Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. Старжинский

(Москва)

Запишем систему n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами в виде одного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{A}(t)\,\mathrm{x} \tag{0.1}$$

Здесь x — вектор-функция, $\mathrm{A}(t)$ — периодическая (с периодом $\omega > 0$) матрица-функция с действительными кусочно-непрерывными элементами:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}(t) = \| a_{ij}(t) \|_1^n, \qquad a_{ij}(t+\omega) = a_{ij}(t) \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Известно [1,2], что устойчивость тривиального решения системы (0.1) зависит от корней соответствующего ей характеристичного уравнения

$$\det[\mathrm{X}(\omega) - \rho \mathrm{I}_n] = (-1)^n \{\rho^n - a_1\rho^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1}\rho + (-1)^n \alpha\} = 0 \tag{0.2}$$

где $\mathrm{X}(t)$ — фундаментальная матрица системы (0.1) (матрицант), $\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_n$ (I_n — единичная матрица n-го порядка). Тривиальное решение системы (0.1) устойчиво, если все корни уравнения (0.2) по модулю не превосходят единицы и если при этом имеются кратные корни, равные по модулю единице, то им отвечают простые элементарные делители матрицы $\mathrm{X}(\omega) - \rho \mathrm{I}_n$. В противном случае, т. е. если хотя бы один из корней по модулю больше единицы или имеется кратный корень, равный по модулю единице, с непростым элементарным делителем указанной матрицы, то тривиальное решение системы (0.1) неустойчиво.

Свободный член уравнения (0.2) определяется по формуле Лиувилля

$$\alpha = \det \mathrm{X}(\omega) = \exp \int_0^\omega \mathrm{sp}\,\mathrm{A}(t)\,dt \qquad \left(\mathrm{sp}\,\mathrm{A}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)\right)$$

Если имеем ([2], п. 8 и 46)

$$\int_0^\omega \mathrm{sp}\,\mathrm{A}(t)\,dt > 0$$

то $\det \mathrm{X}(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и тривиальное решение системы (0.1) неустойчиво. Поэтому будем предполагать в дальнейшем, что

$$\int_0^\omega \mathrm{sp}\,\mathrm{A}(t)\,dt \leqslant 0$$

Известно ([3], п. 63), что если все собственные числа симметрической матрицы

$$A(t) + A^{\tau}(t) = \| a_{ij}(t) + a_{ji}(t) \|_1^n$$

при любом $t\,(0 \leqslant t \leqslant \omega)$ неположительны (или положительны), то тривиальное решение системы (0.1) устойчиво (либо неустойчиво).

Перейдем теперь к вопросу об определении областей устойчивости и неустойчивости в пространстве коэффициентов уравнения (0.2).

§ 1. Начнем с системы (0.1) канонического вида, записав ее в виде [4]

$$\frac{dx}{dt} = J_{2m} H(t)\, x, \qquad J_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(t) = \| h_{ij}(t) \|_1^{2m}$$

$$h_{ij} = h_{ji} \qquad (i, j = 1, \ldots, 2m) \tag{1.1}$$

Поскольку характеристичное уравнение для систем канонического вида является возвратным, то представим его в развернутом виде как

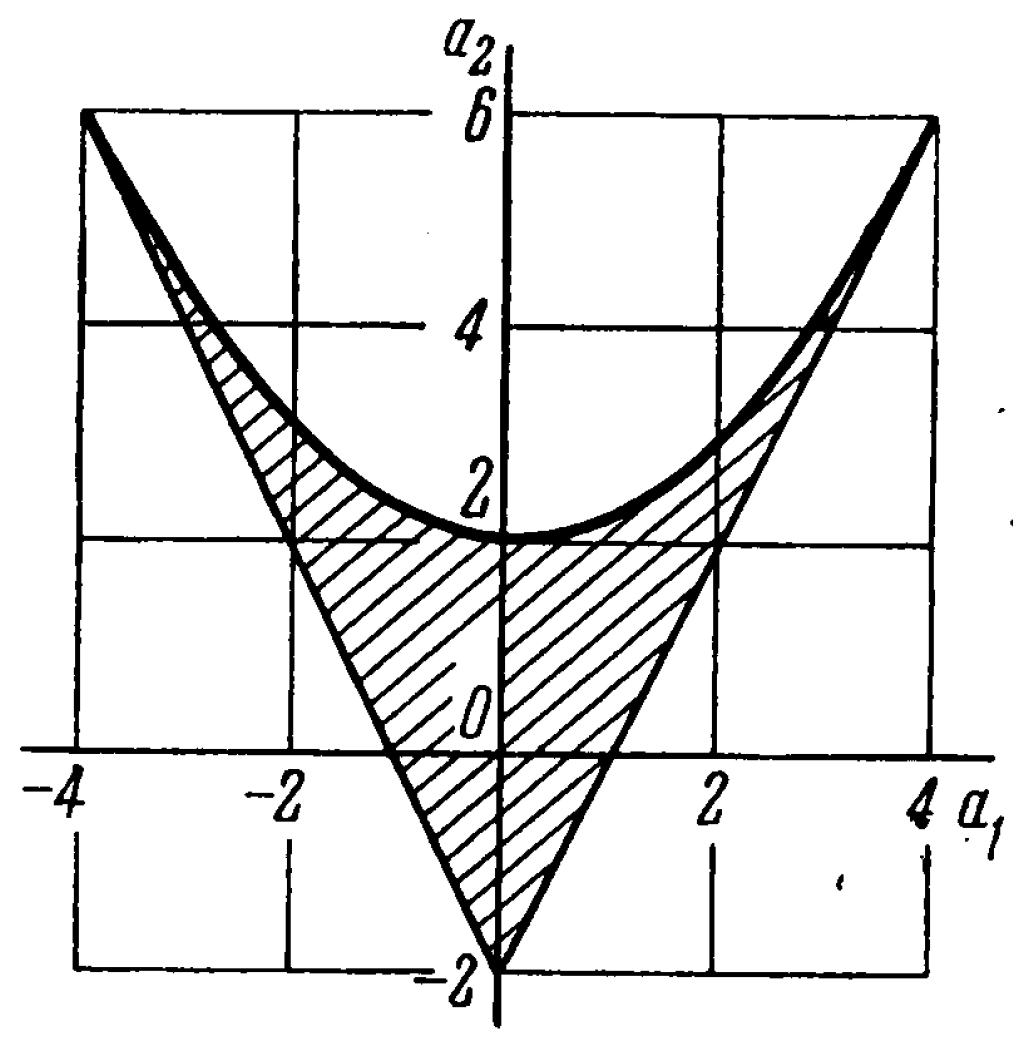
$$\rho^{2m} - a_1\rho^{2m-1} + a_2\rho^{2m-2} - \ldots + (-1)^m a_m \rho^m + (-1)^{m-1} a_{m-1}\rho^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0 \tag{1.2}$$

При $m = 1$ областью устойчивости является интервал $-2 < a_1 < 2$, а областями неустойчивости — интервалы $-\infty < a_1 < -2$ и $2 < a_1 < \infty$, а точки $a_1 = \pm 2$ требуют дополнительного исследования [2].

При $m = 2$, т. е. для канонической системы четвертого порядка, область устойчивости определяется неравенствами (см. Ляпунов [5], п. 8)

$$-2 < a_2 < 6,$$

$$4\,(a_2 - 2) < a_1^2 < \tfrac{1}{4}(a_2 + 2)^2 \tag{1.3}$$



Фиг. 1

и заштрихована на фиг. 1. Областью неустойчивости является внешность криволинейного треугольника, а значения коэффициентов a_1 и a_2, отвечающие сторонам его, требуют дополнительного исследования. Отметим, что область устойчивости вписана в квадрат, т. е. выполнение одного из неравенств $a_1 < -4$, $a_1 > 4$, $a_2 < -2$, $a_2 > 6$ гарантирует попадание в область неустойчивости.

При $m \geqslant 3$ дело обстоит значительно сложнее. Отсылая читателя к обзорной работе [6], укажем лишь следствие из теоремы Герглотца [7].

Необходимые и достаточные условия наличия у действительного симметричного полинома (1.2) только различных корней, по модулю равных единице, заключаются по Герглотцу в положительности квадратичной формы

$$\sum_{k,\, l=0}^{2m-1} s_{k-l}\xi_k\xi_l \qquad (s_{l-k} = s_{k-l})$$

где s_k — ньютоновы суммы. Для того чтобы получить отсюда, например, условия (1.3) надо проделать значительно более громоздкие вычисления, чем в [5].

Способ, предложенный Ляпуновым [5], или способ, заключающийся в конформном отображении внутренности единичного круга комплексной плоскости ρ на левую полуплоскость, приведут к тому, что одним из условий равенства модулей всех корней уравнения (1.2) единице будет условие действительности корней некоторого уравнения m-й степени с коэффициентами, являющимися линейными комбинациями коэффициентов уравнения (1.2). При $m=3$ это условие будет доставлять кусок поверхности четвертого порядка довольно сложного вида в пространстве коэффициентов $a_1 a_2 a_3$.

Однако оказывается, что аналог квадрату (фиг. 1), т. е. некоторый гиперпараллелепипед в пространстве $a_1, \ldots, a_m$ с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, можно определить довольно элементарно. К этому мы и перейдем.

Найдем такие интервалы изменения коэффициента a_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ уравнения (1.2), что если a_μ принадлежит интервалу, то тривиальное решение системы (1.1) неустойчиво независимо от величины остальных $m-1$ коэффициентов. Поскольку

$$a_\mu = \sum \rho_{j_1} \ldots \rho_{j_\mu}$$

где ρ_j $(j = 1, \ldots, 2m)$ — корни уравнения (1.2), а сумма берется по всем сочетаниям индексов из последовательности $1, \ldots, 2m$, то очевидно, что интервал

$$C_{2m}^{\mu} < a_\mu < \infty \tag{1.4}$$

(C_{2m}^{μ} — число сочетаний из $2m$ элементов по μ) является одним из искомых интервалов. Если μ — нечетное число:

$$\mu = 2\nu - 1 \qquad \left(\nu = 1, \ldots, \operatorname{ent} \tfrac{1}{2}(m+1)\right)$$

то интервал

$$-\infty < a_{2\nu-1} < -C_{2m}^{2\nu-1} \tag{1.5}$$

является другим из искомых интервалов.

Граница снизу в (1.4) [сверху в (1.5)] является точной, так как если $\rho_1 = \ldots = \rho_{2m} = 1$ $(\rho_1 = \ldots = \rho_{2m} = -1)$ и элементарные делители матрицы $X(\omega) - \rho I_{2m}$ простые, то тривиальное решение системы (1.1) устойчиво и при этом

$$a_\mu = C_{2m}^{\mu} \quad (a_{2\nu-1} = -C_{2m}^{2\nu-1})$$

Отыскание интервалов, аналогичных (1.5), для четных коэффициентов уже не столь просто.

Пусть $\mu = 2$ и будем определять наименьшее значение коэффициента

$$a_2 = \rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_{2m} + \rho_2\rho_3 + \ldots + \rho_2\rho_{2m} + \ldots + \rho_{2m-1}\rho_{2m}$$

при котором все корни уравнения (1.2) $(m \geqslant 2)$ по модулю равны единице. Допустим $2k$ корней равны (-1), а $2m-2k$ равны единице. Заметим, что число отрицательных корней уравнения (1.2) не может быть нечетным, поскольку свободный член уравнения равен единице. Можно считать, что $2k \leqslant m$, ибо если $2k > m$, то мы изменили бы знаки у всех корней, отчего величина a_2 не изменилась бы. Тогда $C_{2k}^{2} + C_{2m-2k}^{2}$ слагаемых в выражении для a_2 будут равны единице, а $4k(m-k)$ слагаемых будут равны (-1) и будем иметь

$$a_2 = C_{2k}^2 + C_{2m-2k}^2 - 4k(m-k) = 8k^2 - 8mk + 2m^2 - m$$
$$\frac{da_2}{dk} = 8(2k-m)$$

Интересующее нас наименьшее значение a_2 будет достигаться при $2k=m$, если m — четное число, и при $2k=m-1$, если m — нечетное число. При $2k=m$ имеем $a_2=-m$, а при $2k=m-1$ будем иметь, что $a_2=-(m-2)$. Следовательно, при выполнении неравенства

$$a_2 < -m + 1 - (-1)^m \tag{1.6}$$

тривиальное решение системы (1.1) неустойчиво независимо от величины остальных коэффициентов уравнения (1.2).

Применим неравенства (1.4), (1.5) и (1.6) к системе (1.1) шестого порядка, для которой уравнение (1.2) имеет вид:

$$\rho^6 - a_1\rho^5 + a_2\rho^4 - a_3\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0$$

Построим параллелепипед:

$$-6 \leqslant a_1 \leqslant 6, \qquad -1 \leqslant a_2 \leqslant 15, \qquad -20 \leqslant a_3 \leqslant 20$$

Внешность параллелепипеда принадлежит области неустойчивости, т. е. при выполнении любого из шести неравенств

$$a_1 < -6, \qquad a_1 > 6, \qquad a_2 < -1, \quad a_2 > 15, \qquad a_3 < -20, \qquad a_3 > 20$$

тривиальное решение системы (1.1) (при $m=3$) неустойчиво. Каждое из этих шести неравенств, рассматриваемое в отдельности, улучшить нельзя, поскольку область устойчивости касается построенного параллелепипеда в каждой из шести его граней.

Однако для остальных четных коэффициентов уравнения (1.2) получить правые части неравенств, аналогичных неравенству (1.6), в виде формул нам не удалось и пришлось ограничиться вычислением.

Пусть $\mu = 4$ и будем определять наименьшее значение коэффициента

$$a_4 = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 + \ldots + \rho_{2m-3}\rho_{2m-2}\rho_{2m-1}\rho_{2m}$$

при котором все корни уравнения (1.2) $(m \geqslant 4)$ по модулю равны единице. Допустим $2k$ $(2k \leqslant m)$ корней равны (-1), а $2m-2k$ равны единице. Обозначим число слагаемых, равных (-1), в выражении для a_4 через N_{2k}. Тогда

$$a_4 = -N_{2k} + (C_{2m}^4 - N_{2k}) = C_{2m}^4 - 2N_{2k}$$

и задача состоит в разыскании наибольшего значения N_{2k} по всем натуральным k, удовлетворяющим неравенству $2k \leqslant m$. Очевидно,

$$N_2 = C_2^1 C_{2m-2}^3, \qquad N_4 = C_4^1 C_{2m-4}^3 + C_4^3 C_{2m-4}^1, \ldots$$

$$N_{2k} = C_{2k}^1 C_{2m-2k}^3 + C_{2k}^3 C_{2m-2k}^1 = \frac{4}{3}(-k^2 + mk)(4k^2 - 4mk + 2m^2 - 3m + 2)$$

Приведем результат вычисления для $m = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ наибольшего значения N_{2k} (отметив значение k, при котором оно достигается) и интересующего нас наименьшего значения a_4:

$m=$	4	5	6	7	8	9
$(N_{2k})_{\text{наиб}} =$	40	112	256	520	928	1560
$2k=$	2	2	4	4	4	6
$(a_4)_{\text{наим}} =$	—10	—14	—17	—36	—36	—60

В общем случае для четного коэффициента $a_{2\nu}$ задача заключается в разыскании наибольшего значения N_{2k} по всем натуральным k, удовлетворяющим неравенству $2k \leqslant m$. При этом

$$N_2 = C_2^1 C_{2m-2}^{2\nu-1}, \quad N_4 = C_4^1 C_{2m-4}^{2\nu-1} + C_4^3 C_{2m-4}^{2\nu-3}$$

$$N_6 = C_6^1 C_{2m-6}^{2\nu-1} + C_6^3 C_{2m-6}^{2\nu-3} + C_6^5 C_{2m-6}^{2\nu-5}$$

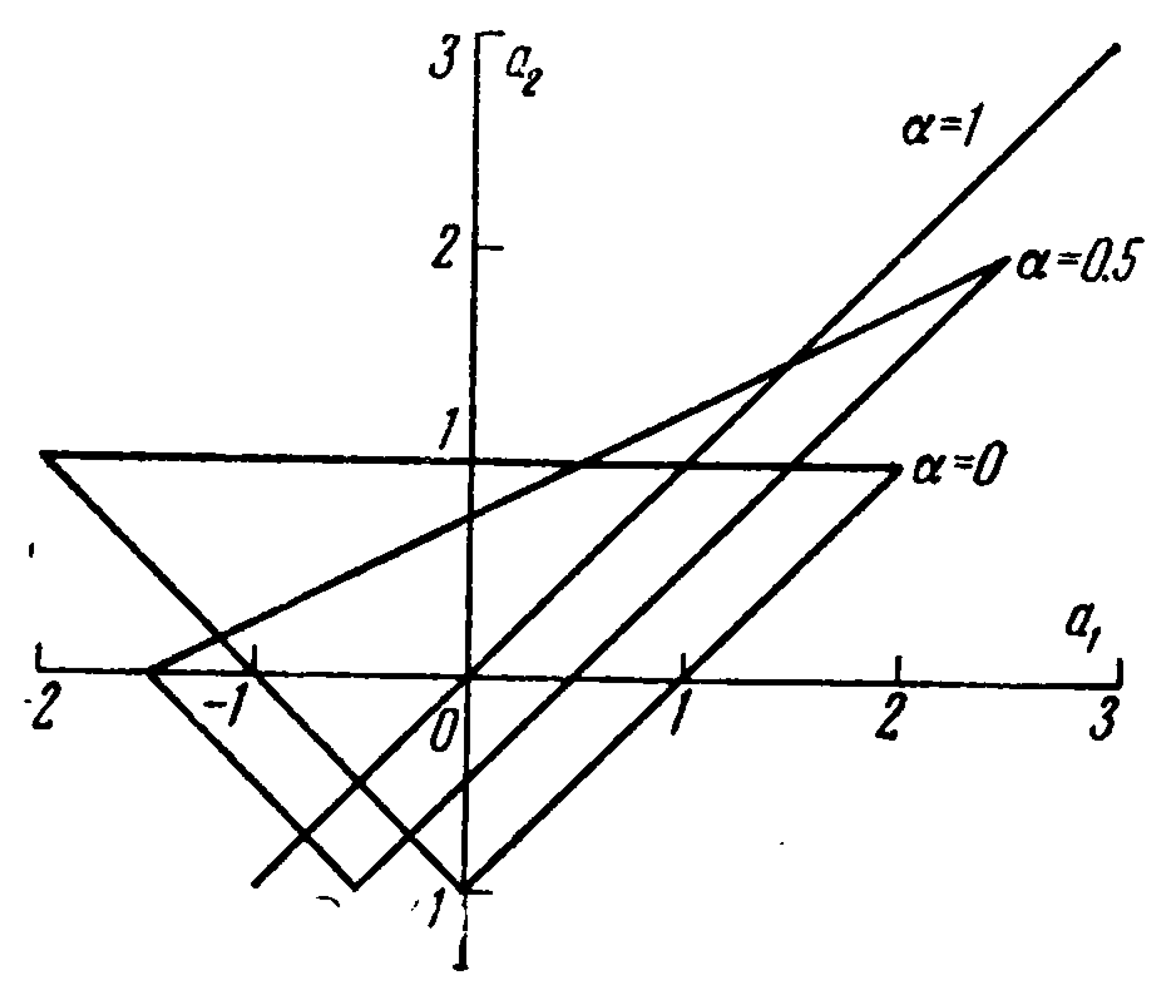
. . . .

$$N_{2k} = C_{2k}^{1} C_{2m-2k}^{2\nu-1} + C_{2k}^{3} C_{2m-2k}^{2\nu-3} + \ldots + C_{2k}^{2k-1} C_{2m-2k}^{2\nu-2k+1}$$

§ 2. Рассмотрим теперь общий случай, соответствующий уравнению (0.2), в котором будем предполагать $0 < \alpha < 1$, рассматривая случай $\alpha = 1$ как предельный. Условия

$$|a_\nu| \leqslant C_n^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{2.1}$$

являются необходимыми для устойчивости тривиального решения системы (0.1), так как при нарушении любого из них по крайней мере один из корней уравнения (0.2) по модулю превысит единицу. Впрочем, можно получить результат более точный.



Фиг. 2

Ограничимся отысканием интервалов изменения коэффициента a_1, для которых тривиальное решение системы (0.1) неустойчиво, независимо от величины $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$. Поскольку $\rho_1 \ldots \rho_n = \alpha$, то допустим, что

$$\rho_1 = \ldots = \rho_{n-k} = 1,$$

$$\rho_{n-k+1} = \ldots = \rho_n = \sqrt[k]{\alpha} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

и будем иметь при этом

$$a_1 = \rho_1 + \ldots + \rho_n = n - k + k\sqrt[k]{\alpha} \tag{2.2}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$n - k + k\sqrt[k]{\alpha} > n - (k+1) + (k+1)\sqrt[k+1]{\alpha} \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

Действительно, оно может быть записано в виде

$$f(z) \equiv kz^{k+1} - (k+1)z^k + 1 > 0 \qquad (z = \alpha^{\frac{1}{k(k+1)}},\ 0 < z < 1)$$

что выполнено, поскольку

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 0, \qquad f'(z) = -k(k+1)z^{k-1}(1-z) < 0 \qquad (0 < z < 1)$$

Итак, наибольшее значение a_1 при условиях

$$|\rho_\nu| \leqslant 1] \quad (\nu - 1, \ldots, n), \qquad \rho_1 \ldots \rho_n = \alpha \tag{2.3}$$

дается [1] выражением (2.2) при $k = 1$, т. е. равно $n - 1 + \alpha$.

[1] Вероятно, $\rho_1 = \ldots = \rho_{n-1} = 1$, $\rho_n = \alpha$ доставляют наибольшие значения и остальных коэффициентов уравнения (0.2) при условиях (2.3).

Наименьшее значение a_1 при условиях (2.3) равно $1-\alpha-n$, если n — четное, и $1+\alpha-n$, если n — нечетное. Таким образом, если

$$a_1 < -n+1-(-1)^n\alpha \quad \text{или} \quad a_1 > n-(1-\alpha) \tag{2.4}$$

то тривиальное решение системы (0.1) неустойчиво.

Необходимые и достаточные условия того, что все корни уравнения (0.2) лежат внутри единичного круга, даются теоремой Шура [8,9] (для уравнения (1.2) теорема Шура отказывает). Заметим, что алгоритм Шура столь же трудоемок, как и сведѐние вопроса к задаче Гурвица.

Для иллюстрации приведем области устойчивости в пространстве коэффициентов уравнения (0.2) при $n=2$ и $n=3$.

При $n=2$ область устойчивости определяется неравенствами $0<\alpha\leqslant 1$, $|a_1|\leqslant 1+\alpha$ (точки $\alpha=1$, $a_1=\pm 2$ подлежат дополнительному исследованию). При $n=3$ область устойчивости определяется неравенствами $a_2>a_1-1+\alpha$, $a_2<\alpha a_1+1-\alpha^2$, $a_2>-a_1-\alpha-1$ и представляет при фиксированном α внутренность треугольника в плоскости a_1, a_2 (фиг. 2). Периметр треугольника подлежит дополнительному исследованию.

§ 3. Следуя Ляпунову [2,10], наряду с системой (0.1) рассмотрим систему

$$d\mathrm{x}/dt = \varepsilon\mathrm{A}(t)\mathrm{x} \tag{3.1}$$

и будем искать фундаментальную матрицу $\mathrm{X}(t,\varepsilon)$ в виде ряда

$$\mathrm{X}(t,\varepsilon)=\mathrm{X}_0(t)+\varepsilon\mathrm{X}_1(t)+\varepsilon^2\mathrm{X}_2(t)+\ldots, \qquad \mathrm{X}_0(0)=\mathrm{I}_n$$

$$\mathrm{X}_k(0)=0 \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{3.2}$$

Подставляя в (3.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим последовательность матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathrm{X}_0}{dt}=0, \qquad \frac{d\mathrm{X}_k}{dt}=\mathrm{A}(t)\mathrm{X}_{k-1} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

интегрирование которых при указанных начальных условиях даст

$$\mathrm{X}_0(t)=\mathrm{I}_n, \qquad \mathrm{X}_k(t)=\int_0^t \mathrm{A}(t_1)\mathrm{X}_{k-1}(t_1)\,dt_1 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Как показал Ляпунов, матричный ряд (3.2) абсолютно сходится при всяком ε и притом равномерно в каждом конечном интервале изменения t. Полагая $\varepsilon=1$, запишем фундаментальную матрицу системы (0.1):

$$\mathrm{X}(\omega)=\mathrm{X}(\omega;1)=\mathrm{I}_n+\mathrm{X}_1(\omega)+\mathrm{X}_2(\omega)+\ldots$$

где

$$\mathrm{X}_1(\omega)=\int_0^\omega \mathrm{A}(t_1)\,dt_1$$

$$\mathrm{X}_k(\omega)=\int_0^\omega dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{k-1}}\mathrm{A}(t_1)\ldots\mathrm{A}(t_k)\,dt_k \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{3.3}$$

Первый коэффициент уравнения (0.2) равен

$$a_1=\operatorname{sp}\mathrm{X}(\omega)=n+a_1^{(1)}+\ldots+a_1^{(k)}+\ldots \tag{3.4}$$

где

$$a_1^{(1)}=\operatorname{sp}\int_0^\omega \mathrm{A}(t_1)\,dt_1, \qquad a_1^{(k)}=\operatorname{sp}\int_0^\omega dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{k-1}}\mathrm{A}(t_1)\ldots\mathrm{A}(t_k)\,dt_k \tag{3.5}$$

Перейдем теперь к вычислению других коэффициентов уравнения (0.2). Известно, что в силу периодичности матрицы-функции $A(t)$ $X(t+\omega)$ также является матрицей решений системы (0.1). При этом имеет место тождество $X(t+\omega) \equiv X(t)X(\omega)$, ибо правая часть тождества также является матрицей решений системы (0.1). Поскольку в силу условия $X(0) = 1_n$ обе части тождества совпадают при $t = 0$, то по теореме единственности они равны при любом t. Применяя исходное тождество $n-1$ раз, получим, что $X(t + (n-1)\omega) \equiv X(t) X^{n-1}(\omega)$, и полагая $t = \omega$, будем иметь

$$X(n\omega) = X^n(\omega) \tag{3.6}$$

Коэффициенты a_ν $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ уравнения (0.2) равны сумме всех главных миноров порядка ν матрицы $X(\omega)$, т. е.

$$a_\nu \equiv \sigma_\nu(X(\omega)) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1;\ \sigma_1(X(\omega)) \equiv \operatorname{sp} X(\omega))$$

Для любой матрицы C справедливо соотношение

$$\sigma_1(C^2) = \sigma_1^2(C) - 2\sigma_2(C)$$

ибо $\sigma_1(C)$ — сумма собственных чисел матрицы C, а $\sigma_2(C)$ — сумма попарных произведений этих чисел.

Учитывая (3.6), будем иметь

$$a_2 \equiv \sigma_2(X(\omega)) = \frac{1}{2}[\sigma_1^2(X(\omega)) - \sigma_1(X(2\omega))]$$

или

$$a_2 = \frac{1}{2}[a_1^2 - a_1(2\omega)] \tag{3.7}$$

При этом для вычисления $a_1(2\omega)$ следует в формулах для a_1 вместо ω подставлять 2ω.

В общем случае коэффициенты a_ν подсчитываются через следы матриц $X^k(\omega)$ по известным формулам Варинга (см., например [11], § 127):

$$a_\nu = (-1)^\nu \sum (-1)^{j_1+\ldots+j_\nu} \frac{1}{1^{j_1}2^{j_2}\ldots\nu^{j_\nu} j_1!\ldots j_\nu!} a_1^{j_1} a_1(2\omega)^{j_2} \ldots a_1(\nu\omega)^{j_\nu}$$

Здесь сумма берется по всем целым неотрицательным $j_1, \ldots, j_\nu$, удовлетворяющим условию

$$j_1 + 2j_2 + \ldots + \nu j_\nu = \nu,$$

а

$$a_1(k\omega) = \operatorname{sp} X(k\omega) = \operatorname{sp} X^k(\omega).$$

§ 4. Рассмотрим систему m линейных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-непрерывными периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} + p_{i1}(t)y_1 + \ldots + p_{im}(t)y_m = 0, \quad p_{ij}(t) = p_{ji}(t) \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

Запишем ее в виде векторного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2\mathrm{y}}{dt^2} + P(t)\mathrm{y} = 0, \qquad \mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad P(t+\omega) = P(t) = \| p_{ij}(t) \|_1^m \tag{4.1}$$

Система (4.1) является частным случаем системы (1.1), если x обозначает прямую сумму векторов y и $d\mathrm{y}/dt$, а

$$\mathrm{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(t) & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}(t) = \mathrm{J}_{2m}\mathrm{H}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{P}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Выпишем выражения (3.3):

$$\mathrm{X}_\varkappa(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_\varkappa & \mathrm{D}_\varkappa \\ \mathrm{F}_\varkappa & \mathrm{G}_\varkappa \end{pmatrix} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{G}_1 = 0 \qquad \mathrm{D}_1 = \omega\,\mathrm{I}_m, \qquad \mathrm{F}_1 = -\int_0^\omega \mathrm{P}_1\,dt_1$$

$$\mathrm{B}_2 = -\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} \mathrm{P}_2\,dt_2, \qquad \mathrm{D}_2 = \mathrm{F}_2 = 0, \qquad \mathrm{G}_2 = -\int_0^\omega t_1\,\mathrm{P}_1\,dt_1$$

$$\mathrm{B}_{2k-1} = \mathrm{G}_{2k-1} = 0$$

$$\mathrm{D}_{2k-1} = (-1)^{k-1}\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2k-3}} t_{2k-2}\,\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\ldots\mathrm{P}_{2k-2}\,dt_{2k-2}$$

$$\mathrm{G}_{2k-1} = (-1)^k\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2k-2}} \mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\ldots\mathrm{P}_{2k-1}\,dt_{2k-1}$$

$$\mathrm{B}_{2k} = (-1)^k\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2k-2}} \mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\ldots\mathrm{P}_{2k}\,dt_{2k}, \quad \mathrm{D}_{2k} = \mathrm{F}_{2k} = 0$$

$$\mathrm{G}_{2k} = (-1)^k\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2k-2}} t_{2k-1}\,\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\ldots\mathrm{P}_{2k-1}\,dt_{2k-1}$$

где $k = 2, 3\ldots$ и для сокращения письма обозначено $\mathrm{P}_i = \mathrm{P}(t_i)$.

Выпишем выражение для $\mathrm{X}(\omega)$:

$$\mathrm{X}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_{11}(\omega) & \mathrm{X}_{12}(\omega) \\ \mathrm{X}_{21}(\omega) & \mathrm{X}_{22}(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}_{11}(\omega) = \mathrm{I}_m - \int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} \mathrm{P}_2\,dt_2 + \int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} \mathrm{P}_2\,dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} \mathrm{P}_4\,dt_4 - \ldots$$

$$\mathrm{X}_{12}(\omega) = \omega\,\mathrm{I}_m - \int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} t_2\,\mathrm{P}_2\,dt_2 + \ldots$$

$$\mathrm{X}_{21}(\omega) = -\int_0^\omega \mathrm{P}_1\,dt_1 + \int_0^\omega \mathrm{P}_1\,dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} \mathrm{P}_3\,dt_3 - \ldots$$

$$\mathrm{X}_{22}(\omega) = \mathrm{I}_m - \int_0^\omega \mathrm{P}_1\,dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 + \int_0^\omega \mathrm{P}_1\,dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} P_3\,dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 - \ldots$$

Первый коэффициент уравнения (1.2) равен

$$a_1 = \mathrm{sp}\,\mathrm{X}(\omega) = 2m - a_1^{(1)} + a_1^{(2)} - \ldots + (-1)^k a_1^{(k)} + \ldots \tag{4.2}$$

где

$$a_1^{(1)} = \mathrm{sp}\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} (\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)\, dt_2, \quad a_1^{(2)} = \mathrm{sp}\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} (\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_2\mathrm{P}_4)\, dt_4$$

$$a_1^{(k)} = \mathrm{sp}\Big[\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2k-1}} \mathrm{P}_1\mathrm{P}_3 \ldots \mathrm{P}_{2k-1}\, dt_{2k} + \int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2k-1}} \mathrm{P}_2\mathrm{P}_4 \ldots \mathrm{P}_{2k}\, dt_{2k}\Big] \tag{4.3}$$

Известно, что след произведения двух квадратных матриц не зависит от порядка расположения сомножителей, отсюда следует инвариантность следа произведения любого числа квадратных матриц относительно циклической перестановки сомножителей.

Выполним, следуя Ляпунову [10], преобразования формулы (4.3). Поскольку

$$\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} \mathrm{P}_2\, dt_2 = \int_0^\omega \mathrm{P}_2\, dt_2 \int_{t_2}^\omega dt_1 = \int_0^\omega (\omega - t_2)\, \mathrm{P}_2\, dt_2 = \int_0^\omega (\omega - t_1)\, \mathrm{P}_1\, dt_1$$

то имеем

$$a_1^{(1)} = \mathrm{sp}\Big[\int_0^\omega \mathrm{P}_1\, dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 + \int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} \mathrm{P}_2\, dt_2\Big] =$$

$$= \mathrm{sp}\,\Big[\int_0^\omega t_1 \mathrm{P}_1\, dt_1 + \int_0^\omega (\omega - t_1)\, \mathrm{P}_1\, dt_1\Big] = \omega\, \mathrm{sp}\int_0^\omega \mathrm{P}(t)\, dt \tag{4.4}$$

Подобное сокращение возможно также и в общем случае: кратные интегралы порядка $2k$, которые фигурируют в формуле (4.3), сводятся к интегралу порядка k. Именно, оба интеграла в формуле (4.3) могут быть рассматриваемы как интегралы, распространенные на переменные $t_1, t_2, \ldots, t_{2k}$, удовлетворяющие неравенствам $\omega > t_1 > t_2 > \ldots t_{2k} > 0$.

Проведем интегрирование для первого интеграла относительно переменных $t_2, t_4, \ldots, t_{2k}$ и для второго интеграла относительно переменных $t_1, t_3, \ldots, t_{2k-1}$. Тогда, вводя для k оставшихся переменных обозначения $t_1, t_2, \ldots, t_k$, получим (4.5)

$$a_1^{(k)} = \mathrm{sp}\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} (\omega - t_1 + t_k)(t_1 - t_2) \ldots (t_{k-1} - t_k)\, \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_k\, dt_k$$

Эта формула аналогична формуле (10) Ляпунова [10]. Если ввести матрицу-функцию

$$\int \mathrm{P}(t)\, dt = \mathrm{Q}(t)$$

и провести интегрирование для первого интеграла формулы (4.3) относительно переменных $t_1, t_3, \ldots, t_{2k-1}$, а для второго интеграла относительно переменных $t_2, t_4, \ldots, t_{2k}$, выполняя при этом циклическую перестановку в произведении матриц и вводя для k оставшихся переменных обозначения $t_1, t_2, \ldots, t_k$, то получим

$$a_1^{(k)} = \mathrm{sp} \int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} (\mathrm{S} - \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_k)(\mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_2)\ldots(\mathrm{Q}_{k-1} - \mathrm{Q}_k)\, dt_k \tag{4.6}$$

где

$$\mathrm{S} = \int_0^\omega \mathrm{P}(t)\, dt \equiv \omega \mathrm{P}_{\text{ср}}, \quad \mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}(t_i)$$

Формула (4.6) аналогична формуле (11) Ляпунова [10]. Для первых трех членов ряда (4.2) могут быть получены формулы, не содержащие кратных интегралов. Именно, представим периодическую матрицу-функцию $\mathrm{P}(t)$ в виде $\mathrm{P}(t) = \mathrm{P}_{\text{ср}} + \ddot{\Phi}(t)$, где периодическая матрица-функция $\Phi(t)$ удовлетворяет условию $\Phi_{\text{ср}} = 0$. Опуская выкладки, аналогичные приведенным в пп. 4, 15, 16, 17 [10], выпишем окончательный результат

$$a_1^{(1)} = \omega^2 \,\mathrm{sp}\mathrm{P}_{\text{ср}}, \quad a_1^{(2)} = \mathrm{sp}\left[\frac{1}{12}\omega^4 \mathrm{P}_{\text{ср}}^2 - \omega \int_0^\omega \dot{\Phi}^2\, dt\right]$$

$$\begin{aligned} a_1^{(3)} = \mathrm{sp}\Big[\frac{1}{360}\omega^6 \mathrm{P}_{\text{ср}}^3 - \frac{1}{6}\omega^3 \mathrm{P}_{\text{ср}} \int_0^\omega \dot{\Phi}^2\, dt + \\ + 4\omega \mathrm{P}_{\text{ср}} \int_0^\omega \Phi^2\, dt - 2\omega \int_0^\omega \Phi\dot{\Phi}^2\, dt + \omega^2 \mathrm{P}_{\text{ср}} \int_0^\omega \dot{\Phi}\Phi\, dt\Big] \end{aligned} \tag{4.7}$$

Последняя из формул (4.7) аналогична формуле (37) Ляпунова [10]; в ней последнее слагаемое в скалярном случае ($m = 1$) обращается в нуль.

§ 5. Допустим, что все элементы симметрической матрицы $\mathrm{P}(t)$ неположительны:

$$p_{ij}(t) \leqslant 0 \quad (i, j = 1, \ldots, m;\ 0 \leqslant t \leqslant \omega) \tag{5.1}$$

Все члены ряда (4.2) положительны и, следовательно, $a_1 > 2m$. На основании неравенства (1.4) при $\mu = 1$ отсюда получаем следующую теорему.

Если все коэффициенты в системе (4.1) могут принимать только отрицательные или равные нулю значения, то тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво.

Эта теорема является распространением теоремы I Ляпунова (п. 49 [2]) на системы (4.1). Ляпуновым доказана теорема (п. 52 [2]), которую для системы (4.1) можно сформулировать так.

Если все собственные значения матрицы $\mathrm{P}(t)$ (являющиеся действительными) неположительны для всех значений t $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$, то тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво.

Как замечает Ляпунов, теорема I (п. 49 [2]) заключается в этой теореме как некоторый частный случай. Возникает вопрос: можно ли получить другие признаки неустойчивости системы (4.1), которые в скалярном случае ($m = 1$) обращаются в теорему I Ляпунова (п. 49 [2])?

С другой стороны, для сформулированной в начале параграфа теоремы нет никакой необходимости требовать, чтобы матрица $P(t)$ была симметрической. Дело в том, что и в самом общем случае системы (0.1) условия (2.1) являются необходимыми для того, чтобы все решения системы были ограниченными. Из формул (3.5) следует, что если все элементы матрицы $A(t)$ неотрицательны, то все члены ряда (3.4) положительны и $a_1 > n$, т. е. у системы (0.1) будут неограниченные решения. Кроме того, в этом случае по теореме Перрона ([12], гл. XIII) можно будет утверждать существование вектор-решения $x_0(t)$ уравнения (0.1) с неотрицательными координатами такого, что $x_0(t+\omega) = \rho_0 x_0(t)$ $(\rho_0 > 1)$, при этом ρ_0 будет наибольшим по модулю корнем уравнения (0.2).

Само же по себе утверждение о неустойчивости тривиального решения системы (0.1) при условиях

$$a_{ij}(t) \geqslant 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n;\ 0 \leqslant t \leqslant \omega) \tag{5.2}$$

не являются следствием известных положений лишь в случае $\operatorname{sp} A(t) \equiv 0$, заключающем в себе и системы (0.1) канонического вида. Если же $\operatorname{sp} A(t) \not\equiv 0$, то из условий (5.2) следует

$$\int_0^\omega \operatorname{sp} A(t)\, dt > 0$$

что определяет неустойчивость тривиального решения (см. введение).

Некоторые результаты, относящиеся к случаю $p_{ij}(t) \geqslant 0$ $(i.\ j = 1, \ldots m;$ $0 \leqslant t \leqslant \omega)$ и к общему случаю знакопеременных элементов матрицы $P(t)$, приведены в докторской диссертации автора «Некоторые вопросы устойчивости периодических движений» (Институт механики АН СССР, 1957).

Автор приносит глубокую благодарность своему учителю Н. Г. Четаеву за ценные советы при обсуждении работы.

Поступила 24 I 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Floquet G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Ann. de l'Ecole Normale, 2-e serie, t. 12, 1883, pp. 47–88.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.
4. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXIII, № 3, 1950, стр 445—448.
5. Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. II, № 1—2, 1889, стр. 1—94; Собр. соч., изд. АН СССР, т. I, 1954, стр. 327—401.
6. Крейн М. Г. и Неймарк М. А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. ДНТВУ, 1936.
7. Herglotz G. Über die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheitskreis. Math. Z., Bd. 19, 1923, S. 26—34.
8. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. J. reine angew. Math., № 148, 1918, S. 122—145.
9. Мейман Н. Н. Некоторые вопросы расположения нулей полиномов. УМН, т. IV, вып. 6 (34), 1949, стр. 154—188.
10. Ляпунов А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients pèriodiques. Зап. Акад. наук по физ.-матем. отд., 8-я серия, т. XIII, № 2, 1902, стр. 1—70; Собр. соч., изд. АН СССР, т. II, 1956, стр. 410—472.
11. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры, изд. IV, ГИТТЛ, 1941.
12. Гантмахер. Ф. Р. Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.