Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ

Н. Н. Моисеев

(Москва)

Работа посвящена расчету нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости. Однако работа имеет ряд недостатков, вследствие которых автор долгое время считал нецелесообразным ее опубликование.

Так, следует отметить, что результаты получены формальным путем, сходимость процесса не доказана, вычисления, связанные с реализацией процесса, очень трудоемки.

Возможность распространения этих результатов на случай колебаний тела с жидкостью, имеющей свободную границу, была неясна, так как отсутствовала теорема о полноте главных колебаний такого тела.

Так как при нелинейных колебаниях амплитуда очень быстро достигает своего предельного значения и волны разрушаются, то казалось, что практически нужна либо линейная теория, либо теория, учитывающая диссипацию энергии при разрушении волн.

Обоснование процесса не удалось получить и к данному времени. Тем не менее следующие обстоятельства, как нам кажется, оправдывают теперь публикацию теории.

1. Применение быстродействующих машин позволяет сейчас без особого труда проводить требуемые вычисления, тем более, что в последние годы разработаны эффективные методы численного решения соответствующих краевых задач.

2. Вопрос о полноте главных колебаний тела с жидкостью вполне выяснен, распространение развиваемой теории на случай колебания тела с жидкостью, имеющей свободную границу, не встречает принципиальных трудностей.

3. Исследование резонансных явлений в жидкости принципиально невозможно провести в рамках линейной теории, а этот вопрос в настоящее время начал интересовать практиков.

§ 1. Свободные колебания жидкости. 1°. Задача сводится к определению функции φ, гармонической в объеме τ (см. фиг. 1, где приведены обозначения), ограниченном неподвижной поверхностью и свободной границей $z = \zeta(x, y, t)$ и удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{на } \Sigma \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 = 0 \qquad \text{для } z = \zeta \tag{1.2}$$

где функция ζ определяется из кинематического соотношения

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=\zeta} \tag{1.3}$$

Обозначим через λ_n и $\psi_n(x, y)$ собственные числа и функции интегрального уравнения

$$\psi(x, y) = \lambda \int_S H(x, y, 0;\ x', y', 0')\,\psi(x', y')\,ds \tag{1.4}$$

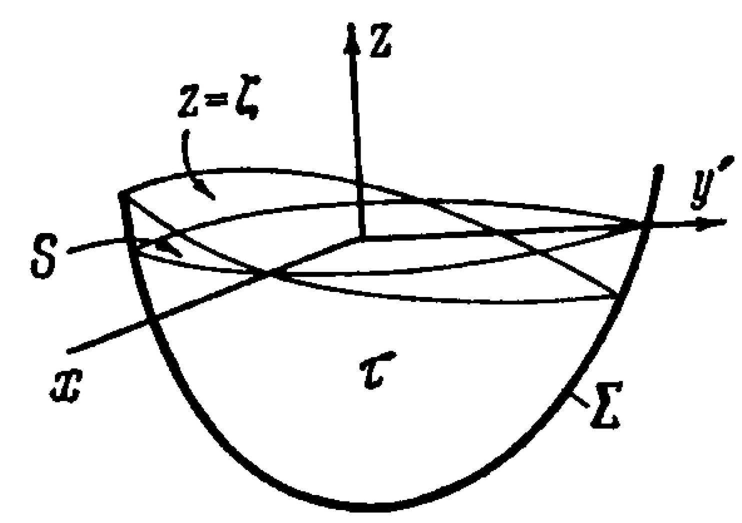
где H — функция Грина задачи Неймана для объема τ', ограниченного поверхностью Σ и плоскостью $z = 0$.

Имеет место следующий результат [4]. Пусть φ_n^* и ζ_n^* — потенциал скоростей и свободная граница n-го свободного колебания жидкости бесконечно малой амплитуды и пусть

$$\zeta_n^* = \psi_n(x, y) \sin \sigma_n t$$

Тогда

$$\varphi_n^* = \sigma_n \Phi_n(x, y, z) \cos \sigma_n t \tag{1.5}$$



Фиг. 1

Здесь

$$\Phi_n(x, y, z) = \int\limits_S H(x, y, z; x', y', 0)\, \psi_n(x', y')\, ds$$

т. е.

$$\Phi_n(x, y, 0) = \frac{\psi_n(x, y)}{\lambda_n}$$

Частоты собственных колебаний σ_n и числа λ_n связаны формулой

$$\sigma_n^2 = g\lambda_n \tag{1.6}$$

2°. Пусть ε — некоторый параметр; положим

$$\varphi = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \varepsilon^n, \qquad \zeta = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \varepsilon^n \tag{1.7}$$

Введем новое независимое переменное

$$\tau = \frac{t\sigma_m}{1 + \Sigma h_n \varepsilon^n} \tag{1.8}$$

где h_n — подлежащие определению постоянные.

Подставляя ряды (1.7) в условия (1.2) и (1.3) и переходя к новому переменному, получим следующую систему уравнений для определения неизвестных функций φ_n и ζ_n:

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)_0 + \frac{1}{\sigma_m} g\zeta_0 = 0 \tag{1.9}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right)_0 + \frac{1}{\sigma_m} g\zeta_1 = A_1(\varphi_0, \zeta_0) - \frac{h_1}{\sigma_m} g\zeta_0 \tag{1.10}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}\right)_0 + \frac{1}{\sigma_m} g\zeta_2 = A_2(\varphi_0, \zeta_0, \varphi_1, \zeta_1, h_1) - \frac{h_2}{\sigma_m} g\zeta_0$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \tau} = \frac{1}{\sigma_m}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\right)_0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\sigma_m}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_0 + B_1(\varphi_0, \zeta_0, h_1)$$

Функции A_i и B_i легко могут быть вычислены. Символ $(\ )_0$ означает, что значения функции взяты при $z = 0$.

3°. Найдем нулевое приближение. Дифференцируя частным образом по τ первое из уравнений системы (1.9) и используя первое из условий

(1.10), получим

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\sigma_m^2}g\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right)_0=0 \tag{1.11}$$

Положим

$$\varphi_0=\sum f_{n0}(t)\,\phi_n(x,y,z),\ \phi_n(x,y,0)=\phi_n(x,y)$$

Тогда

$$\phi_n(x,y,0)=\int\limits_S H(x,y,0,x',y',0)\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial z'}\right)_0 ds$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial z}\right)_0=\lambda_n\psi_n=\frac{\sigma_n^2}{g}\psi_n \tag{1.12}$$

Поэтому для функции f_{n0} получим уравнения

$$f_{n0}''+\frac{\sigma_n^2}{\sigma_m^2}f_{n0}=0$$

В силу произвольности начала отсчета времени, единственное решение этой системы периода 2π имеет вид [1]:

$$f_{n0}=0\quad \text{при } n\neq m\,,\qquad f_{m0}=c\cos\tau$$

Примем $c=ag/\sigma_m$; тогда

$$\varphi_0=\frac{ag}{\sigma_m}\cos\tau\varphi_m \tag{1.13}$$

Используя первое из уравнений (1.10) и равенство (1.12), найдем форму волновой поверхности:

$$\zeta_0=a\psi_m\sin\tau \tag{1.14}$$

Здесь a — произвольная постоянная.

4°. Найдем первое приближение. Дифференцируя второе из уравнений системы (1.9), заменяя $\partial\zeta_1/\partial\tau$ его значением из второго уравнения системы (1.10) и принимая во внимание значения ζ_0 и φ_0, получим при $z=0$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\sigma_m^2}g\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=-\frac{h_1}{\sigma_m}ga\cos\tau\psi_m+a^2\sin 2\tau F_1^{(2)}(x,y)$$

Здесь $F_1^{(2)}(x,y)$ — уже известная функция. Решение будем искать в виде

$$\varphi_1=\sum f_{n1}\phi_n$$

Если принять

$$F_1^{(2)}(x,y)=\sum b_{1k}^{(2)}\psi_n$$

то для определения f_{n1} придем к следующей системе:

$$\begin{aligned} &f_{n1}''+\frac{\sigma_n^2}{\sigma_m^2}f_{n1}=a^2b_{1n}^{(2)}\sin 2\tau \qquad (n\neq m)\\ &f_{m1}''+f_{m1}=-\frac{h_1}{\sigma_m}ga\cos\tau+a^2b_{1m}^{(2)}\sin 2\tau \end{aligned} \tag{1.15}$$

[1] Предполагается, что σ_n^2/σ_m^2 не равно целому числу, если $n\neq m$.

Для существования периодического решения системы (1.15) необходимо и достаточно, чтобы $h_1 = 0$. Амплитуда a может быть любой; не ограничивая общности, примем ее равной единице.

Если определены f_{n1}, то сразу могут быть вычислены функции φ_1 и ζ_1.

5°. Для определения первой поправки на частоту h_2 надо рассмотреть второе приближение. Повторяя рассуждения, придем к следующему условию для функции φ_2 при $z = 0$:

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau^2} + \frac{1}{\sigma_m^2} g \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{h_2}{\sigma_m} g \cos \tau\psi_m + F_2^{(1)} \cos\tau + F_2^{(3)} \cos 3\tau$$

Положим

$$\varphi_2 = \sum f_{n2}\phi_n, \qquad F_2^{(1)} = \sum b_{k2}^{(1)}\psi_n, \qquad F_2^{(3)} = \sum b_{k2}^{(3)}\psi_n$$

Для функций $f_{n2}(t)$ получим уравнения

$$f_{n2}'' + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_m^2} f_{n2} = b_{n2}^{(1)} \cos\tau + b_{n2}^{(3)} \cos 3\tau \qquad (n \neq m)$$

$$f_{m2}'' + f_{m2} = \left(-\frac{h_2}{\sigma_m} g + b_{m2}^{(1)}\right) \cos\tau + b_{m2}^{(3)} \cos 3\tau \qquad (n = m)$$

Для существования периодических решений этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$h_2 = \frac{b_{m2}^{(1)}\sigma_m}{g} \tag{1.16}$$

Если равенство (1.16) имеет место, то легко находится искомое решение.

6°. Легко провести индукцию и доказать возможность вычисления любого приближения. Условие для функции φ_k будет:

при k нечетном

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\tau^2} + \frac{1}{\sigma_m} g \frac{\partial\varphi_k}{\partial z} = -\frac{h_k}{\sigma_m} g \cos \tau\psi_m + \sum_{s=2}^{k+1} F_k^{(s)}(x, y) \sin s\tau \qquad (s = 2, 4, 6, \ldots)$$

при k четном

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\tau^2} + \frac{1}{\sigma_m} g \frac{\partial\varphi_k}{\partial z} = -\frac{h_k}{\sigma_m} g \cos \tau\psi_m + \sum_{s=1}^{k+1} F_k^{(s)}(x, y) \cos s\tau \qquad (s = 3, 5, 7)$$

Примем

$$\varphi_k = \sum f_{nk}\phi_n, \qquad F_k^{(3)} = \sum b_{nk}^{(s)}\psi_n$$

Для функций f_{nk} получим следующую систему уравнений;

$$f_{nk}'' + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_m^2} f_{nk} = \sum b_{nk}^{(s)} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} s\tau \qquad (n \neq m)$$

$$f_{mk}'' + f_{mk} = -\frac{h_k}{\sigma_m} g \cos\tau + \sum b_{mk}^{s} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} s\tau \qquad (n = m)$$

Здесь sin соответствует нечетным, а cos четным значениям k (при этом индекс s принимает также соответственно четные или нечетные значения).

Отсюда следует, что если k нечетно, то необходимо $h=0$, если k четно, то

$$h_k = \frac{b_{km}^{(1)}}{g} \tag{1.17}$$

7°. Используя полученное решение, можно вычислить потенциал скоростей и все характеристики течения. В частности, уравнение свободной границы можно представить в виде

$$\zeta = \varepsilon\psi_m(x, y)\sin\frac{\sigma_m t}{1 + h_2\varepsilon^2 + \ldots} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots \tag{1.18}$$

Таким образом, параметр ε представляет собой амплитуду волны. Можно сделать также ряд общих выводов.

а) Частота является функцией амплитуды:

$$\sigma_m^* = \frac{\sigma_m}{1 + Q(\varepsilon, \sigma_m)} \tag{1.19}$$

Таким образом, спектр является не дискретным, а кусочно-непрерывным.

б) Периодические колебания возможны с любой амплитудой, лежащей внутри круга сходимости ряда (1.18). В этом проявляется одна из аналогий изучаемых колебаний и колебаний консервативных систем конечного числа степеней свободы.

Для более детального изучения свойств свободных колебаний необходимо конкретизировать форму полости.

В частном случае цилиндрических полостей можно показать, что:

а) нельзя указать момента t, в который свободная поверхность представляет собой плоскость;

б) не существует неподвижных узлов.

Доказательство сходимости предложенного процесса встречает ряд трудностей. В частности, реализация процесса возможна только тогда, когда σ_n / σ_m не есть целое число, если только $n \neq m$.

Как частный случай из этих результатов получается решение задачи Я. И. Секерж-Зеньковича[5], рассмотревшего стоячие волны в безграничной жидкости. Его теория эквивалентна теории колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.

§ 2. **Вынужденные колебания, резонансные явления.** 1°. Задача о вынужденных колебаниях жидкости под действием поля массовых сил отличается от рассмотренной тем, что условие (1.2) не является однородным:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 = U(t, x, y) \quad \text{при } z = 0 \tag{2.1}$$

Примем для простоты, что

$$U = \frac{\mu}{p}\sin pt f(x, y) \tag{2.2}$$

Поставим задачу об отыскании периодических решений этой системы периода $2\pi / p$.

2°. При $\mu = 0$ задача будет описывать колебание некоторой консервативной системы, поэтому обычная квазилинейная трактовка может оказаться недостаточной. Будем рассматривать нашу систему как систему, близкую к системе Ляпунова, и разыскивать решения, которые при $\mu \to 0$ переходят в периодические решения задачи (1.1) — (1.3).

Выше было установлено, что формально могут существовать периодические решения этой задачи, период которых зависит от амплитуды. В данном случае период T задан, — он равен периоду внешней силы $2\pi / p$ и, следовательно, амплитуда должна быть определена из соотношения

$$T = \frac{2\pi}{pn} \tag{2.3}$$

где n — любое целое число.

Пользуясь формулой (1.19), можно уравнение (2.3) представить в виде

$$\varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^4 h_4 + \ldots = \frac{\sigma_m - pn}{pn} \tag{2.4}$$

Мы видим, что поставленная задача заведомо не имеет единственного решения: могут существовать решения периода $2\pi / p$, которые при $\mu \to 0$ могут переходить в тривиальные; могут существовать решения, которые при $\mu \to 0$ переходят в нетривиальные решения задачи, рассмотренной 4 предыдущем параграфе. В этом параграфе мы остановимся только на построении решений первого типа.

3°. Рассмотрим колебания вдали от резонанса. Положим

$$\varphi = \sum_1^\infty \varphi_n \mu^n, \qquad \zeta = \sum_1^\infty \zeta_n \mu^n \tag{2.5}$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, при $z = 0$ придем к следующим уравнениям относительно φ_n и ζ_n:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g\zeta_1 = \frac{1}{p} \sin pt f(x, y), \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g\zeta_2 = A_1(\varphi_2, \zeta_1), \ldots \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + B_1(\varphi_1, \zeta_1), \ldots \tag{2.7}$$

Дифференцируя первое из уравнений (2.5) и используя первое из уравнений (2.7), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = f(x, y) \cos pt \qquad (z = 0)$$

Положим далее

$$\varphi_1 = \sum f_{n1}(t) \phi_n(x, y, z), \qquad f(x, y) = \sum c_n \psi_n(x, y)$$

Функции f_{n1} будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$f_{n1}'' + \sigma_n^2 f_{n1} = c_n \cos pt$$

Следовательно,

$$\varphi_1 = \sum \frac{c_n \phi_n}{\sigma_n^2 - p_n^2} \cos pt \tag{2.8}$$

Вычисление последующих приближений не встречает трудностей.

4°. Рассмотрим решение вблизи резонанса. Решение в форме (2.8) теряет смысл, если $p_n \to \sigma_m$. Для того чтобы изучить характер колебаний, будем считать «расстройку» $p_n^2 - \sigma_m^2$ малой:

$$p^2 = \sigma_m^2 + \mu\alpha$$

Тогда, пользуясь формулой (1.5), положим

$$g = \frac{p^2}{\lambda_m} + \mu \frac{\alpha}{\lambda_m}$$

Можно показать, что при $\alpha = 0$ не существует периодических решений задачи (2.1), имеющих вид:

$$\varphi = \sum_1^\infty \varphi_n \mu^{an/b}, \qquad \zeta = \sum_1^\infty \zeta_n \mu^{an/b}$$

если только a и b — целые числа и $b \neq 3a$. Поэтому положим

$$\varphi = \sum_1^\infty \varphi_n \mu^{1/3\, n}, \qquad \zeta = \sum_1^\infty \zeta_n \mu^{1/3\, n} \tag{2.9}$$

Системы уравнений (2.6) и (2.7) будут в этом случае иметь вид ($z = 0$)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{p^2}{\lambda_m} \zeta_1 = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{p^2}{\lambda_m} \zeta_2 = A_1$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + \frac{p^2}{\lambda_m} \zeta_3 = A_3 + \frac{f(x, y)}{p} \sin pt, \ldots$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + B_1, \ldots$$

В этих уравнениях функции A_i и B_i определяются формулами ($z = 0$)

$$A_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 \tag{2.11}$$

$$A_2 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + r_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) - \nabla \varphi_1 \left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial z} \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2\right), \ldots$$

$$B_1 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \tag{2.12}$$

$$B_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}, \ldots$$

Дифференцируя по t первое из уравнений (2.9) и используя первое из уравнений (2.10), получим ($z = 0$)

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \frac{p^2}{\lambda_m} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \tag{2.13}$$

Положим, как и ранее,

$$\varphi_1 = \sum f_{n1} \phi_n$$

Для функций f_{n1} получим систему уравнений

$$f_{n1}'' + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} p^2 f_{n1} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.14}$$

Единственным периодическим решением системы (2.14), имеющим период $2\pi / p$, будет

$$f_{n1} \equiv 0 \quad \text{при } n \neq m, \qquad f_{m1} = M \sin pt + N \cos pt \tag{2.15}$$

Здесь M и N — постоянные, подлежащие определению.

Пользуясь формулами (1.6) и первой из формул (2.10), находим

$$\varphi_1 = \phi_m(x, y, z)(M \sin pt + N \cos pt) \tag{2.16}$$

$$\zeta_1 = -\frac{\lambda_m \psi_m(x, y)}{p}(M \cos pt - N \sin pt)$$

Продифференцируем вторую формулу (2.9) частным образом по t:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \frac{p^2}{\lambda_m}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial t} \tag{2.17}$$

Здесь A_1 и B_1 вычисляются соответственно по формулам (2.11) и (2.12).

Производя выкладки, найдем, что

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial t} = \pi_{11}(M, N) A_{11}(x, y) \sin 2pt + \pi_{12}(M, N) A_{12}(x, y) \cos 2pt \tag{2.18}$$

Здесь π_{11} и π_{12} — суть квадратичные формы своих переменных.

Для определения потенциала φ_2 положим

$$\varphi_2 = \sum f_{n2}\phi_n, \qquad A_{ij} = \sum \alpha_{ij}^{(n)}\psi_n$$

Тогда относительно функций f_{n2} получим систему уравнений

$$f_{n2}'' + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} p^2 f_{n2} = \pi_{11}\alpha_{11}^{(n)} \sin 2pt + \pi_{12}\alpha_{12}^{(n)} \cos 2pt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.19}$$

Так как по предположению $\lambda_n / \lambda_m \neq k^2$, где k — целое число (если $n \neq m$), то единственным периодическим решением периода $(2\pi/p)$ системы (2.19) будет

$$f_{n2} = \pi_{11} d_{11}^{(n)} \sin 2pt + \pi_{12} d_{12}^{(n)} \cos 2pt \qquad n \neq m$$

$$f_{m2} = \pi_{11} d_{11}^{(m)} \sin 2pt + \pi_{12} d_{12}^{(m)} \cos 2pt + M_1 \sin pt + N_1 \cos pt \tag{2.20}$$

Здесь

$$d_{ik}^{(n)} = \frac{\alpha_{ik}^{(n)}}{p^2[\lambda_n^2 / \lambda_m^2]}$$

постоянные M_1 и N_1 подлежат определению.

Повторяя указанный выше порядок вычислений, получим следующее уравнение для определения третьего приближения $(z = 0)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} + \frac{p^2}{\lambda_m}\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \sin pt \sum_{i=0}^{3} a_{i,3-i}(x, y) M^i N^{3-i} +$$

$$+ \cos pt \left\{\sum_{i=0}^{3} b_{i,3-i}(x, y) M^i N^{3-i} + f(x, y)\right\} +$$

$$+ \sin 2pt\, F_1(x, y, M, N, M_1, N_1) + \ldots + \cos 3pt\, F_4(x, y, M, N, M_1, N_1)$$

Введем обозначения

$$\varphi_3 = \sum_k f_{k3}\phi_k, \qquad a_{ij} = \sum_k \alpha_{ij}^{(k)}\psi_k, \qquad b_{ij} = \sum_k \beta_{ij}^{(k)}\psi_k$$

$$F_s = \sum_k \gamma_{sk}(M, N, M_1, N_1)\psi_k(x, y), \qquad f(x, y) = \sum c_k\psi_k$$

Аналогично системе (2.19) получим систему, n-е уравнение которой будет иметь вид:

$$f_{n3}'' + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} p^2 f_{n3} = \sin pt \sum_{i=0}^{3} \alpha_{i,\,3-i} M^i N^{3-i} + \cos pt \left\{ \sum_{i=0}^{3} \beta_{i,\,3-i} M^i N^{3-i} + e_n \right\} +$$
$$+ \sin 2pt\gamma_{1n} + \cos 2pt\gamma_{2n} + \sin 3pt\gamma_{3n} + \cos 3pt\gamma_{4n} \qquad (2.21)$$

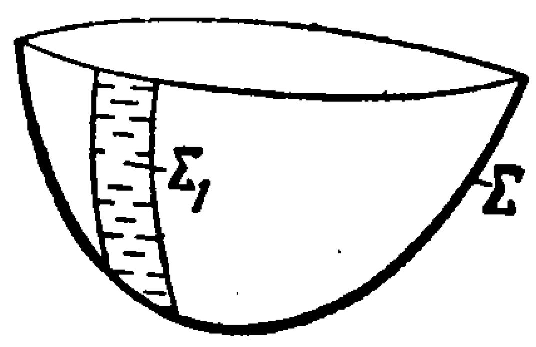
Для того чтобы уравнение (2.21) имело периодическое решение периода $2\pi/p$, необходимо и достаточно, чтобы числа M и N удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_{i,\,3-i} M^i N^{3-i} = 0, \qquad \sum_{i=0}^{3} \beta_{i,\,3-i} M^i N^{3-i} + e_m = 0 \qquad (2.22)$$

Таким образом, мы пришли к системе двух кубических уравнений, определяющих амплитуду и фазу функции φ_1. Функция φ_2 будет содержать две постоянные M_1 и N_1, которые должны быть определены из уравнения 4-го приближения.

§ 3. О задаче Ю. А. Кравченко. В работах[1–3] экспериментально и теоретически изучаются сейшеобразные колебания воды в портовых акваториях, индуцированные волнами, приходящими из открытого моря.

Предполагается, что акватория порта имеет форму цилиндра или параллелепипеда и соединена каналом с открытым морем. Предполагается, что в канале распространяются волны вполне определенных параметров. Требуется определить характер волн, возникающих на поверхности жидкости внутри порта. Эта задача отличается от задачи (1.1) — (1.3) тем, что в ней условие (1.1) будет заменено следующим (фиг. 2):



Фиг. 2

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = F(P)\cos pt \quad \text{для } P \in \Sigma_1$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{для } P \in \Sigma - \Sigma_1 \qquad (3.1)$$

Эта задача может быть сведена к задаче, изученной в § 2.

Для этого достаточно положить $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 — произвольная гармоническая в τ функция, удовлетворяющая условиям (3.1). Тогда на Σ функция φ_2 будет удовлетворять условию $\partial\varphi_2 / \partial n = 0$.

Условие постоянства давления перепишется в виде

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 = \mu F(t)\,\Phi(\mu, \varphi_1, \varphi_2) \qquad (3.2)$$

где функция Φ выражается через функции φ_1 и φ_2.

Кинематическое условие примет вид:

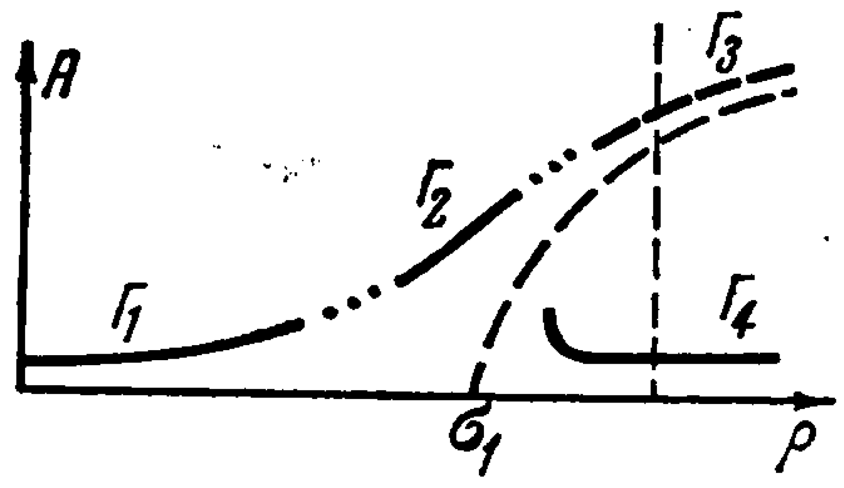
$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=\zeta} \qquad (3.3)$$

Для построения функции φ_2 и определения резонансного режима может быть применена процедура, изложенная в § 2.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно трудностей, которые встречает построение нелинейной теории, и желательных направлений дальнейших исследований.

Автором была проделана серия опытов для проверки теории вынужденных колебаний маятников, обладавших полостью в форме цилиндра и параллелепипеда. Эти опыты количественно подтвердили ту аналогию с нелинейными колебаниями механических систем конечного числа степеней свободы, которая развивается в этой работе.

Однако при этом обнаружились новые обстоятельства. Пусть, например, частота внешней силы p постепенно увеличивается, приближаясь слева к значению σ_1 (фиг. 3), тогда, если разность $\sigma_1 - p$ не очень мала, то зависимость амплитуды A от частоты вынужденных колебаний довольно хорошо следует кривой Γ_1. Если эта разность мала, то изменение амплитуды следует кривой Γ_2. Если бы имела место полная аналогия с системой конечного числа степеней свободы, то изменение $A(p)$ должно было бы следовать пунктирной кривой Γ_3. Далее этот режим был бы неустойчив и система перешла бы в режим, который описывается кривой Γ_4. Согласно изложенному это было бы уже двуузловое колебание. В опытах этот факт не наблюдался. На режим Γ_3 система никогда не выходила: уже для $p > \sigma_1$ и достаточно близких к σ_1 достигалась предельная амплитуда Стокса и волны разрушались (для высокочастотных колебаний это разрушение наступало еще раньше, когда $p \leqslant \sigma_1$). Это разрушение приводит к необратимой потере энергии. Поэтому для исследования колебаний реальных систем в режимах, близких к резонансу (например, в теории флаттера крыла, несущего баки), необходимо создать модель, учитывающую возможность разрушения волн и увеличение энтропии.



Фиг. 3

Сложность вычислений рассматриваемых задач приводит к необходимости пользоваться приближенными схемами, учитывающими, однако, существенно нелинейную природу явления. Заметим, что во многих случаях требуется учитывать только первые собственные колебания, при которых форма границы обладает малой кривизной, поэтому, по-видимому, целесообразно развить здесь методы, аналогичные вариационным методам Лаврентьева.

В нелинейной постановке эта задача теоретически почти не изучена. Основной вопрос о существовании периодических решений этой задачи остается открытым.

Поступила 28 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. McNown J. S. Sur l'entretien des oscillations des eaux portuaires sous l'action de la haute mer. Publication Scientifiques et Techniques Ministère de L'Air. Paris, 1953.
2. Apté A. S. Recherches théoriques et experimentales sur les mouvements des liquides pesants avec surface libre. Publication Scientifiques et Techniques Ministère de l'Air. Paris, 1955.
3. Kravtchenko J. and McNown J. S. Seiche in rectangular ports. Quart. Appl. Math., 1955, № 1, 19—26.
4. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Математический сборник, т. 32, вып. 1, 1953.
5. Секерж-Зенькович Я. И. К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости. ДАН СССР, т. 58, вып. 4, 1947.