r=R+1}^{r=R+l} \sum_{u=0}^{u=r} k^{-r} L_{r-u}(\Phi_u) = 0 \qquad (r-u \leqslant l,\ u \leqslant R) \tag{1.11}$$

5. Легко убедиться, что соотношения (1.10) приводят к рекуррентной системе уравнений для определения функции изменяемости и коэффициентов разложения функции интенсивности.

Положив в (1.10) $r=0$ и учитывая (1.7), получим для определения функции изменяемости дифференциальное уравнение первого порядка и степени l:

$$L_0 \equiv \sum_{j=0}^{j=l} a_{j,\,l-j}^{(l)} f_\alpha{}^j f_\beta{}^{l-j} = 0 \tag{1.12}$$

Учитывая (1.12), можно равенства (1.10) преобразовать к виду:

$$L_1(\Phi_0)=0, \quad L_1(\Phi_{r-1}) = -\sum_{u=0}^{u=r-2} L_{r-u}(\Phi_u) \quad (r-u \leqslant l;\ u \leqslant R;\ r=2,\ldots,R) \tag{1.13}$$

Отсюда последовательно определяются все коэффициенты разложения функции изменяемости.

6. Для определения остаточного члена имеем уравнение (1.11). Сократив это равенство на k^{-R-1} и заменив индекс суммирования по формуле $r-R=\rho+1$, запишем его так:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=l-1} k^{-\rho} L_{\rho+1}(\Phi_R) = -\sum_{\rho=0}^{\rho=l-1} \sum_{u=0}^{u=R-1} k^{-\rho} L_{R+\rho+1-u}(\Phi_u) \quad (R+\rho+1-u \leqslant l) \tag{1.14}$$

7. Получен рекуррентный процесс для последовательного определения f, Φ_0, $\Phi_1, \ldots, \Phi_{R-1}$, Φ_R, в котором каждая следующая функция при известных предыдущих определяется ценой интегрирования одного дифференциального уравнения. Для определения функции изменяемости имеем дифференциальное уравнение первого порядка степени l, для определения каждого из коэффициентов разложения функции интенсивности — линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Остаточный член удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению порядка l (с такой же главной частью, как и исходное уравнение).

[1] Здесь и в дальнейшем в суммах должны сохраняться те слагаемые, индексы которых подчиняются дополнительным неравенствам, указываемым в скобках.

8. Уравнение (1.12), определяющее функцию изменяемости, есть дифференциальное уравнение характеристик оператора L, поэтому решениями уравнения (1.12) будут такие и только такие функции, которые имеют постоянные значения на любой кривой некоторого семейства характеристик L. Поэтому каждый интеграл вида (1.2) можно привести в соответствие с некоторым семейством характеристик L — с тем семейством, на кривых которого его функция изменяемости сохраняет постоянное значение. Интегралы, соответствующие различным семействам характеристик L, назовем существенно различными. В рассматриваемом случае (когда характеристики L однократны) имеется l существенно различных семейств интегралов, каждое из которых соответствует своему семейству характеристик.

Задача об интегрировании нелинейного уравнения (1.12) легко приводится к интегрированию линейных уравнений первого порядка. Действительно, в уравнении (1.12) L_0 представляет собой относительно f_α, f_β однородный полином степени l, и, следовательно, это выражение может быть представлено в виде произведения l действительных или комплексных множителей:

$$L_0 = \prod_{\tau=1}^{\tau=l} (A_{\tau 1} f_\alpha + A_{\tau 2} f_\beta)$$

а следовательно, каждое решение уравнения (1.12) должно удовлетворять по меньшей мере одному из уравнений

$$A_{\tau 1} f_\alpha + A_{\tau 2} f_\beta = 0 \qquad (\tau = 1, \ldots, l) \qquad (1.15)$$

Выбирая для построения f какое-либо определенное из уравнений (1.15), мы тем самым выбираем и то семейство характеристик, которому соответствует интеграл.

9. Рассмотрим вопрос об особых точках уравнений (1.12), (1.13), (1.14). Уравнение (1.12) особых точек не имеет, так как по предположению $a_{j,\, l-j}^{(l)}$ — достаточно гладкие, не обращающиеся одновременно в нули функции.

В дальнейшем всегда будет считаться, что решения уравнений (1.12), (1.13) в интересующих нас областях достаточно гладки. Поэтому в уравнениях (1.13) и (1.14) особые точки могут появиться только за счет одновременного обращения в нуль коэффициентов при старших производных от искомых функций. Для уравнения (1.14) это невозможно, так как тогда вопреки предположению имело бы особые точки и уравнение (1.1). В уравнениях (1.13) коэффициенты при старших производных одновременно обратятся в нули только в том случае, если одновременно с (1.12) выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial f_\alpha}\{L_0\} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial f_\beta}\{L_0\} = 0$$

которые могут иметь место только: а) в стационарных точках функции f (если $l > 1$), в которых $f_\alpha = f_\beta = 0$; b) в точках, где характеристики того семейства, которому соответствует данный интеграл, касаются кривых какого-либо другого семейства характеристик.

§ 2. В этом и последующем параграфах на конкретных примерах показывается, что прием, описанный в предыдущем параграфе, позволяет построить интегралы, достаточно общие для того, чтобы можно было решать некоторые классические задачи теории дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим односвязную конечную область $\overline{\Gamma} = \Gamma + \gamma$, ограниченную контуром γ. Пусть параметры (α, β) соответствуют системе координат, подобной полярной системе, т. е. контур γ задается уравнением $\alpha = \alpha_0 > 0$, область Γ определяется неравенствами $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$ и $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$, а соответствие между точками области и парами чисел (α, β) взаимно-однозначно всюду, кроме точки $\alpha = 0$ и линий $\beta = 0$, $\beta = 2\pi$.

2. Будем считать, что всюду в $\overline{\Gamma}$ оператор L является эллиптическим (следовательно, l — четное), и поставим следующую задачу A. Требуется в Γ построить решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям на γ:

$$\frac{\partial^{\mu}\Phi}{\partial\alpha^{\mu}} \equiv D^{(\mu,\,0)}(\Phi) = k^{\mu} g^{(\mu)} e^{ik\varphi} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, {}^1/_2\, l - 1) \tag{2.1}$$

где $g^{(\mu)}$, φ — заданные функции β, не зависящие от k.

Параметры задачи считаются достаточно гладкими, т. е. γ имеет гладкость достаточного порядка, а $g^{(\mu)}$ и $e^{ik\varphi}$ достаточно гладки не только как функции β, но и как функции точки контура γ.

Функцию φ будем считать действительной, монотонно вырастающей (убывающей) по β, так что $\varphi'(\beta)$ всюду положительно (отрицательно); функции $g^{(\mu)}$ могут быть комплексными.

При $g^{(\mu)} = \mathrm{const}$, $\varphi = \beta$ и k — целом задача A превращается в классическую задачу теории эллиптических дифференциальных уравнений для случая, когда краевые функции разложены в комплексные ряды Фурье и в каждом из них удержан только один член достаточно высокого номера k.

3. Решение задачи A будем составлять как сумму интегралов вида (1.2), соответствующих некоторому числу семейств характеристик оператора L.

Обозначим через $f^{(q)}$, $\Phi_u^{(q)}$ составляющие интеграла, соответствующего q-му семейству характеристик оператора L, и поставим вопрос: можно ли подчинить $f^{(q)}$ условиям

$$f^{(q)} = i\varphi(\beta), \qquad \mathrm{Re}\,\{f_{\alpha}^{(q)}\} > 0 \quad \text{на } \gamma \tag{2.2}$$

Первое из условий (2.2) можно, очевидно, выполнить для любого семейства характеристик ценой решения задачи Коши для соответствующего уравнения (1.15). Остается учесть второе из условий (2.2). В силу эллиптичности L все семейства его характеристик мнимы, а следовательно, все $f^{(q)}$ — комплексные функции. При этом каждому $f^{(s)}$ отвечает $f^{(t)} = \pm \overline{f}^{(s)}$ (черточка сверху — знак сопряженной величины).

Из (2.2) следует, что на γ $f_{\beta}^{(q)} = i\varphi'(\beta)$, т. е. $f_{\beta}^{(q)}$ во всех точках контура γ имеет чисто мнимые значения. Но для эллиптического оператора L в уравнениях (1.15) все пары коэффициентов $(A_{1\tau}, A_{2\tau})$ комплексны и ни одно из этих уравнений нигде не может выполняться, если и $f_{\alpha}^{(q)}$ и $f_{\beta}^{(q)}$ чисто мнимы. Следовательно, действительная часть $f_{\alpha}^{(q)}$ всюду на γ отлична от нуля. Таким образом, если $f^{(q)}$ подчинить первому условию (2.2), то знак действительной части $f_{\alpha}^{(q)}$ определится на γ однозначно. Вместе с тем нетрудно проверить, что если $f^{(s)}$ и $f^{(t)} = \pm \bar{f}^{(s)}$ подчинить одному и тому же условию (2.2), то знаки действительных частей $f_\alpha{}^{(s)}$ и $f_\alpha{}^{(t)}$ на γ будут разными. Отсюда вытекает, что существует ровно $^1/_2\, l$ семейств характеристик оператора L, для которых могут быть выполнены оба условия (2.2).

4. Пронумеруем семейства характеристик L так, чтобы на первых местах оказались те семейства, для которых могут быть выполнены оба условия (2.2), и будем искать решение задачи A в виде

$$\Phi = \sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} \left(e^{kf^{(q)}} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} \Phi_u{}^{(q)} \right)$$

считая, что все $f^{(q)}$ удовлетворяют условиям (2.2). Заменив в (1.9) L на $D^{(\mu,\,0)}$, получим

$$D^{(\mu,\,0)}(\Phi) = \sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} e^{kf^{(q)}} \left(k^\mu \sum_{v=0}^{v=\mu} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} D_v{}^{(\mu,\,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) \right)$$

$$(\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ ^1/_2\, l - 1)$$

а внеся этот результат в (2.1) и учтя, что $f^{(q)}$ удовлетворяют условиям (2.2), будем иметь

$$\sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} k^\mu \sum_{v=0}^{v=\mu} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} D_{v,\,q}{}^{(\mu,\,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) = k^\mu g^{(\mu)} \quad \text{на } \gamma \tag{2.3}$$

$$(\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ ^1/_2\, l - 1)$$

Потребуем, чтобы в этом соотношении слева и справа были равны друг другу коэффициенты при всех степенях k от μ от $\mu - R + 1$. Это даст после таких же преобразований, как и в § 2 (всюду $\mu = 0, 1, \ldots, ^1/_2\, l - 1$)

$$\sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} D_{0,\,q}^{(\mu,\,0)} (\Phi_0^{(q)}) = g^{(\mu)} \quad \text{на } \gamma \tag{2.4}$$

$$\sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} D_{0,\,q}^{(\mu,\,0)} (\Phi_r{}^{(q)}) = - \sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} \sum_{u=0}^{u=r-1} D_{r-u,\,q}^{(\mu,\,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) \quad \left(\begin{matrix} r-u \leqslant \mu \\ r = 1, \ldots, R-1 \end{matrix} \right) \text{на } \gamma \tag{2.5}$$

$$\sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu} k^{-\rho} D_{\rho,\,q}^{(\mu,\,0)} (\Phi_R^{(q)}) = - \sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-1} \sum_{u=0}^{u=R-1} k^{-\rho} D_{R+\rho-u,\,q}^{(\mu,\,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) \quad \text{на } \gamma$$

$$(R + \rho - u \leqslant \mu) \tag{2.6}$$

5. Выражение $D_{0,\,q}^{(\mu,\,0)}$ может быть расшифровано при помощи (1.5):

$$D_{0,\,q}^{(\mu,\,0)} = (f_\alpha{}^{(q)})^\mu$$

Отсюда вытекает, что (2.4) представляет собой систему $^1/_2\, l$ линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_0{}^{(q)}$ $(q = 1,\ 2, \ldots,\ ^1/_2\, l)$.

Если известны $\Phi_0{}^{(q)}, \Phi_1{}^{(q)}, \Phi_2{}^{(q)}, \ldots, \Phi_{r-1}^{(q)}$, а следовательно, могут быть построены контурные значения этих функций и необходимого числа их производных, то правые части (2.5) суть известные функции и эти соотношения также представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно контурных значений $\Phi_r{}^{(q)}$ $(q = 1, 2, \ldots,\ ^1/_2\, l)$.

Все упомянутые системы имеют один и тот же определитель:

$$\Delta = \| (f_\alpha^{(q)})^\mu \| \qquad (q = 1, 2, \ldots, {}^1/_2\, l,\ \mu = 0, 1, \ldots, {}^1/_2\, l - 1)$$

Это определитель Вандермонда, который может равняться нулю только при условии, что по меньшей мере две функции f_α с различными верхними индексами равны друг другу.

Это может иметь место только в тех точках γ, где касаются друг друга характеристики L, принадлежащие различным семействам [1], так как все $f_\beta^{(q)}$ на γ равны друг другу при любых β в силу условиям (2.2).

Исключим из рассмотрения случай, когда на γ находятся такие точки (они являются также и особыми точками уравнений, определяющих коэффициенты разложения функций интенсивности). Тогда контурные условия (2.4) и (2.5) можно преобразовать в виду:

$$\Phi_s^{(q)} = \overline{\Phi}_s^{(q)} \qquad (s = 0, 1, \ldots, R-1) \quad \text{на } \gamma \tag{2.7}$$

где $\overline{\Phi}_s^{(q)}$ будут нам известны, коль скоро в окрестности γ определены $\Phi_0^{(q)}, \Phi_1^{(q)}, \ldots, \Phi_{s-1}^{(q)}$.

Соотношение (2.6) дает граничные условия для остаточных членов $\Phi_R^{(q)}$. Здесь мы имеем $l/2$ граничных условий, накладываемых на $l/2$ функций $\Phi_R^{(q)}$. Каждое из $\Phi_R^{(q)}$ удовлетворяет уравнению порядка l, так что задача о построении остаточных членов остается недоопределенной (как задача Коши). К этому вопросу нам еще предстоит вернуться.

6. Итак, показано, что вблизи γ может быть построено решение задачи A, удовлетворяющее, в частности, второму из условий (2.2), которое в дальнейшем мы будем называть условием затухания. Получены контурные условия, которые надо учитывать при построении функций изменяемости и коэффициентов разложения функции интенсивности, причем оказалось, что построение каждой из перечисленных функций сводится к решению задачи Коши для линейного уравнения первого порядка. Наконец, получены контурные условия (в недостаточном числе) для определения остаточных членов.

§ 3. Покажем, что при известных условиях решение задачи A, построенное в § 2 в окрестности γ, может быть продолжено во всю область Γ, а задача о построении остаточного члена может быть доопределена таким образом, что $\Phi_R^{(q)}$ останется ограниченным при сколь угодно большом k.

1. Введем в рассмотрение область Γ_ε, заключенную между контурами γ (линией $\alpha = \alpha_0$) и γ_ε (линией $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$), где ε — положительное достаточно малое число, и примем, что: (*a*) уравнения (1.13) с контурными условиями (2.7) имеют в Γ_ε достаточно гладкие решения $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{R-1}$; (*b*) уравнения (1.14) с контурными условиями (2.6) могут быть доопределены путем присоединения к ним некоторого числа дополнительных условий так, что они будут иметь в Γ_ε достаточно гладкие решения; (*c*) уравнение

$$L(\Phi) = \Psi \tag{3.1}$$

[1] Здесь и в дальнейшем условно считается, что действительные или мнимые кривые $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ касаются между собой во всякой такой точке, где $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ пропорциональны $(\psi_\alpha, \psi_\beta)$.

с однородными контурными условиями вида (2.1) имеет во всей области Γ достаточно гладкое решение для любой достаточно гладкой функции Ψ.

Условия, при которых выполняются предположения (a) и (c), в литературе обсуждались, и на них мы останавливаться не будем. К вопросу о предположении (b) нам еще предстоит вернуться.

2. В силу второго из условий (2.2) действительная часть f_α при достаточно малом ε будет иметь в Γ_ε неположительные значения[1]. В силу предположений (a) и (b) $\Phi_u^{(q)}$ $(u = 0, 1, \ldots, R)$—ограничены, поэтому на любом контуре γ_η $(0 < \eta < \varepsilon)$ абсолютные значения функции

$$\Phi^{(q)} = e^{kf^{(q)}} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} \Phi_u^{(q)} \tag{3.2}$$

будут иметь вид $0(k^{-v})$, где v — любое положительное число. Таким же свойством обладает и достаточное число производных от $\Phi^{(q)}$.

Введем, так же как в статье [3], сглаживающую функцию ψ, которая равна единице в области Γ_η, равна нулю в $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ и всюду в Γ неограниченно дифференцируема, и рассмотрим функцию

$$\Phi_*^{(q)} = \psi\Phi^{(q)} + \Phi^0 \tag{3.3}$$

где $\Phi^{(q)}$ — одно из $^1/_2 l$ решений уравнения (1.1), построенных вблизи γ в предыдущем параграфе, а Φ^0 — функция, удовлетворяющая всюду в Γ уравнению

$$L(\Phi^0) = -L\ (\psi\Phi^{(q)})$$

так, что $\Phi_*^{(q)}$ есть решение уравнения (1.1).

В правой части последнего равенства стоит функция, равная нулю в Γ_η и в $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$, так как $\psi = 1$ в Γ_η, и $\Phi^{(q)}$ удовлетворяет вблизи γ уравнению $L(\Phi) = 0$, а в $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ — функции $\psi = 0$. В $\Gamma_\varepsilon - \Gamma_\eta$ функция ψ и достаточное число ее производных ограничены, а $\Phi^{(q)}$ имеет вид $0(k^{-v})$. Таким образом, мы имеем уравнение вида (3.1), которое в силу предположения (c) имеет решение вида $0(k^{-v})$. Это значит, что при помощи формулы (3.3) каждая из функций $\Phi^{(q)}$, которые в § 2 были построены только в окрестности γ, продолжена на область Γ, причем на γ сохраняются все граничные условия и продолженная функция $\Phi_*^{(q)}$ удовлетворяет уравнению (1.1).

3. Обратимся к вопросу о доопределении задачи о построении остаточного члена. Уравнение (1.14), которому должна удовлетворять функция Φ_R, есть уравнение порядка l с малым параметром k^{-1} при старших производных. В цитированной работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [3] рассмотрен в весьма широком аспекте вопрос о такого рода уравнениях. В ней введены понятия о предельной задаче и о регулярности вырождения. Под предельной задачей подразумевается задача об интегрировании предельного уравнения, получающегося при $k^{-1} = 0$ с соответствующим числом контурных условий (оставляется только часть перво-

[1] Это вытекает из теоремы о равномерной непрерывности.

начально заданных контурных условий с таким расчетом, чтобы предельная задача была корректно поставлена). Вырождение допредельной задачи в предельную называется регулярным, если решение предельной задачи равномерно сходится при $k \to \infty$ к решению допредельной задачи во всякой точке, не содержащей точек контура γ. Вблизи γ имеют место быстро затухающие по абсолютной величине добавки, позволяющие компенсировать невязку в контурных условиях (в статье [3] эти добавки называются погранслоем, в монографии [1] они были названы интегралами с заданным опорным контуром).

М. И. Вишик и Л. А. Люстерник вывели условие регулярности вырождения. Оно заключается в требовании, чтобы так называемое дополнительное характеристическое уравнение имело столько корней с положительной действительной частью (в случае, когда движению внутрь области соответствует убывание α), сколько отбрасывается граничных условий при переходе к предельной задаче.

Нетрудно проследить по выкладкам статьи [3], что если не выполняются условия регулярности вырождения, то описанные выше добавки также могут быть построены, но они уже не будут убывать (при беспредельном увеличении k) от края в глубь области, а если решения предельной задачи удовлетворяют всем граничным условиям допредельной задачи, то добавки будут отсутствовать.

4. Проверим, будет ли выполняться условие регулярности вырождения в интересующем нас случае. Если граничные условия накладываются на краю $\alpha = \alpha_0$, то дополнительное характеристическое уравнение для оператора

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=l-1} k^{-\rho} L_{\rho+1} \tag{3.4}$$

стоящего в левой части уравнения (1.14), составляется следующим образом: в каждом из дифференциальных операторов $L_{\rho+1}$ сохраняется только то слагаемое, которое содержит производную по α порядка $\rho+1$, а последняя заменяется на $\lambda^{\rho+1}$, где λ и есть искомое неизвестное (все функции заменяются при этом их контурными значениями). Можно показать, что эти операции приведут нас к уравнению

$$[a_{l0}^{(l)} (f_\alpha + k^{-1}\lambda)^l_{\alpha=\alpha_0} = 0 \tag{3.5}$$

все корни которого определяются формулой

$$\lambda = -k \{f_\alpha\}_{\alpha=\alpha_0}$$

Отсюда в силу второго из условий (2.2) вытекает, что дополнительное характеристическое уравнение не имеет ни одного корня с положительной действительной частью. Это значит, что ни одно из граничных условий, при помощи которых надо доопределить задачу о построении Φ_R, нельзя задавать произвольно. Они должны назначаться так, чтобы им удовлетворяло решение предельной задачи.

5. Рассмотрим теперь более подробно задачу Коши, к которой сводится определение остаточных членов в Γ_ε. Мы имеем $^1/_2\, l$ уравнений вида (1.14) для каждого из $\Phi_R^{(q)}$ и $^1/_2\, l$ граничных условий вида (2.6). Составим предельные уравнения для уравнений (1.14)

$$L_1(\Phi_R^{(q)}) = -\sum_{u=0}^{u=R-1} L_{R+1-u}(\Phi_u^{(q)}) \qquad (R+1-u \leqslant l) \tag{3.6}$$

и присоединим к ним граничные условия

$$\Phi_R^{(q)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = \Psi_0^{(q)} \tag{3.7}$$

где $\Psi_0^{(q)}$ — некоторые, пока не определенные функции точки контура γ.

Пусть предельная задача Коши (3.6), (3.7) решена. Тогда можно найти $\Psi_1^{(q)}, \Psi_2^{(q)}, \ldots, \Psi_{l-1}^{(q)}$ — контурные значения производных от Φ_R по α соответствующего порядка. Все они выразятся через $\Psi_0^{(q)}$ и их производные по β. Подставив эти результаты в граничные условия (2.6), получим для $\Psi_0^{(q)}$ систему из $^1/_2\, l$ обыкновенных (по β) дифференциальных уравнений.

Не останавливаясь на исследовании этой системы, примем, что она имеет периодические достаточно гладкие решения. Тогда задача о $\Phi_R^{(q)}$ будет должным образом доопределена (как задача Коши): для каждого из уравнений вида (1.14) даются контурные значения функции $\Phi_R^{(q)}$ и $l-1$ ее производных, причем решение предельной задачи будет удовлетворять всем этим контурным условиям, а контурные условия (2.6) выполняются автоматически.

В доопределенной таким образом задаче о построении остаточных членов $\Phi_R^{(q)}$ предположение (*b*) будет выполняться.

6. Итак, в рамках сделанных выше оговорок решение задачи *A* при достаточно больших значениях k быстро затухает от контура внутрь области и может быть приближенно (за счет отбрасывания остаточных членов) построено со сколь угодно большой точностью ценой последовательного решения задачи Коши для линейных уравнений первого порядка.

§ 4. Рассмотрим еще одну классическую задачу математической физики.

1. Пусть L — вполне гиперболический оператор порядка l, имеющий l различных действительных семейств характеристик. Задача *B*, которую нам предстоит рассмотреть, заключается в построении интеграла уравнения (1.1), удовлетворяющего на некотором контуре γ, нигде не касающимся ни одной из характеристик L, условиям

$$D^{(\mu,0)}(\Phi) = k^\mu g^{(\mu)} e^{ik\varphi} \qquad (\mu=0,1,\ldots,l-1) \text{ на } \gamma \tag{4.1}$$

где $D^{(\mu,0)}$ — символ производной порядка μ, взятой по нормали к γ, $g^{(\mu)}$ и φ не зависят от k и являются достаточно гладкими функциями точек контура γ, причем φ — действительная функция, а $g^{(\mu)}$, вообще говоря, комплексны. Граничные условия такого рода могут встретиться, например, в том случае, когда мы будем решать классическую задачу Коши при помощи разложения граничных функций в комплексные ряды Фурье и сосредоточим свое внимание на одном из членов разложения достаточно высокого номера.

Для простоты принимается, что контур γ совпадает с линией $\alpha = \alpha_0$, что, конечно, не уменьшает общности результатов. Тогда $D^{(\mu,0)}$, как и в § 1, становится символом производной порядка l по α^1.

2. Решение задачи B можно искать как сумму интегралов вида (1.2), соответствующих всем семействам характеристик оператора L:

$$\Phi = \sum_{q=1}^{q=l} \left\{ e^{kf^{(q)}} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} \Phi_u{}^{(q)} \right\}$$

Все функции изменяемости подчиним контурному условию

$$f^{(q)} = i\varphi(\beta) \quad \text{на } \gamma \tag{4.2}$$

Для вполне гиперболического оператора в уравнениях (1.15) коэффициенты $(A_{1\tau}, A_{2\tau})$ пропорциональны паре действительных функций. Поэтому $f^{(q)}$ в силу (4.2) будет чисто мнимой функцией. Контурные условия (4.1), учитывая (4.2), можно представить в виде соотношения

$$\sum_{q=1}^{q=l} k^{\mu} \sum_{v=0}^{v=\mu} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} D_{v,q}^{(\mu,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) = k^{\mu} g^{(\mu)} \quad \text{на } \gamma \tag{4.3}$$

вполне аналогичного соотношению (2.3). Дальнейшие рассуждения проводятся по той же схеме, что и в § 2. Потребовав, чтобы в соотношении (4.3) были равны слева и справа коэффициенты при всех степенях k от μ до $\mu - R - 1$; получим (всюду $\mu = 0, 1, 2, \ldots, l-1$)

$$\sum_{q=1}^{q=l} D_{0,q}^{(\mu,0)} (\Phi_0{}^{(q)}) = g^{(\mu)} \quad \text{на } \gamma$$

$$\sum_{q=1}^{q=l} D_{0,q}^{(\mu,0)} (\Phi_r{}^{(q)}) = -\sum_{q=1}^{q=l} \sum_{u=0}^{u=r-1} D_{r-u,q}^{(\mu,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) \; (r - u \leqslant \mu;\ r = 1, \ldots, R-1) \quad \text{на } \gamma$$

$$\sum_{q=1}^{q=l} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu} k^{-\rho} D_{\rho,q}^{(\mu,0)} (\Phi_R{}^{(q)}) = -\sum_{q=1}^{q=l} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu} \sum_{u=0}^{u=R-1} k^{-\rho} D_{R+\rho-u,q}^{(\mu,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) \quad (R + \rho - u \leqslant \mu) \text{ на } \gamma \tag{4.4}$$

Первые два из этих соотношений позволяют свести определение коэффициентов разложения функций интенсивности к последовательному решению задач Коши для линейных уравнений первого порядка, при этом, так же как в § 2, надо требовать, чтобы определитель Вандермонда

$$\Delta = \| (f_\alpha^{(q)})^{\mu} \| \quad (q = 1, 2, \ldots, l;\ \mu = 0, 1, \ldots, l-1)$$

был отличен от нуля, т. е. чтобы на γ отсутствовали точки взаимного касания характеристик, принадлежащих различным семействам.

Последнее из соотношений (4.4) определяет l контурных условий для остаточных членов $\Phi_R{}^{(q)}$. Задачу о построении $\Phi_R{}^{(q)}$ необходимо доопре-

---

[1] Когда предлагаемая статья уже находилась в печати, артору стало известно о появлении работы Лакса[4], в которой значительно подробнее, чем здесь, рассмотрена задача B. Лакс решает задачу B для гиперболической системы уравнений первого порядка с произвольным числом независимых переменных, пользуясь методом, весьма похожим на тот, который применен здесь и в монографии[1].

делить. Для этого можно, например, наложить требование, чтобы задача эта имела регулярное вырождение. Дополнительным характеристическим уравнением для задачи B является уравнение (3.5). Все его корни чисто мнимы в силу (4.2), поэтому доопределение задачи о построении Φ_R выполнится точно так же, как и в § 3.

§ 5. Применим предлагаемый метод к построению частного интеграла.

1. Пусть дано уравнение

$$L(\Phi) = \Psi(\alpha, \beta)\, e^{kf(\alpha, \beta)} \tag{5.1}$$

где f — чисто мнимая, достаточно гладкая функция, не имеющая стационарных точек в интересующей нас области, $\Psi(\alpha, \beta)$ — достаточно гладкая, вообще комплексная функция, k — достаточно большая действительная константа. Рассмотрим вопрос о возможности найти частный интеграл (5.1) в форме

$$\Phi = k^p e^{kf(\alpha, \beta)} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u}\Phi_u \tag{5.2}$$

где число p, функции $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{R-1}$ (не зависящие от k) и функция Φ_R (зависящая от k) подлежит определению.

2. Подстановка (5.2) в (5.1) после отбрасывания экспоненциального множителя приводит к равенству

$$k^{l+p} \sum_{v=0}^{v=l} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} L_v(\Phi_u) = \Psi \tag{5.3}$$

Пусть выражение

$$L_0 \equiv \sum_{j=0}^{j=l} a_{j,\, l-j}^{(l)} f_\alpha^j f_\beta^{l-j}$$

ни в одной точке рассматриваемой области не обращается в нуль, т. е. линии уровня функции f не касаются характеристик L. Тогда можно положить $p = -l$ и потребовать, чтобы в уравнении (5.3) слева и справа были равны один другому коэффициенты при всех степенях k от 0 до $-R+1$. Получим рекуррентные формулы для определения коэффициентов разложения функции интенсивности

$$\Phi_0 = \frac{\Psi}{L_0}, \quad \Phi_r = -\frac{1}{L_0} \sum_{p=1}^{p=r} L_p(\Phi_{r-p}) \qquad (p \leqslant l; \quad r = 1, \ldots, R-1) \tag{5.4}$$

и линейное дифференциальное уравнение порядка l для определения остаточного члена

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=l} k^{-\rho} L_\rho(\Phi_R) = -\sum_{\rho=0}^{\rho=l} \sum_{u=0}^{u=R-1} k^{-\rho} L_{R+\rho-u}(\Phi_u) \qquad (R+\rho-u \leqslant l) \tag{5.5}$$

3. Пусть теперь во всей интересующей нас области f удовлетворяет уравнению

$$L_0 \equiv \sum_{j=0}^{j=l} a_{j,\, l-1}^{(l)} f_\alpha^j f_\beta^{l-j} = 0$$

т. е. линии уровня функции f всюду совпадают с характеристиками L. Тогда уравнение (5.1) примет вид:

$$k^{l+p-1} \sum_{v=1}^{v=l} k^{-(v-1)} \sum_{u=0}^{u=R} k^{-u} L_v(\Phi_u) = \Psi \tag{5.6}$$

Положив $p = -l + 1$, вновь потребуем, чтобы в уравнении (5.6) слева и справа были равны друг другу коэффициенты при всех степенях k от 0 до $-R + 1$. Для определения коэффициентов разложения функции интенсивности получится рекуррентная система дифференциальных уравнений первого порядка

$$L_1(\Phi_0) = \Psi, \qquad L_1(\Phi_r) = -\sum_{p=2}^{\rho=r} L_p(\Phi_{r-p}) \qquad (p \leqslant l;\ r = 1, \ldots, R-1) \tag{5.7}$$

а для определения остаточного члена — линейное дифференциальное уравнение порядка l

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=l} k^{-\rho} L_\rho(\Phi_R) = -\sum_{\rho=0}^{\rho=l} \sum_{u=0}^{u=R-1} k^{-\rho} L_{R+\rho-u}(\Phi_u) \qquad (R + \rho - u \leqslant l) \tag{5.8}$$

Особые точки дифференциальных уравнений (5.7) исследованы в § 1; они могут иметь место только в точках касания характеристик, принадлежащих различным семействам (случай, когда f имеет стационарные точки, исключен из рассмотрения).

4. Постулируем, что уравнения (5.5) и (5.8) имеют достаточно гладкие частные решения при любых достаточно гладких правых частях. Тогда можно утверждать, что частный интеграл уравнения (5.1) можно построить с любой точностью при сколь угодно большом k при помощи предлагаемого метода. Если линии уровня функции изменяемости правой части уравнения (5.1) нигде не касаются характеристик оператора L, — это, в частности, всегда имеет место, если L эллиптический оператор, — то построение частного интеграла выполняется без интегрирования каких бы то ни было дифференциальных уравнений; при этом, если правая часть уравнения (5.1) ограничена, то частный интеграл будет иметь вид $0(k^{-l})$. Если линии уровня функции изменяемости правой части уравнения (5.1) всюду совпадают с характеристиками L, то приближенный частный интеграл строится ценой последовательного интегрирования линейных дифференциальных уравнений первого порядка; при этом, если правая часть уравнения (5.1) ограничена, то частный интеграл имеет вид $0(k^{-l+1})$. Таким образом, случай, когда линии уровня f совпадают с характеристиками L, имеет в известном смысле резонансный характер.

5. Положив в правой части (5.1)

$$f(\alpha, \beta) = i\,(m\alpha + n\beta), \qquad \Psi(\alpha, \beta) = \text{const} \qquad (m, n = \text{const})$$

получим выражения, являющиеся одним из членов комплексного ряда Фурье (достаточно большого номера), поэтому вопрос о том, как уменьшаются частные интегралы с увеличением k, представляет, как нам кажется, интерес с точки зрения исследования сходимости решений, получающихся при использовании известного приема разложения в ряды правых частей дифференциальных уравнений.

6. Заметим, что если линии уровня f не совпадают с характеристиками L, т. е. если законны рекуррентные формулы (5.4), то приближенный частный интеграл будет равен нулю во всякой такой области, где $\Psi = 0$. Это значит, что если правая часть (5.1) отлична от нуля только в некоторой подобласти и если в этой подобласти она достаточно быстро колеблется, причем линии уровня функции изменяемости не совпадают с характеристиками оператора L, то может быть построен такой частный интеграл уравнения (5.1), который будет существенно отличаться от нуля только в упомянутой подобласти (конечно, предполагается, что выполнены обычные условия гладкости параметров задачи, т. е. Ψ достаточно гладко переходит от ненулевых к нулевым значениям).

§ 6. **Пример.** В полярных координатах (ρ, θ) дано уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a(r, \theta)\right]\Phi = 0 \tag{6.1}$$

где a — функция, на которую пока не накладывается никаких ограничений. Требуется построить решение этого уравнения в круге $r \leqslant 1$ с учетом краевого условия

$$\Phi = g_0 e^{ik\theta} \qquad \text{при } r = 1$$

(g_0 — комплексная константа, k — достаточно большое целое число). В рассматриваемом случае

$$L_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

$$L_1 = 2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$L_2 \equiv L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a$$

Уравнение для определения f имеет вид:

$$L_0 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

Оно эквивалентно двум линейным дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \tag{6.2}$$

На функцию изменяемости f должны быть наложены условия

$$f = ig_0, \qquad R_e\left\{\frac{\partial f}{\partial r}\right\} > 0 \qquad \text{при } r=1 \tag{6.3}$$

Второму из этих соотношений (условию затухания) может удовлетворять только решение первого уравнения (6.2), так что второе уравнение (6.2) следует отбросить. Из (6.2) и (6.3) получаем

$$f = \ln r + i\theta$$

При помощи этого равенства L_1 и L_2 преобразовываются к виду:

$$L_1 = \frac{2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right), \qquad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a$$

или

$$L_1 = \frac{4}{r^2}\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}}, \qquad L_2 = \frac{4}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial\bar{\rho}} + a \qquad \begin{pmatrix}\rho = \ln r + i\theta\\ \bar{\rho} = \ln r - i\theta\end{pmatrix}$$

Искомый интеграл зададим в виде

$$\Phi = e^{kf}(\Phi_0 + k^{-1}\Phi_1 + k^{-2}\Phi_2)$$

т. е. будем считать, что функция интенсивности аппроксимируется двумя членами разложения. Тогда уравнения для определения Φ_0, Φ_1, Φ_2 будут

$$L_1(\Phi_0) = 0, \qquad L_1(\Phi_1) = -L_2(\Phi_0), \qquad k^{-1}L_2(\Phi_2) + L_1(\Phi_2) = -L_2(\Phi_1) \tag{6.4}$$

а контурные условия для Φ_0, Φ_1, Φ_2 запишутся так:

$$\Phi_0 = g_0, \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0 \qquad \text{при } r = 1 \tag{6.5}$$

Коэффициенты разложения функции изменяемости из (6.4) и (6.5) определяются без всякого труда:

$$\Phi_0 = g_0, \qquad \Phi_1 = \int_{-i\theta}^{\bar{\rho}} \frac{ar^2}{4} g_0\, d\bar{\rho}$$

(a и r рассматриваются как функции ρ и $\bar{\rho}$).

Для оценки остаточного члена имеем уравнение

$$\left[k^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + a\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\Phi_2 = g \tag{6.6}$$

где

$$g = g_0\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(ar^2) + a\int_{-i\theta}^{\bar{\rho}} \frac{ar^2}{4}\, d\bar{\rho}\right] \tag{6.7}$$

и граничное условие

$$\Phi_2 = 0 \qquad \text{при } r = 1 \tag{6.8}$$

Итак, приближенное (без учета остаточного числа) решение поставленной задачи записывается так:

$$\Phi = e^{k(\ln r + i\theta)}\, g_0\left(1 + k^{-1}\int_{-i\theta}^{\bar{\rho}} \frac{ar^2}{4}\, d\bar{\rho}\right)$$

Если ar^2 ограничено при $r \to 0$, то оно имеет смысл во всем круге $r \leqslant 1$, так что вводить сглаживающую функцию в данном случае не требуется.

Рассмотренный пример принадлежит к тому весьма общему классу задач, которые рассмотрены в [2] М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником, и может быть решен предложенным ими методом. По этому методу вид решения остается таким же, но М. И. Вишик и Л. А. Люстерник в первом приближении коэффициенты уравнения заменяют их контурными значениями (так как речь идет о построении интегралов, «локализованных» вблизи контура γ). Тем самым предопределяется вид функции изменяемости. У М. И. Вишика и Л. А. Люстерника: она всегда есть линейная функция координаты, определяющей расстояние от контура (в рассматриваемом случае линейная функция r) В предлагаемом методе функция изменяемости определяется точно на первом этапе решения (в рассматриваемом случае — логарифмическая функция r) и это в ряде случаев позволяет значительно уменьшить число приближений, необходимых для достижений нужной точности (при фиксированном k). Вместе с тем надо отметить, что каждый отдельно взятый этап решения у М. И. Вишика и Л. А. Люстерника выполняется проще.

§ 7. Изложенные выше результаты допускают различные обобщения.

Совершенно тривиально они распространяются на случай более чем двух независимых переменных. Однако при этом описанный в конце § 1 способ приведения нелинейного уравнения, определяющего f, к l линейным уравнениям будет уже не применим.

Более сложно обобщение на случай уравнения, имеющего кратные характеристики. В этом случае интеграл надо искать в виде $\Phi = e^{kf}\Phi_*$:

$$f = f_0 + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\zeta-\varkappa-1} k^{-(\varkappa+\lambda)/\zeta} f_{(\varkappa+\lambda)/\zeta}, \qquad \Phi_* = \sum_{u=\sigma+\tau/\zeta=0}^{u=R} k^{-u}\Phi_u$$

где $\varkappa$, ζ — целые (не обязательно взаимно простые) числа, $(\varkappa \leqslant \zeta)$ — суммирование в формуле для Φ_* распространяется на все u, имеющие вид $\sigma + \tau/\zeta$ (σ, τ — неотрицательные целые числа) функции

$$f_0, \quad f_{\varkappa/\zeta}, \quad f_{(\varkappa+1)/\zeta}, \ldots, f_{(\zeta-1)/\zeta}, \qquad \Phi_0, \quad \Phi_{1/\zeta}, \ldots, \Phi_{R-1/\zeta} \tag{7.1}$$

не зависят от параметра k.

Число $\varkappa/\zeta$ можно подобрать так, что для последовательного определения функций (7.1) получится рекуррентный процесс. В нем главная часть функции изменяемости будет определяться так же, как раньше определялось f. Определение остальных членов последовательности (7.1), вообще говоря, сводится к интегрированию уравнений первого порядка, однако возможны случаи, когда надо будет интегрировать уравнения более высокого порядка.

Если кратность некоторого семейства характеристик равна p, то ему соответствуют интегралы, в которых главная часть функции изменяемости f_0 сохраняет постоянные значения на кривых этого семейства. При этом, вообще говоря, существует p процессов для определения остальных членов разложения функции изменяемости, различающихся между собой либо значением числа $\varkappa$, либо видом дифференциального уравнения, из которого дожно быть определено $f_\varkappa/\zeta$. Здесь также возможны исключения. Для p-кратной характеристики в некоторых случаях может существовать только $p - \pi$ описанных выше процессов. В этих и только в этих случаях мы имеем упомянутые выше исключения, когда для определения коэффициентов разложения функции интенсивности приходится интегрировать уравнения порядка выше первого, а именно порядка π.

Поступила 28 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, 1953.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решений задач с быстро осциллирующими граничными условиями для уравнений с частными производными. Докл. АН СССР, 119, № 4, 1958.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи математических наук, т. XII, вып. 77, 1957.
4. Lax P. D. Asymptotic solutions of oscillatory inicial value problems, Dike Math. Journ., vol. 24, № 4, p. p. 627—646, 1957.