Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ[1]

А. А. Богоявленский

(Москва)

1. Некоторые сведения о частных решениях задачи. Задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести может быть сведена к отысканию общих или частных решений следующей системы дифференциальных уравнений:

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + Mg\,(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2)$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp + Mg\,(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3) \qquad (1.1)$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq + Mg\,(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \qquad (1.2)$$

где p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения на подвижные оси OX, OY, OZ, неизменно связанные с телом, направленные по главным осям эллипсоида инерции, построенного относительно неподвижной точки, A, B, C — главные моменты инерции относительно осей OX, OY, OZ, M — масса всего тела, g — ускорение силы тяжести, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела в подвижной системе координат, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы вертикальной оси OZ_1, вдоль которой действует сила тяжести.

Общее решение системы уравнений (1.1) и (1.2) зависит от шести произвольных постоянных. В силу соотношения $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ число произвольных постоянных, от которых зависят функции p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 будет равно пяти.

Уравнения (1.1) и (1.2) не содержат явно время t, и последний множитель их равен единице [32]. Поэтому для сведения задачи к квадратурам достаточно иметь лишь четыре независимых первых интеграла.

Известны три классических алгебраических первых интеграла:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = h$$

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = k \qquad (1.3)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = l_0^2 = 1$$

---

[1] Настоящая статья является сокращенным изложением кандидатской диссертации автора «Некоторые необходимые условия существования однозначных решений в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки», защищенной в Институте механики АН СССР в 1950 г. Добавлено получение условий существования случая Гриоли (1947 г.), для которого в диссертации были получены только перманентные вращения.

Первый из них есть интеграл живой силы, второй — интеграл момента количества движения относительно вертикальной оси и третий — интеграл, выражающий свойство направляющих косинусов.

Четвертый алгебраический первый интеграл при произвольных значениях коэффициентов уравнений (1.1) и (1.2) не найден. При некоторых ограничениях на расположение центра тяжести и на значения A, B, C такой интеграл можно найти.

До второй половины XIX столетия были найдены и изучены следующие случаи интегрируемости.

1. Случай Эйлера — Пуансо $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, четвертый алгебраический первый интеграл

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const}$$

2. Случай Лагранжа — Пуассона $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$, четвертый алгебраический первый интеграл

$$r = \text{const}$$

3. Случай полной кинетической симметрии $A = B = C$, четвертый алгебраический первый интеграл

$$x_0p + y_0q + z_0r = \text{const}$$

В 1888 г. появляется замечательное исследование С. В. Ковалевской [1]. В нем был открыт и изучен новый случай интегрируемости, носящий ее имя, а именно, при условиях

$$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0$$

(поворотом осей в плоскости XY можно всегда сделать $y_0 = 0$) существует четвертый алгебраический первый интеграл

$$[C(p^2 - q^2) + Mgx_0\gamma_1]^2 + [2Cpq - Mgx_0\gamma_2]^2 = \text{const}$$

Мемуар С. В. Ковалевской вызвал большое число исследований, относящихся к отысканию новых частных решений общей задачи, частных решений вновь открытого случая, а также выяснению геометрической картины и подробностей движения найденных частных решений.

Ряд вопросов, связанных с геометрическим представлением различных случаев движения, с отысканием частных решений общей задачи, был решен Н. Е. Жуковским, А. М. Ляпуновым, С. А. Чаплыгиным, В. А. Стекловым, Б. К. Млодзеевским и другими.

С. В. Ковалевская поставила перед собой задачу отыскать все случаи, в которых общее решение системы (1.1) и (1.2) выражается однозначными функциями t, не имеющими других особенностей, кроме полюсов для всех конечных значений t, которая рассматривается как комплексная переменная.

Эти функции разлагаются в ряды вида

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{t^{n_1}}(p_0 + p_1t + p_2t^2 + \ldots), & \gamma_1 &= \frac{1}{t^{m_1}}(\gamma_0' + \gamma_1't + \gamma_2't^2 + \ldots)\\
q &= \frac{1}{t^{n_2}}(q_0 + q_1t + q_2t^2 + \ldots), & \gamma_2 &= \frac{1}{t^{m_2}}(\gamma_0'' + \gamma_1''t + \gamma_2''t^2 + \ldots)\\
r &= \frac{1}{t^{n_3}}(r_0 + r_1t + r_2t^2 + \ldots), & \gamma_3 &= \frac{1}{t^{m_3}}(\gamma_0''' + \gamma_1'''t + \gamma_2'''t^2 + \ldots)
\end{aligned} \qquad (1.4)$$

где n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 — положительные целые числа.

Для того чтобы возможно было проинтегрировать систему (1.1) и (1.2) в общем случае рядами вида (1.4), которые содержат пять произвольных постоянных, необходимо, чтобы коэффициенты этих рядов удовлетворяли определенным условиям, одно из которых и дало новый случай интегрируемости, рассмотренный С. В. Ковалевской.

Приведем две теоремы, которые полностью завершают вопрос об отыскании случаев однозначных решений при произвольных начальных данных (т. е. об отыскании общих решений).

Теорема С. В. Ковалевской [2]. Уравнения (1.1) и (1.2) в общем случае не имеют однозначных решений, допускающих пять произвольных постоянных и не имеющих на всей плоскости переменного t других особых точек, кроме полюсов. Исключение составляют случаи:

$$(1)\quad A = B = C, \qquad (3)\quad A = B,\ x_0 = y_0 = 0$$

$$(2)\quad x_0 = y_0 = z_0 = 0 \qquad (4)\quad A = B = 2C,\ z_0 = 0 \qquad (1.5)$$

Теорема А. М. Ляпунова [11]. Из всех случаев, когда постоянные A, B, C, x_0, y_0, z_0 вещественны и A, B, C отличны от нуля, указанные случаи (1.5) суть единственные, в которых функции p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3, определяемые уравнениями (1.1) и (1.2), однозначны при всяких начальных значениях.

Рассматривая ряды вида (1.4), С. В. Ковалевская берет для постоянных n_i и m_i следующие значения: $n_i = 1$, $m_i = 2$ $(i = 1, 2, 3)$, не рассматривая вопроса о том, единственная ли эта система значений или нет.

При исследовании показателей n_i, m_i, предпринятом П. А. Некрасовым и Г. Г. Аппельротом [5,6], и установлении указанной выше теоремы А. М. Ляпуновым обнаружилось, что С. В. Ковалевской пропущен еще один частный случай — так называемый случай локсодромического маятника.

Метод, предложенный С. В. Ковалевской в задаче о движении твердого тела, не был развит далее для этой задачи.

Обнаружить существование частных решений методом С. В. Ковалевской, кроме случая локсодромического маятника, никому не удалось.

Все вновь открытые частные решения были найдены путем или очень умелого использования подлежащих рассмотрению дифференциальных уравнений, или изучения некоторых частных свойств искомого четвертого алгебраического первого интеграла. Общего метода, подобного методу С. В. Ковалевской, для отыскания частных решений не было найдено.

Была установлена следующая *теорема Г. Г. Аппельрота* [5]. В случае трех неравных моментов инерции не существует не только общих, но и частных интегралов дифференциальных уравнений движения твердого тяжелого тела, в которых порядок полюса для p, q, r был бы более 1, а для γ_1, γ_2, γ_3 — больше 2; в случае же $A = B$, $y_0 = 0$, $A \neq C$, $x_0 \neq 0$ может существовать ряд частных интегралов с полюсами третьего порядка для p и q.

Г. Г. Аппельрот не дал примера частного решения для подтверждения теоремы.

В настоящей работе эта теорема подтверждается для случая Д. Н. Горячева — С. А. Чаплыгина.

Из теоремы А. М. Ляпунова следует, что не может быть новых случаев, кроме (1.5), когда могут быть найдены однозначные общие решения (т. е. однозначные решения при произвольных начальных значениях). Если накладывать ограничения на значения постоянных интеграла живой силы (h), интеграла момента количества движения относительно вертикальной оси (k) и на значения A, B, C, x_0, y_0, z_0, то могут иметь место частные случаи решения задачи. Но характер этих ограничений в общем виде никем не изучен.

Такая задача не была поставлена и не следовала из метода С. В. Ковалевской.

С. А. Чаплыгиным была сделана попытка в неопубликованной рукописи [27] рассмотреть получение случаев интегрируемости единым методом.

В настоящей работе показывается, что метод С. В. Ковалевской применим и для нахождения частных случаев интегрируемости уравнений.

Такой прием позволяет находить только необходимые условия существования однозначных частных решений. Для проверки достаточности подобных условий необходимо каждый раз показывать, что уравнения (1.1) и (1.2) при найденных условиях интегрируются при помощи однозначных функций времени, или хотя бы найти четвертый алгебраический интеграл, кроме общеизвестных (1.3).

С. А. Чаплыгин показал [19], что «рассматриваемая задача не допускает частного линейного интеграла ни в каких других случаях, кроме доселе известных».

После работ С. В. Ковалевской, насколько нам известно, были найдены и изучены следующие основные частные случаи интегрируемости и частные решения системы (1.1) и (1.2), если не считать частные случаи уже найденных решений и различные дополнения и видоизменения как самих условий, так и получаемых частных решений (как например, частные случаи интеграла С. В. Ковалевской, маятникообразные движения и другие простейшие движения).

1. Локсодромический маятник. Этот случай найден Гессом в 1890 г. [3]. Вновь открыт в 1892 г. П. А. Некрасовым [6] и Г. Г. Аппельротом [5]. Исследован П. А. Некрасовым[7,8,15], Б. К. Млодзеевским [9], Н. Е. Жуковским [4,21], С. А. Чаплыгиным[14] и другими. В этом случае при соблюдении условий

$$y_0 = 0, \qquad A(B-C)x_0^2 - C(A-B)z_0^2 = 0$$

существует четвертый частный первый интеграл в алгебраической форме

$$Ax_0p + Cz_0r = 0$$

2. Случай Д. Бобылева — В. А. Стеклова (1893 г.). Найден одновременнно Д. Бобылевым [17] и В. А. Стекловым [18]. При соблюдении условий

$$2A = C, \ x_0 = y_0 = 0, \ q = 0,$$

существует частный интеграл $r = r_0$ (Д. Бобылев) или при условиях $2A = B$, $x_0 = z_0 = 0$, $r = 0$ существует частный интеграл $q = q_0$ (В. А. Стеклов).

3. Постоянные (перманентные) вращения. Этот случай открыт в 1894 г. Б. К. Млодзеевским и Штауде. Исследования Б. К. Млодзеевского [13] по этому вопросу были уже совершенно закончены, когда появилась статья Штауде [12], в которой разбирался один из относящихся к перманентным вращениям случай, когда ось вращения вертикальна. У Б. К. Млодзеевского вопрос разбирается в более широкой постановке.

4. Второй случай В. А. Стеклова (1899 г.) [20]. При условиях $B > A > 2C$, $y_0 = z_0 = 0$ существуют частные совместные решения

$$\gamma_2 = \frac{(C-A)(B-A)}{Q(2C-A)}pq, \qquad \gamma_3 = \frac{(C-A)(B-A)}{Q(2B-A)}pr$$

Здесь и дальше обозначено $Q = Mgx_0$.

В настоящей работе показывается, что в этом случае будет иметь место

$$k = 0, \qquad h = \frac{Q(A^2 - 2AB - 2AC + 2BC)}{(A-B)(C-A)}$$

В решение входит единственная произвольная постоянная t_0.

5. Случай Д. Н. Горячева — С. А. Чаплыгина (1899 г.). Открыт Д. Н. Горячевым [23], давшим решение, которое содержит в себе три произвольных постоянных, и С. А. Чаплыгиным [24], который дал решение, содержащее в себе четыре произвольных постоянных. Решение Д. Н. Горячева содержится в решении С. А. Чаплыгина как частный случай. Исследование движений для этого случая, возникающих при сообщении твердому телу очень большой угловой скорости вокруг главной оси инерции, проходящей через центр тяжести, было проведено Л. Н. Сретенским [31], метод которого был использован Ю. А. Архангельским [34].

В этом случае при соблюдении условий

$$A = B = 4C, \qquad y_0 = z_0 = 0, \qquad k = 0$$

существует четвертый частный первый интеграл в алгебраической форме

$$r(p^2 + q^2) + \frac{Q}{C}p\gamma_3 = l$$

где l — произвольная постоянная.

6. Второй случай Д. Н. Горячева[1] *(1899 г.)* [22]. При соблюдении условий

$$AC = 8(A-2B)(B-C), \qquad y_0 = z_0 = 0$$

существуют частные совместные интегралы

$$2Q\gamma_2 = (4B-3A)pq, \qquad Q\gamma_3 = (\lambda + \mu p^2)pr$$

---

[1] Считаем более удобным назвать его вторым случаем, хотя предыдущий случай Д. Н. Горячевым был дан в ноябре, а этот в августе.

где

$$\lambda = \frac{(3A-4B)(2B-C)(2B-3C)}{BC}, \qquad \mu = \frac{\lambda A(3A-4B)(4B-3C)(5C-4B)}{32QBC(B-C)}$$

В настоящей работе показывается, что в этом случае будет иметь место

$$k=0, \qquad h = \frac{4Q(A-2B)(9A^2-56AB+64B^2)}{(3A-4B)(15A^2-64AB+64B^2)}$$

В решение входит единственная произвольная постоянная t_0.

7. Второй случай С. А. Чаплыгина (1904 г.) [26]. При соблюдении условий

$$0.6 > \frac{C}{A} > 0.5965, \qquad 1.5 < \frac{B}{A} < 1.5965, \qquad y_0 = z_0 = 0$$

или ограничений для главных центральных моментов инерции L, M, N

$$M > L > N, \qquad 0.9 < \frac{M-N}{L} < 1$$

существуют частные интегралы в алгебраической форме

$$Q\gamma_2 = (\alpha + \lambda p^{-\frac{4}{3}})\,pq, \qquad Q\gamma_3 = (\beta + \mu p^{-\frac{4}{3}})\,pr$$

где

$$\alpha = \frac{(B-A)(C-A)}{2C-A}, \qquad \beta = \frac{(B-A)(C-A)}{2B-A}$$

$$\lambda = \frac{C(3A-2B)}{2C-A}\,s, \qquad \mu = \frac{B(3A-2C)}{2B-A}\,s$$

s определяется условием

$$A^3(2B+2C-3A)\,s^3 = \frac{4(2B-A)^2(2C-A)^2Q^2}{9(3A-2B)(3A-2C)}$$

В решение входит единственная произвольная постоянная t_0.

8. Случай Н. Ковалевского (1907 г.) [28]. При соблюдении условий

$$A = \frac{18B(B-C)}{9B-10C} \quad \text{или} \quad AC = 9(A-2B)(B-C), \qquad y_0 = z_0 = 0$$

существуют частные интегралы в алгебраической форме

$$\gamma_2 = -\frac{C}{2Q}\left[\beta_1 + 2\left(\beta_2 - \frac{A-B}{C}\right)p\right]q$$

$$\gamma_3 = \frac{B}{2Q}\left[\alpha_1'\beta_1 + 2\left(\alpha_2 - \frac{C-A}{B}\right)p + 3\alpha_3'\beta_1^{-1}p^2\right]r$$

$$q^2 = P_3(p), \qquad r^2 = P_2(p), \qquad \gamma_1 = P_3(p)$$

где $P_s(p)$ — полиномы s степени от p,

$$\alpha_2 = \frac{(2C-3B)(81B^2-156BC+61C^2)}{BC(9B-10C)}, \qquad \beta_2 = -\frac{2B}{9B-10C}$$

β_1, α_1', α_3' определяются системой алгебраических уравнений, выписывать которые нет необходимости, с коэффициентами, зависящими от A, B, C. В решении задачи участвует единственная произвольная постоянная t_0.

9. Случай Гриоли (1947 г.) [30,33] — регулярная прецессия вокруг невертикальной оси. При соблюдении условий

$$y_0 = 0, \quad (B-C)\,x_0^2 - (A-B)\,z_0^2 = 0$$

существуют совместные частные интегралы

$$p^2 + q^2 + r^2 = \text{const}, \quad x_0 p + z_0 r = \text{const}$$

Во всех этих частных случаях ограничения, накладываемые на значения h, k, A, B, C, x_0, y_0, z_0, получены различными приемами без применения метода С. В. Ковалевской.

В работе не ставится целью изучение и разбор различных видоизменений и дополнений полученных основных частных случаев интегрируемости, а также различных геометрических и аналитических приемов, применяемых в указанной задаче, и не затрагивается вопрос об устойчивости движений. В связи с этим не проводится анализ всей литературы по вопросу о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, которая не имеет прямого отношения к рассматриваемым в работе вопросам.

2. О дифференциальных уравнениях задачи, содержащих произвольные постоянные классических первых интегралов. Представим уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в иной форме, чем (1.1) и (1.2), указанной в работе Гесса[3]. Пусть даны одна квадратичная и $n-1$ линейных форм относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ в виде

$$\begin{gathered} x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=l \\ \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+\ldots+\alpha_n x_n=\alpha \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\gamma_3 x_3+\ldots+\gamma_n x_n=\gamma \end{gathered} \tag{2.1}$$

Обозначим

$$W=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{vmatrix}, \qquad H=W^2=\begin{vmatrix} l & \alpha & \beta & \ldots & \gamma \\ \alpha & (\alpha\alpha) & (\alpha\beta) & \ldots & (\alpha\gamma) \\ \beta & (\beta\alpha) & (\beta\beta) & \ldots & (\beta\gamma) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma & (\gamma\alpha) & (\gamma\beta) & \ldots & (\gamma\gamma) \end{vmatrix}$$

где

$$(\alpha\alpha)=\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2, \quad (\alpha\beta)=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Дифференцируя H по x_i в силу (2.1), получим

$$2\frac{\partial H}{\partial l}x_i+\frac{\partial H}{\partial \alpha}\alpha_i+\frac{\partial H}{\partial \beta}\beta_i+\ldots+\frac{\partial H}{\partial \gamma}\gamma_i=2W\frac{\partial W}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

Миноры определителя W, соответствующие элементам x_i, суть $W_i = \partial W/\partial x_i$. Поэтому имеем следующие тождества:

$$W=\sum\frac{\partial W}{\partial x_i}x_i, \quad \sum\frac{\partial W}{\partial x_i}\alpha_i=0, \ldots, \quad \sum\frac{\partial W}{\partial x_i}\gamma_i=0$$

Тогда, умножая уравнения (2.2) на x_i и складывая, затем на α_i и складывая и т. д., получим уравнения

$$\begin{gathered} 2\frac{\partial H}{\partial l}l+\frac{\partial H}{\partial \alpha}\alpha+\ldots+\frac{\partial H}{\partial \gamma}\gamma=2W^2=2H \\ 2\frac{\partial H}{\partial l}\alpha+\frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha\alpha)+\ldots+\frac{\partial H}{\partial \gamma}(\alpha\gamma)=0 \\ 2\frac{\partial H}{\partial l}\beta+\frac{\partial H}{\partial \alpha}(\beta\alpha)+\ldots+\frac{\partial H}{\partial \gamma}(\beta\gamma)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{2.3}$$

Обозначим миноры определителя H, соответствующие элементам первой строки, той же буквой с индексом внизу, а соответствующие элементам первого столбца, кроме того, со штрихом вверху. Разлагая H по элементам первой строки и столбца, получим

$$H=H_l l+H_\alpha\alpha+\ldots+H_\gamma\gamma, \quad H=H_l l+H_\alpha'\alpha+\ldots+H_\gamma'\gamma \tag{2.4}$$

В силу симметрии определителя H относительно диагонали $H_\alpha = H_\alpha', \ldots, H_\gamma = H_\gamma'$. Складывая почленно равенства (2.4) и сравнивая с (2.3), находим[1]

$$\frac{\partial H}{\partial l} = H_l, \qquad \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 2H_\alpha, \ldots, \quad \frac{\partial H}{\partial \gamma} = 2H_\gamma$$

Тогда согласно (2.2) переменные $x_1, \ldots, x_n$ выражаются в явном виде через формы (2.1) и коэффициенты этих форм в следующем виде:

$$H_l x_i = \sqrt{H}\ W_i - H_\alpha \alpha_i - H_\beta \beta_i - \ldots - H_\gamma \gamma_i \tag{2.5}$$

В тяжелом твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки, можно указать в каждое мгновенье t четыре вектора, пересекающихся в точке опоры: единичный вектор неподвижной оси $\mathbf{z}_1{}^0$, совпадающей по направлению с линией действия тяжести, вектор главного кинетического момента $\mathbf{G}$, вектор мгновенного вращения $\boldsymbol{\omega}$ и единичный вектор направления на центр тяжести $\mathbf{n}^0$.

Составим скалярные произведения из этих векторов:

$$\begin{array}{rl}
1. & \nu = (\mathbf{GG}) = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 \\
2. & \rho = (\mathbf{Gn}^0) = \frac{1}{R_0}(Ax_0p + By_0q + Cz_0r) \\
3. & \tau = (\mathbf{G}\boldsymbol{\omega}) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \\
4. & \sigma = (\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}^0) = \frac{1}{R_0}(x_0p + y_0q + z_0r) \\
5. & \theta = (\boldsymbol{\omega}\mathbf{z}_1{}^0) = p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3 \\
6. & w = (\boldsymbol{\omega\omega}) = p^2 + q^2 + r^2 \\
7. & l_0 = (\mathbf{z}_1{}^0\mathbf{z}_1{}^0) = \gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2 = 1 \\
8. & k = (\mathbf{Gz}_1{}^0) = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 \\
9. & \mu = (\mathbf{n}^0\mathbf{z}_1{}^0) = \frac{1}{R_0}(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) \\
10. & n^{0^2} = (\mathbf{n}^0\mathbf{n}^0) = \frac{1}{R_0{}^2}(x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2) = 1
\end{array} \tag{2.6}$$

Величины l_0, k, n^0 — постоянные, величина τ представляет собой удвоенную живую силу и связана с μ следующим образом:

$$\mu = \frac{\tau - h}{2MgR_0} \qquad (h = \text{const}) \tag{2.7}$$

Таким способом можно ввести шесть новых переменных. Для нашей цели возьмем из них три — ν, ρ, μ. Вместо μ можно взять τ.

Полные производные по времени от этих величин в силу дифференциальных уравнений Эйлера — Пуассона (1.1), (1.2) будут

$$\frac{d\nu}{dt} = 2Mg \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ Ap & Bq & Cr \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{R_0} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix}$$
$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{R_0} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

[1] Combescure. Sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles. J. f. d. reine u. angew. Math., 80, 33—51, 1875.

Взяв за формы типа (2.1) 7, 8, 9 из (2.6), получим согласно (2.5)

$$
\begin{aligned}
H_0\gamma_1 &= \sqrt{H}W_{\gamma_1} - H_k Ap - H_\mu \frac{x_0}{R_0}\\
H_0\gamma_2 &= \sqrt{H}W_{\gamma_2} - H_k Bq - H_\mu \frac{y_0}{R_0}\\
H_0\gamma_3 &= \sqrt{H}W_{\gamma_3} - H_k Cr - H_\mu \frac{z_0}{R_0}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Здесь

$$
H = W^2 = \begin{vmatrix} l_0 & k & \mu \\ k & \nu & \rho \\ \mu & \rho & 1 \end{vmatrix}, \qquad W = \sqrt{H} = \frac{1}{R_0}\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ Ap & Bq & Cr \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \nu - \rho^2, & W_{\gamma_1} &= \frac{1}{R_0}(Bqz_0 - Cry_0)\\
H_k &= \rho\mu - k, & W_{\gamma_2} &= \frac{1}{R_0}(Crx_0 - Apz_0)\\
H_\mu &= k\rho - \nu\mu, & W_{\gamma_3} &= \frac{1}{R_0}(Apy_0 - Bqx_0)
\end{aligned}
$$

Тогда из (2.8) и (2.9), имея в виду (2.6), получим следующую исходную систему дифференциальных уравнений в форме Гесса:

$$
\left(\frac{1}{2MgR_0}\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} l_0 & k & \mu \\ k & \nu & \rho \\ \mu & \rho & 1 \end{vmatrix}, \qquad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & \rho & \sigma \\ \rho & \nu & \tau \\ \sigma & \tau & w \end{vmatrix}
$$

$$
(\nu - \rho^2)\frac{d\mu}{dt} = (\tau - \sigma\rho)\frac{1}{2MgR_0}\frac{d\nu}{dt} + (k - \rho\mu)\frac{d\rho}{dt} \tag{2.10}
$$

Решение уравнений Гесса дает решение уравнений Эйлера, за исключением случаев, когда из выражений ν, ρ, μ (2.6) с учетом (2.7) нельзя найти p, q, r.

В 1903 г. П. А. Шифф [25] предложил преобразование уравнений (1.1) и (1.2) к новой форме, подобной только что рассмотренной, приняв за новые переменные величины выражения [1]

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2Mg}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)\\
\frac{1}{2(Mg)^2}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)\\
-\frac{1}{Mg}(Ax_0p + By_0q + Cz_0r)
\end{gathered}
$$

Предполагая, что два последних выражения могут быть постоянными, и задавая различные начальные условия, П. А. Шифф объединяет в этих условиях несколько частных случаев (уже известных). Можно ли подобрать параметры и начальные условия задачи так, чтобы они действительно могли быть осуществимы,— этого рассмотрения он не производит.

3. Случаи интегрируемости, существующие при отсутствии радикалов в правых частях исходных дифференциальных уравнений. Исходные дифференциальные уравнения (2.10) даны в такой форме, что в правые части их, помимо рассматриваемых переменных ν, ρ, τ, две из которых входят, кроме того, под знаком производной, вошли величины σ, w, которые явно выражены только через старые переменные.

[1] У П. А. Шиффа последнее выражение взято со знаком +, так как он проводит преобразование уравнений Эйлера, записанных для случая, когда ось OZ_1 направлена против направления силы тяжести.

Из равенств (2.6) следуют очевидные соотношения:

$$
\begin{aligned}
\nu - A\tau &= B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 \\
\nu - B\tau &= A(A-B)p^2 + C(C-B)r^2 \\
\nu - C\tau &= A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 \\
\tau - Aw &= (B-A)q^2 + (C-A)r^2 \\
\tau - Bw &= (A-B)p^2 + (C-B)r^2 \\
\tau - Cw &= (A-C)p^2 + (B-C)q^2 \\
R_0(\rho - A\sigma) &= (B-A)y_0q + (C-A)z_0r \\
R_0(\rho - B\sigma) &= (A-B)x_0p + (C-B)z_0r \\
R_0(\rho - C\sigma) &= (A-C)x_0p + (B-C)y_0q
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Выразим величины σ, w через переменные ν, ρ, τ. Для этого исключим из первых трех соотношений (2.6) два раза попарно любые две переменные (например p, q и r, q), а затем для оставшихся после исключения двух алгебраических полиномов от одной из старых переменных (r и p) найдем корни и подставим их в соответствующие из последних шести соотношений (3.1).

Подставляя значение p из второго соотношения (2.6) в первое и третье, получим два квадратных уравнения относительно q с коэффициентами, зависящими от r, ν, ρ, τ, из которых q исключаем, т. е. приравниваем нулю результант

$$
\begin{aligned}
&\{C\,[A(B-C)x_0^2 + B(A-C)y_0^2 + C(B-A)z_0^2]\,r^2 - 2C(B-A)R_0z_0\rho r + \\
&+ (B-A)R_0^2\rho^2 + Ax_0^2(\nu - B\tau) + By_0^2(\nu - A\tau)\}^2 - \\
&- 4B(B-A)y_0^2(Cz_0r - R_0\rho)^2\,[C(A-C)r^2 + \nu - A\tau] = 0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Точно так же, подставляя значение r из второго соотношения (2.6) в первое и третье и из полученных двух квадратных относительно q уравнений, исключая q, получаем

$$
\begin{aligned}
&\{A\,[A(B-C)x^2_0 - B(A-C)y_0^2 + C(B-A)z_0^2]\,p^2 - 2A(B-C)R_0x_0\rho p + \\
&+ (B-C)R_0^2\rho^2 + By_0^2(\nu - C\tau) + Cz_0^2(\nu - B\tau)\}^2 + \\
&+ 4B(B-C)y_0^2(Ax_0p - R_0\rho)^2\,[A(A-C)p^2 - \nu + C\tau] = 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Корни полиномов (3.2) и (3.3), будучи подставлены в пятое и восьмое соотношения (3.1), дадут явное выражение σ, w через ν, ρ, τ.

Такое преобразование в общем виде имеет громоздкую форму и требует особого рассмотрения. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
P &= (A-B)(B-C)(C-A) \\
\Lambda &= (B-C)x_0^2 - (A-B)z_0^2 \\
U &= A(B-C)x_0^2 + C(A-B)z_0^2 \\
V &= A(B-C)x_0^2 - C(A-B)z_0^2
\end{aligned}
$$

Уравнения (3.2) и (3.3) становятся квадратными и имеют простое выражение корней при условии $y_0 = 0$.

Для этого случая при условии, что $V \neq 0$ и в корнях полиномов (3.2) и (3.3) перед радикалами взяты разные знаки, получаем выражения σ, w через переменные ν, ρ, τ в виде

$$\sqrt{AC}VR_0\sigma = \sqrt{AC}\Lambda R_0\rho \pm (A-C)x_0z_0\sqrt{(A-B)(B-C)R_0\rho^2 - V(\nu - B\tau)} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}ABCV^2w = ACV^2\tau - PUR_0^2\rho^2 - [A^2(B-C)x_0^2 - C^2(A-B)z_0^2]V(\nu - B\tau) \pm \\ \pm 2\sqrt{AC}PR_0x_0z_0\rho\sqrt{(A-B)(B-C)R_0^2\rho^2 - V(\nu - B\tau)}\end{gathered} \tag{3.5}$$

Если $V = 0$, то получаем следующие выражения σ, w через переменные ν, ρ, τ при условии $\rho \neq 0$, $\nu \neq B\tau$:

$$\sigma = \frac{A+C}{2AC}\rho - \frac{(A-C)z_0^2(\nu - B\tau)}{2A(B-C)R_0^2\rho} \tag{3.6}$$

$$Bw = \frac{(A-B)R_0^2}{A(A-C)x_0^2}(AC\sigma^2 - \rho^2) + \tau = \tag{3.7}$$

$$= \frac{A-B}{4A^2x_0^2}\left[\frac{(A-C)R_0^2}{C}\rho^2 - \frac{2(A+C)z_0^2}{B-C}(\nu - B\tau) + \frac{C(A-C)z_0^4(\nu - B\tau)^2}{(B-C)^2R_0^2\rho^2}\right] + \tau$$

Подставляя полученные выражения σ, w в уравнения (2.10), получаем три исходных дифференциальных уравнения от трех переменных ν, ρ, τ и времени t, явно не входящего в них.

Можно заметить, что общие и некоторые частные решения задачи существуют либо при отсутствии радикала в правых частях исходных дифференциальных уравнений (2.10), т. е. в функциях, которые выражают зависимость σ, w от ν, ρ, τ, либо когда указанные функции сами становятся постоянными.

Это возможно при выполнении одного или нескольких условий (ранее введенное условие $y_0 = 0$, конечно, выполняется):

1. Либо $V = 0$,

либо при $V \neq 0$:

2. $x_0 = 0$. 3. $z_0 = 0$. 4. $A = C$. 5. $B = C$. 6. $A = B$ (3.8)
7. $(A-B)(B-C)R_0^2\rho^2 - V(\nu - B\tau) = \text{const}$
8. $\sigma = \sigma_0(\text{const})$, $w = w_0(\text{const})$

Во 2-м и 3-м условиях (3.8) вместе взятых заключается случай Эйлера — Пуансо. Здесь должно еще исследовать получающуюся неопределенность. 2-е и 6-е условия вместе взятые дают случай Лагранжа — Пуассона, 4, 5 и 6-е условия — случай полной кинетической симметрии, 3-е и 6-е условия в дальнейшем приводят к случаю С. В. Ковалевской.

Рассмотрим получение частных случаев интегрируемости уравнений. По мере необходимости будем переходить к старым переменным, в которых рассмотрены известные случаи интегрируемости.

При выполнении 1-го условия (3.8) σ и w выражаются через ν, ρ, τ по формулам (3.6) и (3.7). Эти формулы получены путем исключения p, r из формул (3.2), (3.3) и 5-го или 8-го соотношения (3.1) при условии $\rho \neq 0$, $\nu \neq B\tau$.

Равенствам (3.2) и (3.3) при $y_0 = 0$, $V = 0$ удовлетворяют любые p, r, если имеют место зависимости между новыми переменными $\rho = 0$, $\nu = B\tau$. Одно из них может быть принято за частный интеграл, например $\rho = 0$. Получаем случай локсодромического маятника.

Этот случай получил Гесс [3] и позднее методом С. В. Ковалевской Г. Г. Аппельрот [5] и П. А. Некрасов [6].

П. А. Некрасов в ряде работ [6,7,8,15] исследовал аналитически движение в этом случае.

Особенность указанного случая заключается в том, что решение задачи приводится вообще не к однозначным функциям времени, а к многозначным, и лишь при соблюдении некоторых дополнительных условий оно может быть приведено к однозначным функциям времени. Условия существования асимптотических периодических движений в этой задаче рассмотрены Б. К. Млодзеевским и П. А. Некрасовым [9].

Н. Е. Жуковский [4] с присущим ему мастерством дал геометрическое решение задачи. Им же предложена и осуществлена [21] модель указанного маятника.

С. А. Чаплыгин [14] указал расположение в твердом теле точек подвеса для осуществления движения.

Рассмотрим третье и седьмое условия (3.8), которые при этом принимают вид

$$(B - C)\, x_0^2 \left[(A - B)\, \rho^2 - A\,(\nu - B\tau)\right] = \text{const} \tag{3.9}$$

или в старых переменных $AC\,(B - C)\, x_0^2 r^2 = \text{const}$. При частном значении $\text{const} = 0$, если $B = C$, получаем случай Лангранжа — Пуассона, если $x_0 = 0$ — случай Эйлера — Пуансо. Исключая эти случаи, получаем, что указанное условие равносильно $r = 0$.

При этом новые переменные через старые выражаются следующим образом:

$$\nu = A^2p^2 + B^2q^2, \qquad \rho = Ap, \qquad \tau = Ap^2 + Bq^2 \tag{3.10}$$

$$\sigma = p, \qquad w = p^2 + q^2, \qquad \mu = \gamma_1$$

Второе дифференциальное уравнение (2.10), записанное в форме

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = (w - \sigma^2)(\nu - \rho^2) - (\tau - \rho\sigma)^2$$

в силу равенств (3.10) дает $\rho = \rho_0\,(\text{const})$.

Третье дифференциальное уравнение (2.10) выполняется в силу соотношений (3.10), условия $\rho = \rho_0$, равенства (2.7) и второго равенства (3.1).

Первое дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{1}{2Q}\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = (\nu - \rho_0^2)(1 - \mu^2) - (k - \rho_0\mu)^2 \tag{3.11}$$

ν и μ связаны в силу (3.10) и (2.7) соотношением

$$\mu = \frac{1}{2QB}\left(\nu - \frac{A - B}{A}\rho_0^2 - Bh\right)$$

При введенных условиях $y_0 = z_0 = r = 0$, $p = \rho_0/A = \text{const}$ третье уравнение Эйлера дает

$$(A - B)\, p_0 q + Q\gamma_2 = 0$$

Два первых интеграла (1.3) приводятся к виду

$$\tau - 2Q\mu = h, \qquad \frac{(A - B)\,\rho_0}{AQ}\left(\frac{\rho_0^2}{A} - \tau\right) + \rho_0\mu = k \tag{3.12}$$

Для того чтобы переменные τ, μ не были постоянными, необходимо равенство нулю определителя системы, которое приводит к соотношению

$$A = 2B$$

Из системы уравнений (3.12) получаем зависимость между h и k:

$$\frac{B\rho_0}{A}\left(\frac{\rho_0^2}{A} - h\right) = Qk \tag{3.13}$$

Равенства (2.7), (3.10) и (3.13) дают

$$\nu - \rho_0^2 = BQ\left(2\mu - \frac{Ak}{B\rho_0}\right)$$

Дифференцируя по t второе равенство (3.1) при найденных значениях p, r, принимая во внимание (2.7), (3.13) и подставляя значение $\nu - \rho_0^2$, $d\nu/dt$ в (3.11), получаем дифференциальное уравнение случая Д. Бобылева — В. А. Стеклова

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \frac{2Q}{B\rho_0}(\rho_0\mu - k)(1 - \mu^2) - \frac{(k - \rho_0\mu)^2}{B^2} \tag{3.14}$$

Из двух постоянных h и k интегралов (1.3) в решение вводится только постоянная k [h выражается через k посредством (3.13)].

Чтобы привести выведенное уравнение к форме, в которой оно рассмотрено Д. Бобылевым, сделаем циклическую подстановку переменных и параметров, заменяя p на r, q на p, r на q и соответственно остальные величины. Ограничения задачи представятся в виде

$$2A = C, \qquad x_0 = y_0 = q = 0, \qquad r = r_0$$

Кроме того, имеем $\rho_0 = Cr_0$, $\mu = \gamma_3$. Тогда уравнение (3.14) принимает вид

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = \frac{2Mgz_0}{A}\left(\gamma_3 - \frac{k}{Cr_0}\right)\left[1 - \gamma_3^2 - \frac{Cr_0^2}{Mgz_0}\left(\gamma_3 - \frac{k}{Cr_0}\right)\right] \tag{3.15}$$

Введенные Д. Бобылевым [17] постоянные C_2 и $k_Б$ имеют значения

$$C_2 = -\frac{k}{Cr_0}, \qquad k_Б = \frac{Ar_0^2}{Mgz_0}$$

Уравнение (3.14) может быть приведено к форме, указанной В. А. Стекловым [18], если сделать замену значений A, x_0, p, γ_1 на B, y_0, q, γ_2 и выразить из второго интеграла (1.3) при помощи третьего уравнения Эйлера значения

$$\rho_0\mu - k = \frac{Mgy_0}{q_0}\gamma_1^2, \quad 1 - \mu^2 = 1 - \frac{1}{\rho_0^2}\left(k + \frac{Mgy_0}{q_0}\gamma_1^2\right)^2, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{Mgy_0}{Aq_0^2}\gamma_1\frac{d\gamma_1}{dt}$$

Тогда уравнение (3.14) принимает вид

$$\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 = q_0^2\left[1 - \frac{k^2}{4A^2q_0^2} - \left(1 + \frac{Mgy_0k}{2A^2q_0^3}\right)\gamma_1^2 - \frac{(Mgy_0)^2}{4A^2q_0^4}\gamma_1^4\right] \tag{3.16}$$

Введенные В. А. Стекловым [18] постоянные l, n, K имеют значения

$$l = \frac{k}{2Aq_0}, \qquad n = \frac{m}{2q_0} = \frac{Mgy_0}{2Aq_0^2}, \qquad K = \frac{k}{A}$$

Рассмотрим седьмое и восьмое условия (3.8). Первое из них в старых переменных имеет вид

$$[(A - B)z_0p + (B - C)x_0r]^2 = L^2 \qquad (L = \mathrm{const}) \tag{3.17}$$

Формула (3.4) запишется в виде

$$VR_0\sigma = \Lambda R_0\rho + (A - C)\, x_0 z_0 L$$

Равенства (3.17) и $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$ приводят к условию $\Lambda = 0$ в предположении, что p, r не являются постоянными.

Формула (3.5) запишется в виде

$$BV^2 w = V^2\tau - \Lambda V(\nu - B\tau) \pm 2PR_0 x_0 z_0 L\rho + (A - C)\, UL^2$$

Постоянные σ_0, w_0, L можно выбрать так, чтобы это равенство выполнялось тождественно.

Условия

$$y_0 = 0, \qquad \Lambda = (B - C)\, x_0^2 - (A - B)\, z_0^2 = 0 \tag{3.18}$$

$$x_0 p + z_0 r = \mathrm{const}, \qquad p^2 + q^2 + r^2 = \mathrm{const} \tag{3.19}$$

в совокупности дают случай Гриоли — регулярную прецессию около невертикальной оси.

Условие $\Lambda = 0$ означает следующее. Центр тяжести тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, для которого соблюдаются условия (3.18) при $A > B > C$, должен лежать на одном из двух перпендикуляров к круговым сечениям эллипсоида инерции, построенного для точки подвеса. Чтобы показать это, построим центральный гирационный эллипсоид в центре тяжести — точке O, отнесенный к главным направлениям

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = 1, \qquad a_1^2 > b_1^2 > c_1^2 \tag{3.20}$$

где a_1, b_1, c_1 — радиусы инерции относительно главных центральных осей.

Пусть для точки S, координаты которой относительно этих осей суть ξ, η, ζ, выполняются условия (3.18), где $A = Ma^2$, $B = Mb^2$, $C = Mc^2$ — моменты инерции тела относительно главных осей инерции $Sxyz$, пересекающихся в точке S; x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести O в этой системе координат с началом в точке S.

Для выполнения условия $y_0 = 0$ главная плоскость xSz, ортогональная к средней оси гирационного эллипсоида для точки S

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

должна содержать центр тяжести O. Кроме того, она должна касаться однополостного гиперболоида, софокусного эллипсоиду (3.20), проходящему через точку S, из системы софокусных поверхностей

$$\frac{\xi^2}{a_1^2 + \lambda_i} + \frac{\eta^2}{b_1^2 + \lambda_i} + \frac{\zeta^2}{c_1^2 + \lambda_i} = 1 \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3) \\ \text{при } -b_1^2 < \lambda_2 < -c_1^2 \end{matrix}$$

где

$$\lambda_1 = \pi^2 - a^2, \quad \lambda_2 = \pi^2 - b^2, \quad \lambda_3 = \pi^2 - c^2$$

суть эллиптические координаты точки S, если

$$\pi^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

Так как уравнению касательной плоскости к однополостному гиперболоиду в системе координат $O\xi\eta\zeta$ координаты центра тяжести $(0, 0, 0)$, вообще говоря, не удовлетворяют, то выполнение этих требований возможно только в случае вырождения однополостного гиперболоида во внешнюю часть фокальной гиперболы

$$\frac{\xi^2}{a_1^2+\lambda_2}+\frac{\zeta^2}{c_1^2+\lambda_2}=1 \qquad (\lambda_2=-b_1^2)$$

т. е. необходимо равенство $\eta=0$. Таким образом, точка S лежит в координатной плоскости $\xi O\zeta$, точка O — в плоскости xSz, т. е. ось Sy параллельна оси $O\eta$.

Из выражений декартовых координат точки S через эллиптические имеем $\pi^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, откуда при $\lambda_2=-b_1^2$ квадраты главных радиусов инерции для точки S выражаются так

$$\begin{aligned} a^2&=a_1^2+c_1^2+\lambda_3\\ b^2&=a_1^2+c_1^2+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3\\ c^2&=a_1^2+c_1^2+\lambda_1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Приравнивая между собой моменты инерции относительно прямой, соединяющей центр тяжести тела с полюсом S, записанные через радиусы инерции относительно главных центральных осей и главных осей, пересекающихся в точке S, получаем согласно (3.21)

$$a_1^2\varphi_\zeta^2+c_1^2\varphi_\xi^2=-(\lambda_1\varphi_z^2+\lambda_3\varphi_x^2) \tag{3.22}$$

где φ — направляющие косинусы прямой, соединяющий центр тяжести и полюс S, по отношению к соответствующим осям, если считать прямую выходящей из начала координат. Исключая a_1^2 и c_1^2 из равенств (3.21), получаем

$$a^2=b^2-\lambda_1+\lambda_2, \qquad c^2=b^2+\lambda_2-\lambda_3$$

Условие $(B-C)x_0^2-(A-B)z_0^2=0$ при этом дает

$$\lambda_2=\frac{\lambda_1 z_0^2+\lambda_3 x_0^2}{\pi^2}=\lambda_1\varphi_z^2+\lambda_3\varphi_x^2=-b_1^2$$

Сравнивая полученное равенство с (3.22), будем иметь

$$b_1^2=a_1^2\varphi_\zeta^2+c_1^2\varphi_\xi^2$$

Правая часть равенства представляет собой радиус инерции относительно прямой на плоскости $\xi O\zeta$, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к прямой, соединяющей его с полюсом S. Таким образом, геометрическим местом точек S подвеса тяжелого твердого тела, для которых выполняются условия (3.18), служит пара перпендикуляров к плоскостям круговых проекций центрального гирационного эллипсоида, если под последними понимать такие плоскости, на которые центральный гирационный эллипсоид проектируется в круг ортогональными к плоскости лучами, или пара перпендикуляров к плоскостям круговых сечений центрального эллипсоида инерции.

Из построения гирационного эллипсоида из эллипсоида инерции при радиусе преобразования, равном единице, следует, что плоскости круговых проекций центрального гирационного эллипсоида являются плоскостями круговых сечений центрального эллипсоида инерции.

В силу взаимности указанных эллипсоидов это свойство также взаимно по отношению к ним.

Подставляя значение $\lambda_2 = \lambda_1\varphi_z{}^2 + \lambda_3\varphi_x{}^2$ во второе равенство (3.21) с учетом двух остальных, получим

$$b^2 = a^2\varphi_z{}^2 + c^2\varphi_x{}^2$$

Таким образом показывается расположение центра тяжести по отношению к точке подвеса.

Центр тяжести тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, для которого соблюдаются условия (3.18), должен лежать на одном из двух перпендикуляров к круговым сечениям эллипсоида инерции, построенного для точки подвеса.

Явным выражением функций $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ от времени для случая (3.18), (3.19) занимался М. П. Гуляев [33].

Рассмотрим частное значение первой постоянной, равное нулю в формуле (3.19), т. е. условия

$$\begin{aligned} &y_0 = 0, \qquad (B - C)\,x_0{}^2 - (A - B)\,z_0{}^2 = 0 \\ &x_0 p + z_0 r = 0, \qquad p^2 + q^2 + r^2 = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Дифференцируя первое выражение второй строки (3.23) по времени в силу уравнений Эйлера (1.1) и первой строки (3.23), получим, если $A \neq C$:

$$Ax_0 p + Cz_0 r = -MgR_0{}^2\frac{\gamma_2}{q} \qquad (R_0{}^2 = x_0{}^2 + z_0{}^2)$$

Решая это уравнение совместно с первым равенством второй строки (3.23), получим

$$p = -\frac{MgR_0{}^2\gamma_2}{(A - C)\,x_0 q}, \qquad r = \frac{MgR_0{}^2\gamma_2}{(A - C)\,z_0 q}$$

После подстановки в первое и третье уравнения Эйлера (1.1) с учетом (3.23) найдем

$$p = \frac{l}{x_0}, \qquad q = -\frac{MgR_0{}^2}{(A - C)\,l}\gamma_2, \qquad r = -\frac{l}{z_0} \quad (l = \mathrm{const}) \tag{3.24}$$

Тогда второе уравнение Эйлера (1.1) и второе уравнение Пуассона (1.2) после исключения $d\gamma_2/dt$, p, r дают уравнение, которое с учетом первого равенства (3.23) запишется под видом

$$(2B - C)\,x_0\gamma_1 + (2B - A)\,z_0\gamma_3 = -\frac{(A - C)^2\,l^2}{MgR_0{}^2} \tag{3.25}$$

Дифференцируя это равенство по времени и подставляя вместо $d\gamma_1/dt$, $d\gamma_3/dt$ их значения из первого и третьего уравнений Пуассона (1.2), предварительно исключив из них p, q, r при помощи (3.24) при условии $q \neq 0$, получим

$$(2B - A)\,z_0\gamma_1 - (2B - C)\,x_0\gamma_3 = -\frac{(A - C)\,Bl^2}{Mgx_0z_0} \tag{3.26}$$

Исключая случай $A = C = 2B$, найдем из уравнений (3.25) и (3.26)

$$\gamma_1 = -\frac{(A - C)\,l^2}{Mgx_0R_0{}^2}, \qquad \gamma_3 = \frac{(A - C)\,l^2}{Mgz_0R_0{}^2} \tag{3.27}$$

После исключения l получим

$$x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3 = 0 \tag{3.28}$$

Второе уравнение Пуассона (1.2) в силу полученного выражения и (3.24) дает $\gamma_2 = \text{const}$, $q = \text{const}$.

Б. К. Млодзеевский исследовал случаи [13], в которых тяжелое твердое тело, укрепленное в одной точке, вращается вокруг неизменной (перманентной) оси. Одним из случаев такого движения является тот, при котором перманентная ось вертикальна и расположена в теле на конусе второго порядка с вершиной в точке опоры. Этот конус при первом условии (3.23) распадается на пару плоскостей

$$\frac{(A-C)\,x_0 z_0}{R_0^2}(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3)\,\gamma_2 = 0$$

Выражение (3.28) показывает, что рассматриваемое движение относится к частному виду перманентных вращений (для случая Гриоли).

Два первых классических интеграла (1.3) примут следующий вид:

$$h = \frac{Al^2}{x_0^2} + Bq^2 + \frac{Cl^2}{z_0^2}, \qquad k = -\frac{(A-C)\,l}{MgR_0^2}\left(\frac{Al^2}{x_0^2} + Bq^2 + \frac{Cl^2}{z_0^2}\right)$$

Постоянные h, k оказываются связанными между собой зависимостью

$$k = -\frac{(A-C)\,l}{MgR_0^2}\,h \tag{3.29}$$

Тогда из (3.24) и (3.27) можно получить соотношения

$$\gamma_1 = \frac{k}{h}\,p, \qquad \gamma_2 = \frac{k}{h}\cdot q, \qquad \gamma_3 = \frac{k}{h}\,r \tag{3.30}$$

Третий классический интеграл (1.3) в силу (3.23) и (3.29) дает

$$q^2 = \frac{h^2}{k^2} - \frac{k^2 (MgR_0)^2}{h^2 (A-B)(B-C)}$$

Значения p, r на основании второго равенства (3.30) будут

$$p = -\frac{MgR_0^2 k}{(A-C)\,x_0 h}, \qquad r = \frac{MgR_0^2 k}{(A-C)\,z_0 h} \tag{3.31}$$

Угловая скорость через h, k выражается следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{h^2}{k^2}$$

4. Некоторые необходимые ограничения для частных случаев интегрируемости. Рассмотрим третье условие (3.8) при $V \neq 0$, т. е. $y_0 = z_0 = 0$, $x_0 = R_0$.

Центр тяжести тела лежит на главной оси инерции, момент инерции относительно которой равен A.

При этом исходные дифференциальные уравнения (2.10) запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = -\nu(\tau-h)^2 + 4Q\,[Q(\nu-\rho^2) + k\rho(\tau-h) - Qk^2] \\
A^2BC\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = -A^2\nu^2 + AJ\nu\rho^2 + A^2B_1\nu\tau + P'\rho^4 + AN\rho^2\tau - A^2BC\tau^2 \\
(\rho^2 - A\tau)\frac{d\nu}{dt} + A\,[\rho(\tau-h) - 2Qk]\frac{d\rho}{dt} + A(\nu-\rho^2)\frac{d\tau}{dt} = 0
\end{gathered} \tag{4.1}$$

где

$$B_1 = B + C, \qquad J = 2A - B - C, \qquad N = 2BC - AB - AC$$
$$P' = (A-B)(C-A), \quad Q = Mgx_0$$

Применим к полученной системе дифференциальных уравнений метод С. В. Ковалевской.

Пусть этой системе формально удовлетворяют ряды вида

$$
\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{t^{n_1}}(\nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 t^2 + \ldots) \\
\rho &= \frac{1}{t^{n_2}}(\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \ldots) \\
\tau &= \frac{1}{t^{n_3}}(\tau_0 + \tau_1 t + \tau_2 t^2 + \ldots)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

где n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа и, может быть, некоторые из них нули, ν_0, ρ_0, τ_0 не равны нулю.

Для того чтобы ряды (4.2) могли представлять частное решение системы (4.1), они должны сходиться в некоторой области переменной t. Если частное решение содержит хотя бы одну существенную произвольную постоянную (кроме произвольной постоянной t_0, просто приданной к t, и произвольных постоянных h и k), то ряды (4.2) будут содержать среди своих коэффициентов, по крайней мере, одну существенную произвольную постоянную.

Рассмотрим некоторые случаи систем значений n_1, n_2, n_3, при которых ряды (4.2) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (4.1).

Положим $n_1 = n_3 = 2$, $n_2 = 1$ $(A \neq B,\ \ A \neq C)$ и подставим ряды (4.2) в систему (4.1).

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t левых и правых частей уравнений, получаем следующие системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов (4.2):

$$
\begin{aligned}
1.\quad & 4\nu_0 + \tau_0^2 = 0 \\
& A\nu_0(\Theta_0 - A\nu_0) - \rho_0^2(P'\rho_0^2 + AN\tau_0 - A^2BC) + A^2BC\tau_0^2 = 0 \\
& 2\nu_0 - A\tau_0 = 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\quad & \nu_1(4\nu_0 + \tau_0^2) + 2\tau_1\nu_0\tau_0 = 0 \\
& A\nu_1\Theta_0 - 2\rho_1\Phi_0' - A\tau_1\Psi_0 = 0 \\
& \nu_1(\rho_0^2 + A\tau_0) + \rho_1(4\nu_0 - 3A\tau_0)\rho_0 - A\tau_1\nu_0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.\quad & \nu_2\tau_0^2 + 2(\tau_2 - h)\nu_0\tau_0 + \nu_1(\nu_1 + 2\tau_1\tau_0) + \tau_1^2\nu_0 = 0 \\
& A\nu_2\Theta_0 - 2\rho_2(\Phi_0' + A^2BC)\rho_0 - A\tau_2\Psi_0 + A\nu_1(\Theta_1 - A\nu_1) - \\
& \qquad - \rho_1^2\Phi_0 - 2AN\rho_1\tau_1\rho_0 + A^2BC\tau_1^2 = 0 \\
& 2A\nu_2\tau_0 + 4\rho_2(\nu_0 - A\tau_0) - 2A\tau_2\nu_0 + A(\tau_2 - h)\rho_0^2 + 2\nu_1\rho_1\rho_0 + \\
& \qquad + 2\rho_1^2(\nu_0 - A\tau_0) - A\rho_1\tau_1\rho_0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4.\quad & \nu_3(-4\nu_0 + \tau_0^2) + 2[\tau_3\nu_0\tau_0 + \nu_2\tau_1\tau_0 + (\tau_2 - h)(\nu_1\tau_0 + \tau_1\nu_0)] + \\
& \qquad + \nu_1\tau_1^2 - 4Qk\rho_0\tau_0 = 0 \\
& A\nu_3\Theta_0 - 2\rho_3(\Phi_0' + 2A^2BC)\rho_0 - A\tau_3\Psi_0 + A\nu_2\Theta_1 - 2\rho_2\Phi - \\
& \qquad - A\tau_2\Psi_1 - \rho_1^2(\Phi_1 - 2P'\rho_1\rho_0) = 0 \\
& \nu_3(\rho_0^2 - 3A\tau_0) - \rho_3(4\nu_0 - 5A\tau_0)\rho_0 + A\tau_3(3\nu_0 - 2\rho_0^2) - \\
& \quad - A\nu_2\tau_1 - \rho_2[2\nu_1\rho_0 + \rho_1(4\nu_0 - 5A\tau_0) - 2A\tau_1\rho_0] + A\tau_2\nu_1 - \\
& \qquad - A(\tau_2 - h)\rho_1\rho_0 - \rho_1^2(\nu_1 - A\tau_1) + 2AQk\rho_0 = 0
\end{aligned}
$$

5. $\nu_4(-8\nu_0+\tau_0^2)+2[\tau_4\nu_0\tau_0-\nu_3(\nu_1-\tau_1\tau_0)+\tau_3(\nu_1\tau_0+\tau_1\nu_0)]+$
$+\nu_2[2(\tau_2-h)\tau_0+\tau_1^2]+(\tau_2-h)^2\nu_0+2(\tau_2-h)\nu_1\tau_1-$
$-4Q[k(\rho_1\tau_0+\tau_1\rho_0)+Q(\nu_0-\rho_0^2)]=0$

$A\nu_4\Theta_0-2\rho_4(\Phi_0'+3A^2BC)\rho_0-A\tau_4\Psi_0+A\nu_3\Theta_1-2\rho_3\Phi-A\tau_3\Psi_1+$
$+A\nu_2(\Theta_2-A\nu_2)-\rho_2^2(\Phi_0-A^2BC)-2\rho_2(AN\tau_2\rho_2+\rho_1\Phi_1)+A^2BC\tau_2^2-$
$-AN\tau_2\rho_1^2-P'\rho_1^4=0$

$\nu_4(2\rho_0^2-4A\tau_0)-2\rho_4(2\nu_0-3A\tau_0)\rho_0+A\tau_4(4\nu_0-3\rho_0^2)-2\nu_3(\rho_1\rho_0-$
$-A\tau_1)-\rho_3[2\nu_1\rho_0+2\rho_1(2\nu_0-3A\tau_0)-3A\tau_1\rho_0]+A\tau_3(2\nu_1-3\rho_1\rho_0)-$
$-\rho_2^2(2\nu_0-3A\tau_0)-\rho_2\rho_1(2\nu_1-3A\tau_1)=0$

6. $\nu_5(-12\nu_0+\tau_0^2)+2[\tau_5\nu_0\tau_0-\nu_4(2\nu_1-\tau_1\tau_0)+\tau_4(\nu_1\tau_0+\tau_1\nu_0)]+$
$+\nu_3[2(\tau_2-h)\tau_0+\tau_1^2]+2\{\tau_3[\nu_2\tau_0+(\tau_2-h)\nu_0+\nu_1\tau_1]+\nu_2(\tau_2-h)\tau_1-$
$-2Qk\rho_2\tau_0\}+(\tau_2-h)^2\nu_1-4Q[k(\tau_2-h)\rho_0+Q\nu_1+\rho_1(k\tau_1-2Q\rho_0)]=0$

$A\nu_5\Theta_0-2\rho_5(\Phi_0'+4A^2BC)\rho_0-A\tau_5\Psi_0+A\tau_4\Theta_1-2\rho_4\Phi-A\tau_4\Psi_1+$
$+A\nu_3\Theta_2-2\rho_3[AJ\nu_2\rho_0+\rho_2(\Phi_0-2A^2BC)+AN\tau_2\rho_0+\rho_1\Phi_1]-$
$-A\tau_3\Psi_2-2AJ\nu_2\rho_2\rho_1-\rho_2^2(\Phi_1+6P'\rho_1\rho_0)-2AN\rho_2\tau_2\rho_1-4P'\rho_2\rho_1^3=0$

$\nu_5(3\rho_0^2-5A\tau_0)-\rho_5(4\nu_0-7A\tau_0)\rho_0+A\tau_5(5\nu_0-4\rho_0^2)+$
$+\nu_4(4\rho_1\rho_0-3A\tau_1)-\rho_4[2\nu_1\rho_0+\rho_1(4\nu_0-7A\tau_0)-4A\tau_1\rho_0]+$
$+A\tau_4(3\nu_1-5\rho_1\rho_0)+\nu_3(2\rho_2\rho_0-A\tau_2+\rho_1^2)-$
$-\rho_3[\rho_2(4\nu_0-7A\tau_0)-A(\tau_2-h)\rho_0+2\nu_1\rho_1-4A\rho_1\tau_1]+$
$+A\tau_3(\nu_2-2\rho_2\rho_0-\rho_1^2)-\rho_2^2(\nu_1-2A\tau_1)+A\rho_2[(\tau_2-h)\rho_1-2Qk]=0$

. . . .

Здесь положено для краткости

$$\Theta_0=2A\nu_0-J\rho_0^2-AB_1\tau_0$$
$$\Theta_1=2A\nu_1-J(\rho_0\rho_1+\rho_1\rho_0)-AB_1\tau_1$$
$$\Theta_2=2A\nu_2-J(\rho_0\rho_2+\rho_1\rho_1+\rho_2\rho_0)-AB_1\tau_2$$

$$\Phi_0'=AJ\nu_0+2P'\rho_0^2+AN\tau_0$$
$$\Phi_0=AJ\nu_0+6P'\rho_0^2+AN\tau_0$$
$$\Phi_1=AJ\nu_1+6P'\rho_1\rho_0+AN\tau_0$$
$$\Phi=AJ\nu_1\rho_0+\rho_1\Phi_0+AN\tau_1\rho_0$$

$$\Psi_0=AB_1\nu_0+N\rho_0^2-2ABC\tau_0$$
$$\Psi_1=AB_1\nu_1+N(\rho_0\rho_1+\rho_1\rho_0)-2ABC\tau_1$$
$$\Psi_2=AB_1\nu_2+N(\rho_0\rho_2+\rho_1\rho_1+\rho_2\rho_0)-2ABC\tau_2$$

Первая система (4.3) имеет для ν_0 и τ_0 решение

$$\nu_0=-A^2,\qquad \tau_0=-2A$$

ρ_0 определяется уравнением

$$(A-B)(A-C)\rho_0^4+A^2[(A-B)(A-C)+(A-2B)(A-2C)]\rho_0^2+$$
$$+A^4(A-2B)(A-2C)=0 \qquad (4.4)$$

Из первого уравнения второй системы следует $\tau_1 = 0$, второе и третье уравнения, однородные относительно ν_1, ρ_1, имеют ненулевые решения при следующем условии:

$$(A-B)(A-C)\rho_0^4 - A^4(A-2B)(A-2C) = 0$$

Приравнивая нулю результант многочленов (4.4) и полученного, находим условие при $\nu_1 \neq 0$, $\rho_1 \neq 0$, которое заключает в себе случай С. В. Ковалевской или дает

$$(A-B)(A-C) = (A-2B)(A-2C) \qquad (N+BC=0) \tag{4.5}$$

Исключим из рассмотрения случай С. В. Ковалевской. Тогда общий корень этих многочленов будет $\rho_0^{(1,2)} = iA$, где $i = \pm\sqrt{-1}$.

Если предположить выполненным условие (4.5), то можно считать ν_1 произвольной постоянной и ρ_1 имеющей значение

$$\rho_1 = \frac{3}{2\rho_0}\nu_1$$

Исключим ν_2 из первого и второго уравнений и из первого и третьего уравнений третьей системы (4.3). Полученные два уравнения в силу значений $\rho_0 = iA$ имеют равный нулю определитель системы относительно этих переменных ρ_2, τ_2. Тогда свободные члены этих уравнений должны быть пропорциональными коэффициентам при переменных, что приводит к условию

$$\nu_1^2[3A - 2(B+C)] = 0$$

Полученное условие совместно с (4.5) при $\nu_1 \neq 0$ никаких новых случаев, кроме случая С. В. Ковалевской, не дает и заставляет сделать предположение $\nu_1 = \rho_1 = \tau_1 = 0$.

Это соответствует следующим значениям ρ_0 из уравнения (4.4):

$$\rho_0^{(1,2)} = iA, \qquad \rho_0^{(3,4)} = iA\sqrt{\frac{(A-2B)(A-2C)}{(A-B)(A-C)}}$$

При этом условие (4.5) не выполняется.

Определяем последовательно коэффициенты рядов (4.2) для корня $\rho_0^{(1,2)} = iA$. При этом получаем:

третья система (4.3)

$$\nu_2 + A\tau_2 - Ah = 0, \qquad B_1\nu_2 + 2i(N-BC)\rho_2 - 2BC\tau_2 = 0$$

$$4\nu_2 - 4iA\rho_2 - A\tau_2 - Ah = 0 \tag{4.6}$$

ее решение

$$\nu_2 = \frac{2}{3}Ah, \quad \rho_2 = -\frac{ih}{3}, \quad \tau_2 = \frac{h}{3}$$

четвертая система (4.3)

$$2\nu_3 + A\tau_3 + 2iQk = 0, \qquad B_1\nu_3 - 2iAB_1\rho_3 - 2BC\tau_3 = 0$$

$$5\nu_3 - 6iA\rho_3 - A\tau_3 + 2iQk = 0 \tag{4.7}$$

ее решение

$$\nu_3 = -iQk, \qquad \rho_3 = -\frac{Qk}{2A}, \qquad \tau_3 = 0$$

пятая система (4.3)

$$9\nu_4 + 3A\tau_3 + h^2 = 0$$
$$AB_1\nu_4 - 2iA(AB + BC + CA)\rho_4 - 2ABC\tau_4 - \frac{1}{9}Nh^2 = 0 \qquad (4.8)$$
$$6\nu_4 - 8iA\rho_4 - A\tau_4 + \frac{4}{9}h^2 = 0$$

ее решение

$$\nu_4 = -\frac{h^2}{15}, \qquad \rho_4 = -\frac{ih^2}{45A}, \qquad \tau_4 = -\frac{2h^2}{15A}$$

шестая система (4.3)

$$4A\nu_5 + A^2\tau_5 - \frac{2}{3}iQkh = 0$$
$$A^2B_1\nu_5 - 2iA^2(AB + AC + 2BC)\rho_5 - 2A^2BC\tau_5 + \frac{1}{3}iQNkh = 0 \qquad (4.9)$$
$$7A\nu_5 - 10iA^2\rho_5 - A^2\tau_5 - iQkh = 0$$

ее решение

$$\nu_5 = 0, \qquad \rho_5 = -\frac{Qkh}{6A^2}, \qquad \tau_5 = \frac{2iQkh}{3A^2}$$

Матрица из коэффициентов системы (4.6), линейной и однородной относительно ν_2, ρ_2, τ_2, h, имеет следующие миноры третьего порядка Δ_s, которые получаются вычеркиванием s-го столбца:

$$\Delta_1 = 4iA^2\lambda, \qquad \Delta_2 = -2A\lambda, \qquad \Delta_3 = 2iA\lambda, \qquad \Delta_4 = -6iA\lambda$$

где $\lambda = N + BC \neq 0$ в силу невыполнения (4.5).

Если эти миноры не равны нулю, то, выбрав за свободную неизвестную любую из величин ν_2, ρ_2, τ_2, h, можно однозначным образом определить через нее остальные величины.

Для того чтобы хотя бы некоторые из неизвестных могли быть произвольными постоянными, необходимо, чтобы миноры третьего порядка были равны нулю. Для системы (4.6) это выполнено быть не может, так как $\lambda \neq 0$.

Матрица из коэффициентов системы (4.7), линейной и однородной относительно ν_3, ρ_3, τ_3, k, имеет следующие миноры третьего порядка:

$$\Delta_1 = 8QA\lambda, \qquad \Delta_2 = 4iQ\lambda, \qquad \Delta_3 = 0, \qquad \Delta_4 = -8iA\lambda$$

Требование равенства нулю этих миноров никаких новых условий не даст, если отбросить условие $Q = Mgx_0 = 0$, как ранее полученное.

Матрица из коэффициентов системы (4.8), линейной и однородной относительно ν_4, ρ_4, τ_4, h^2, имеет следующие миноры третьего порядка:

$$\Delta_1 = -2iA^2\lambda, \qquad \Delta_2 = -\frac{2}{3}A\lambda, \qquad \Delta_3 = -4iA\lambda, \qquad \Delta_4 = -30iA^2\lambda$$

Необходимые требования равенства нулю миноров здесь не могут быть выполнены.

Матрица из коэффициентов системы (4.9), линейной и однородной относительно ν_5, ρ_5, τ_5, h, имеет следующие миноры третьего порядка:

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 2iQA^3k\lambda, \qquad \Delta_3 = -8QA^3k\lambda, \qquad \Delta_4 = -12iA^5\lambda$$

Если $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$, то h выражается через k и неизвестные коэффициенты ρ_5 или τ_5, в силу чего ограничение, связывающее произвольные постоянные h, k, не устанавливается.

Постоянные h и k, вообще говоря, независимы.

Поэтому необходимо, чтобы $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$, что дает необходимое ограничение на значение постоянной интеграла площадей

$$k = 0 \tag{4.10}$$

Систему (4.9) можно рассматривать как линейную и однородную систему относительно неизвестных ν_5, ρ_5, τ_5, k, матрица которой имеет те же миноры, если в них вместо k подставить h. Тогда получим необходимое ограничение на значение постоянной живой силы

$$h = 0 \tag{4.11}$$

При этом в коэффициентах рядов (4.2) не выявилось ни одной существенной произвольной постоянной.

Подобное исследование можно провести в общем виде для s-й системы (4.3) не только для корня $\rho_0^{(1,2)} = iA$, но также и для корня

$$\rho_0^{(3,4)} = iA\sqrt{\frac{(A-2B)\,(A-2C)}{(A-B)\,(A-C)}}$$

Это исследование не дало результатов, которые необходимо было бы приводить в настоящей статье.

5. Случаи интегрируемости, когда центр тяжести расположен в плоскости, проходящей через оси равных моментов инерции. Рассмотрим третье и одно из трех последующих условий (3.8), например 3-е и 6-е условия, которые дадут

$$A = B, \qquad A \neq C, \qquad y_0 = z_0 = 0 \tag{5.1}$$

Центр тяжести тела лежит в плоскости, проходящей через оси равных моментов инерции.

Исходные дифференциальные уравнения (2.10) примут вид

$$\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = -\nu(\tau - h)^2 + 4Q\,[Q\,(\nu - \rho^2) + k\rho\,(\tau - h) - Qk^2] \tag{5.2}$$

$$A^2C\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = -A\nu^2 + (A - C)\,\nu\rho^2 + A\,(A + C)\,\nu\tau - A\,(A - C)\,\rho^2\tau - A^2C\tau^2$$

$$(\rho^2 - A\tau)\,\frac{d\nu}{dt} + A\,[\rho\,(\tau - h) - 2Qk]\,\frac{d\rho}{dt} + A\,(\nu - \rho^2)\,\frac{d\tau}{dt} = 0$$

где $Q = Mgx_0$.

Условие (4.5) предыдущего параграфа дает случай С. В. Ковалевской.

При невыполнении его, т. е. в случае $A \neq 2C$, на основании результатов предыдущего параграфа, получим или $k = 0$, или $h = 0$. Поэтому отыскание дальнейших условий интегрируемости нужно проводить при соблюдении одного из этих требований или можно разыскивать еще другие условия в общем виде и затем уже наложить эти требования, если $A \neq 2C$.

При условиях (5.1) имеются другие значения коэффициентов n_1, n_2, n_3 из рядов (4.2), чем взятые в § 4, например $n_1 = n_3 = 2$, $n_2 = 3$, при которых ряды (4.2) будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений (5.2).

Тот факт, что при $A = B$ функция p (в рассматриваемом случае $\rho = Ap$) может иметь полюс третьего порядка, был впервые подмечен

Г. Г. Аппельротом и П. А. Некрасовым (см. теорему Г. Г. Аппельрота в § 1).

Подставляя при указанном выборе значений n_1, n_2, n_3 ряды (4.2) в систему (5.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t левых и правых частей уравнений, получаем следующие системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов:

$$\begin{aligned}
1.\quad & 4\nu_0^2 + \nu_0\tau_0^2 + 4Q^2\rho_0^2 = 0 \\
& (A-C)(\nu_0 - A\tau_0) - 9A^2C = 0 \qquad\qquad (5.3)\\
& 2\nu_0 + A\tau_0 = 0 \\
2.\quad & \nu_1(4\nu_0 + \tau_0^2) + 8Q^2\rho_1\rho_0 + 2\tau_1\nu_0\tau_0 - 4Qk\rho_0\tau_0 = 0 \\
& (A-C)\nu_1\rho_0 + 6A^2C\rho_1 - A(A-C)\tau_1\rho_0 = 0 \\
& \nu_1\rho_0 + \rho_1(4\nu_0 + A\tau_0) + 2A\tau_1\rho_0 = 0 \\
3.\quad & \nu_2\tau_0^2 + 8Q^2\rho_2\rho_0 + 2(\tau_2 - h)\nu_0\tau_0 + \nu_1(\nu_1 + 2\tau_1\tau_0) + \\
& + 4Q\rho_1(Q\rho_1 - k\tau_0) + \tau_1^2\nu_0 - 4Qk\tau_1\rho_0 = 0 \\
& (A-C)\nu_2\rho_0^2 + 12A^2C\rho_2\rho_0 - A(A-C)\tau_2\rho_0^2 + 2(A-C)\nu_1\rho_1\rho_0 + \\
& + 5A^2C\rho_1^2 - 2A(A-C)\rho_1\tau_1\rho_0 = 0 \\
& 4\rho_2\nu_0\rho_0 + 3A(\tau_2 - h)\rho_0^2 + 2\nu_1\rho_1\rho_0 + 2\rho_1^2\nu_0 + 3A\rho_1\tau_1\rho_0 = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s+1.\quad & \nu_s[-4(s-2)\nu_0 + \tau_0^2] + 8Q^2\rho_s\rho_0 + 2\tau_s\nu_0\tau_0 = f'_{s-1}(\nu, \rho, \tau) \\
& (A-C)\nu_s\rho_0 + 6sA^2C\rho_s - A(A-C)\tau_s\rho_0 = f''_{s-1}(\nu, \rho, \tau) \\
& (s-2)\nu_s\rho_0 + \rho_s[-4\nu_0 + (s-2)A\tau_0] - (s+1)A\tau_s\rho_0 = f'''_{s-1}(\nu, \rho, \tau) \\
& \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)
\end{aligned}$$

Здесь функции $\{f'_{s-1}(\nu, \rho, \tau)$, $f''_{s-1}(\nu, \rho, \tau)$, $f'''_{s-1}(\nu, \rho, \tau)$ — полиномы, зависящие от неизвестных, $\{\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, \rho_1, \ldots, \rho_{s-1}, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}\}$ индекс которых $i \leqslant s-1$.

Первая система (5.3) имеет решение (5.4)

$$\nu_0 = \frac{3A^2C}{A-C}, \quad \rho_0 = \frac{3A^2C}{Q(A-C)}m, \quad \tau_0 = -\frac{6AC}{A-C} \qquad \left(m = i\sqrt{\frac{A+2C}{A-C}} \neq 0\right)$$

Вторая система имеет определитель $\Delta \neq 0$ и следующее решение:

$$\nu_1 = \frac{3ACk}{(A-C)m}, \qquad \rho_1 = -\frac{3ACk}{2Q(A-C)}, \qquad \tau_1 = 0$$

Решением третьей системы (5.3) служат значения

$$\nu_2 = \frac{3C(4A-7C)k^2}{4(A+2C)(A+3C)}, \qquad \rho_2 = \frac{3C(4A-7C)k^2}{8Q(A-C)(A+3C)m}$$

$$\tau_2 = h + \frac{C(3A-10C)k^2}{2A(A+2C)(A+3C)} \qquad \text{и т. д.}$$

Не проводя исследования матриц систем (5.3), как это было сделано в предыдущем параграфе, обратим внимание на следующее.

Для того, чтобы решения системы дифференциальных уравнений (5.2), представленные в виде рядов рассмотренного вида, зависели от произвольных постоянных (хотя это число произвольных постоянных может быть неполным), кроме постоянной t_0, просто приданной к t, необходимо, чтобы определитель $s+1$-й системы (5.3) исчезал для некоторых целых, положительных значений s ($s=1, 2, 3, \ldots$) при значениях ν_0, ρ_0, τ_0 из (5.4). Приравнивая нулю определитель $s+1$-й системы (5.3) относительно величин ν_s, ρ_s, τ_s, получаем необходимое условие в виде

$$[s(s-1)-3]A = [s(s-1)+6]C \qquad (s=3, 4, 5, \ldots) \tag{5.5}$$

Это необходимое условие существования однозначных решений не может быть выполнено при $s=1$, $s=2$ в силу механических условий задачи ($A>0$, $C>0$).

При $s=3$ получаем условие $A=4C$. Накладывая требование, полученное в предыдущем параграфе $k=0$ и принимая во внимание (5.1), получаем случай Д. Н. Горячева — С. А. Чаплыгина.

При $s=4$ получаем условие $A=2C$. Но тогда согласно § 4 требование $k=0$ уже не является необходимым. Принимая во внимание (5.1), вновь получаем случай С. В. Ковалевской.

При $s=5$ получаем условие $A=\frac{26}{17}C$, при $s=6$ — условие $A=\frac{4}{3}C$ и т. д.

Поступила 27 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. Перевод П. Я. Полубариновой-Кочиной в сборнике, посвященном памяти С. В. Ковалевской «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки», под ред. С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова, АН СССР, М. — Л., 1940, стр. 11—49. Научные работы, изд. АН СССР, 1948, стр. 153—220.
2. Ковалевская С. В. Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С. В. Ковалевской, стр. 50—60. Научные работы, изд. АН СССР, 1948, стр. 221—224.
3. Hess W. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue particüläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Annalen, 1890. Bd. 37, H. 2. S. 153—181.
4. Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1892, т. 5; М., 1893, т. 6. Полн. собр. соч., т. 1, М.—Л., 1937, стр. 332—351, 45—93.
5. Аппельрот Г. Г. По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской «Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe» и дополнение к этой статье. Мат. сборник., 1892, т. 16, стр. 483—507, 592—596.
6. Некрасов П. А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Мат. сборник, М., 1892, т. 16, стр. 508—517.
7. Некрасов П. А. О движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1893, т. 5, вып. 2, стр. 17—37.
8. Некрасов П. А. Дополнение к статье «О движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки». Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1893, т. 6, вып. 1, стр. 18—20.
9. Млодзеевский Б. К. и Некрасов П. А. Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1893, т. 6, вып. 1, стр. 43—52.
10. Аппельрот Г. Г. Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Ученые записки Московского университета. Отдел физико-математический, 1894, вып. 11, стр. 1—112. Аппельрот Г. Г. Некоторые дополнения к моему сочинению «Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки». Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания. 1894, т. 7, вып. 1, стр. 1—4.
11. Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Сообщение

Харьковского математического о-ва, 1894, 2-я серия, т. 4, стр. 123—140; 1895, т. 4, № 5 и 6. С. В. Ковалевская. Научные работы, изд. АН СССР, 1948, стр. 286—304.

12. Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1894, Bd. 113, H. 4, S. 318—334.
13. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1894, т. 7, стр. 46—48.
14. Чаплыгин С. А. По поводу локсодромического маятника Гесса. Труды отд. физ. наук общества любителей естествознания, 1894, т. 7. Собр. соч., т. 1, Л., 1933, стр. 252—253; собр. соч., т. 1, М.—Л., 1948, стр. 133—135.
15. Некрасов П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Мат. сборник., 1896, т. 18, вып. 12, стр. 161—274.
16. Аппельрот Г. Г. Замечания по поводу сообщения проф. А. М. Ляпунова на заседании Харьковского математического об-ва 10 мая 1893 г. Мат. сборник, 1896, т. 18, стр. 723—727.
17. Бобылев Д. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1896, т. 8, вып. 2, стр. 21—25.
18. Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1896, т. 8, вып. 2, стр. 19—21.
19. Чаплыгин С. А. Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1898, т. 9, вып. 2, Собр. соч., т. 1, Л., 1933, стр. 235—240; Собр. соч., т. 1, М —Л., 1948, стр. 110—117.
20. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1899, т. 10, вып. 1, стр. 1—3.
21. Жуковский Н. Е. Модель маятника Гесса. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1899, т. 10, вып. 1. Полн. собр. соч., М—Л., 1937, стр. 455—459.
22. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1899, т. 10, вып. 1, стр. 23—24.
23. Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$. Мат. сборник, 1900, т. 21, вып. 3, стр. 431—438.
24. Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1901, т. 10. Собр. соч., т. 1, Л., 1933, стр. 241—245; Собр. соч., т. 1, М.—Л., 1948, стр. 118—124.
25. Шифф П. А. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Мат. сборник., 1903, т. 24, вып. 2, стр. 169—177.
26. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки. Труды отд физ. наук Общества любителей естествознания, 1904, т. 12, вып. 1. Собр. соч., т. 1, Л., 1933, стр. 246—251; Собр. соч., т. 1, М.—Л., 1948, стр. 125—132.
27. Чаплыгин С. А. Неопубликованные рукописи. См. статью Л. Н. Сретенского «О работах С. А. Чаплыгина по теоретической механике». Собр. соч. С. А. Чаплыгина, т. III. Гостехиздат, 1950, стр. 366—376.
28. Kowalewski N. Eine neue particuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Annalen., 1908, Bd. 65, S. 528—537.
29. Полубаринова-Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С. В. Ковалевской «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки». Изд. АН СССР, М.—Л., 1940, стр. 157—186.
30. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico. Annali di Mat., 1947, XXVI, № 3—4, Ser. IV, 271—281.
31. Сретенский Л. Н. Движение гироскопа Горячева—Чаплыгина. Известия АН СССР, ОТН, 1953, № 1, стр. 109—119.
32. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Гостехиздат, 1953.
33. Гуляев М. П. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Вестник МГУ, 1955, № 3, стр. 15—21.
34. Архангельский Ю. А. Движение быстрого гироскопа Горячева — Чаплыгина. Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1957, стр. 122—124.