

ГИПОТЕЗА ЛОКАЛЬНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОСТИ

Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

§ 1. Современное состояние вопроса. Широко применяемые в настоящее время полуэмпирические теории турбулентного движения и тепло- и массообмена основываются на схематическом разделении всего потока жидкости на резко разграниченные области, где трение, тепло- и массоперенос имеют либо только молекулярный (ламинарный подслой), либо чисто молярный (турбулентное ядро) характер. Закономерности, существующие в промежуточной между ними переходной или, как иногда говорят, «буфферной» области, введенной для уточнения теории тепло- и массообмена, до недавнего времени были слабо изучены и обычно заменялись приближенными эмпирическими соотношениями.

Результаты экспериментов по определению осредненных скоростей вблизи поверхности тела, в том числе и относящиеся к последнему времени [1], представлены на фиг. 1. Из приведенных на фиг. 1 данных видно наличие перехода (б) от линейного профиля скоростей непосредственно вблизи поверхности, в полулогарифмической анаморфозе представленного цепной линией (а), к логарифмическому профилю вдали от поверхности тела — прямой линии (в). В результате проведенных теоретических исследований удалось установить различные аналитические выражения профиля скоростей, объединяющего все три области. Отметим прежде всего, как первую в этом направлении, работу японского ученого К. Вада [2], относящуюся к 1927 г. В этой работе для учета влияния вязкости на механизм турбулентного трения была выдвинута формула

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (1.1)$$

выражающая простое наложение чисто ламинарного (молекулярного) трения на независящее от молекулярной вязкости турбулентное (молярное) трение. Первое слагаемое в этой формуле представляет закон Ньютона, второе — формулу Прандтля; оба слагаемых соответствуют простейшему прямолинейному установившемуся движению, параллельному некоторой плоскости.

Законность пользования формулой (1.1) спорна, так как второе слагаемое в известной формуле Рейнольдса

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + (-\rho \overline{u'v'}) \quad (1.2)$$

представляющее результат молярного переноса количества движения, содержит в себе вместе с тем и влияние молекулярной вязкости, существенной для переходной области, но не учитываемой формулой Прандтля. Таким образом, в соотношении (1.1) взаимное влияние процессов молекулярного и молярного переноса количеств движения сведено к простой их суперпозиции.

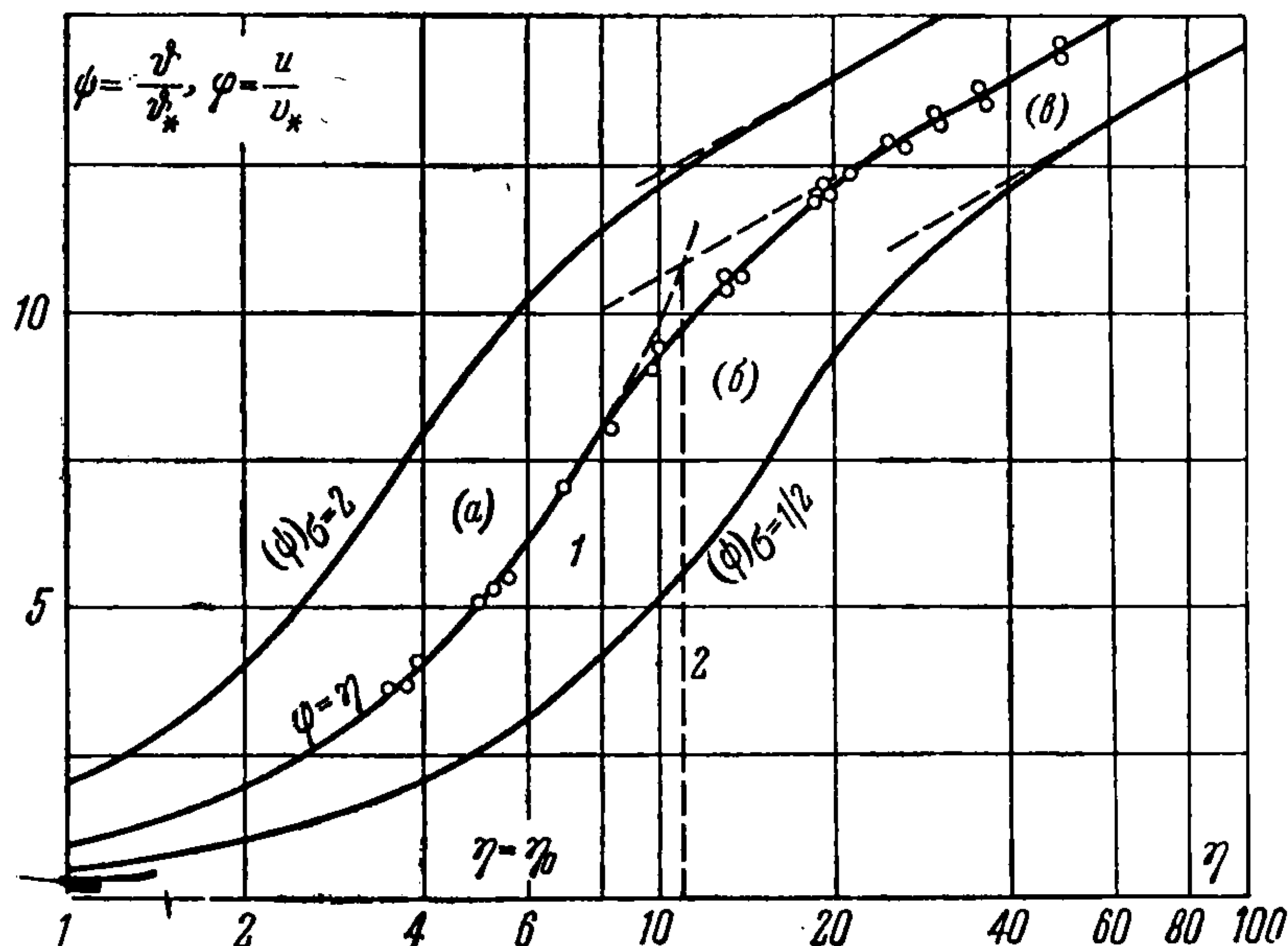
Формула (1.1) легла в основу всех дальнейших исследований в указанном направлении и, в частности, недавно появившихся в зарубежной печати работ В. Шаблевского [3], Е. Ван-Драйста [4] и Д. Майлса [5]. Недостатки формулы (1.1) скрадываются

в этих работах за счет вынужденных исправлений, вводимых авторами в закон изменения «пути смещения» l . Так, например, второй из перечисленных авторов вместо известной простейшей формулы Прандтля $l = \kappa y$ пользуется значительно более сложным, содержащим новую эмпирическую константу A , законом

$$l = \kappa y (1 - e^{y/A})$$

оправдываемым искусственными соображениями об усиленном затухании пульсаций при приближении к твердой поверхности. Другие авторы смещают с той же целью начало роста величины l на некоторое, из опыта определяемое расстояние от стенки.

Настоящее исследование идет по принципиально другому пути. Предлагаемое расширение гипотезы локальности механизма турбулентного перемешивания и аналогии



Фиг. 1

Рейнольдса между переносом количества движения и теплосодержания на всю область турбулентного движения, где имеет место взаимодействие молекулярных и молярных процессов, позволяет установить единую точку зрения на все существующие полуэмпирические теории и получить новые формулы трения и теплопереноса в турбулентном движении. Использование этих формул приводит к установлению непрерывных и имеющих непрерывные первые производные аналитических выражений для профилей скорости и избыточной температуры во всем, поперечном к направлению движения сечении потока, включая ламинарную, промежуточную и чисто турбулентную области.

§ 2. Гипотеза локальности в современных полуэмпирических теориях турбулентности. Отличительной чертой общепринятых в настоящее время полуэмпирических теорий турбулентности является допущение об их дифференциальной сущности, заключающейся в том, что механизм чисто турбулентного (молярного) переноса количества движения полностью определяется заданием местных значений производных от осредненных скоростей по поперечной к направлению потока координате и физических констант жидкости. Величина самой абсолютной осредненной скорости движения жидкости в рассматриваемой точке установившегося потока как скорость поступательного равномерного движения системы координат, которую можно мысленно связать с рассматриваемым движущимся слоем, не может иметь влияния на механизм турбулентного переноса. Кроме того, дополнительно предполагается, что в достаточном удалении от твердой поверхности молярный обмен настолько превалирует над молекулярным, что можно без большой ошибки пренебречь обычной вязкостью и теплопроводностью по сравнению с их турбулентными аналогами.

Совокупность этих допущений составляет содержание той, лежащей в основе всех современных полуэмпирических теорий турбулентности, гипотезы, которой можно было бы дать наименование «гипотезы локальности механизма турбулентного переноса».

Никаких других, в противоположность указанному дифференциальному подходу, «интегральных» взглядов на турбулентный перенос, учитывающих влияние процессов, происходящих вдалеке от рассматриваемой точки турбулентного потока, до сих пор в сколько-нибудь определенной форме не высказано.

Известно [6], что, основываясь на указанной гипотезе локальности и на простых соображениях размерности, можно сразу получить формулы полуэмпирических теорий Прандтля и Кармана. Если принять в «первом приближении»¹, что местное изменение осредненной скорости определяется одной первой производной du/dy , то соображения размерности приводят к необходимости введения дополнительного понятия о некоторой длине $l(y)$ — прандтлевском «пути смещения», без которой составление формулы напряжения трения по гипотезе локальности в этом приближении невозможно. Вводя такого рода длину, можно из простых соображений размерности сразу убедиться в существовании единственно возможной комбинации величин плотности жидкости ρ , «пути смещения» l и производной du/dy , выражающей в этих условиях напряжение трения τ

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (2.1)$$

Количественное выражение зависимости $l(y)$ при этом, конечно, следует задавать из некоторых дополнительных соображений, не вытекающих из гипотезы локальности в «первом приближении».

Используя «второе приближение», т. е. задавая изменение осредненной скорости двумя первыми производными $u'(y)$ и $u''(y)$, из тех же соображений размерности делаем заключение о существовании и единственности формулы напряжения трения Кармана

$$\tau = \rho \kappa^2 \frac{u'^4}{u''^2} \quad (2.2)$$

где κ — некоторая безразмерная константа.

Сравнивая формулы (2.1) и (2.2), относящиеся, подчеркнем это, к различным «приближениям», можно получить известную формулу Кармана

$$l = -\kappa \frac{u'}{u''} \quad (2.3)$$

но нам представляется более правильным считать, что теория «второго приближения» не нуждается во введении чуждой рассматриваемым феноменологическим теориям величины «пути смещения» l .

Применение полуэмпирических теорий к процессам турбулентного переноса тепла основывается на так называемой «аналогии Рейнольдса».

Согласно этой аналогии, основанной на общности носителей количества движения и теплосодержания — конечных объемов жидкости, участвующих в турбулентном перемешивании, можно принять, что коэффициенты турбулентного перемешивания — динамический A и кинематический $\varepsilon = A/\rho$ — имеют одинаковое значение как в процессе переноса количества движения, так и теплосодержания. Такое допущение предполагает отсутствие влияния изменений теплосодержания в потоке на механизм турбулентного перемешивания (гипотеза пассивности переносимой жидкостью субстанции по отношению к турбулентной структуре потока) и, вероятно, справедливо при не слишком больших перепадах температур.

Количественно аналогия Рейнольдса может быть представлена так

$$\tau = \rho \varepsilon \frac{du}{dy}, \quad q = \rho c_p \varepsilon \frac{d\vartheta}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{q}{\tau} = c_p \frac{d\vartheta}{du}. \quad (2.4)$$

Обозначая через λ коэффициент молекулярной теплопроводности, имеем равенства

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad q = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{q}{\tau} = \frac{c_p}{\sigma} \frac{d\vartheta}{du} \quad \left(\sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda} \right) \quad (2.5)$$

Сравнение формул (2.4) и (2.5), выражающих «аналогии Рейнольдса» в турбулентном и ламинарном движениях, показывает, что отношение q/τ будет одинаковым в том и другом случае, если число Прандтля равно единице.

¹ Понятие первого, второго и т. д. приближений в данном случае условно.

§ 3. Гипотеза локальности и аналогия Рейнольдса при наличии взаимодействия между молекулярным и молярным обменом. Расширим теперь область применения гипотезы локальности, отказавшись в формулировке, данной в § 2, от допущения об отсутствии влияния молекулярного переноса на молярный. Иными словами, будем учитывать влияние вязкости жидкости и ее теплопроводности на механизм турбулентного переноса. Согласно гипотезе локальности, это влияние должно выражаться путем введения в законы трения и переноса тепла дополнительных множителей, представляющих функции местных чисел Рейнольдса или Пекле. Под местным числом Рейнольдса R , согласно той же гипотезе локальности, будем понимать безразмерную комбинацию величин, определяющих изменение осредненной скорости и физических констант жидкости: плотности и вязкости, обратно пропорциональную коэффициенту вязкости в первой степени. Легко сообразить, что такого рода комбинацией может служить отношение

$$R = \frac{\varepsilon}{\nu} \quad (3.1)$$

в котором величина ε , имеющая размерность кинематического коэффициента вязкости и представляющая комбинацию величин l и du/dy в «первом приближении» или $u'(y)$ и $u''(y)$ во «втором приближении» и т. д., является по форме зависимости от этих величин не чем иным, как кинематическим коэффициентом турбулентного обмена в случае отсутствия вязкости. Таким образом, в «первом приближении» и во «втором приближении» будем соответственно иметь ¹

$$R = \frac{l^2}{\nu} \frac{du}{dy}, \quad R = \frac{\kappa^2 u'^3}{\nu u''^2} \quad (3.2)$$

Под местным числом Пекле P будем понимать, как обычно, произведение местного числа Рейнольдса на число Прандтля, т. е. полагать

$$P = \sigma R = \frac{\rho c_p \varepsilon}{\lambda} \quad (3.3)$$

Тогда количественным выражением обобщенной гипотезы локальности явятся следующие формулы трения и теплопереноса:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} f(R) = \rho \nu \frac{du}{dy} f\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right) \quad (3.4)$$

$$q = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} f_1(P) = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} f_1(\sigma R) = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} f_1\left(\frac{\rho c_p \varepsilon}{\lambda}\right) \quad (3.5)$$

Относительно функций f и f_1 можно пока сказать лишь следующее: каждая из них равна единице в области ламинарного движения и переноса тепла, что соответствует законам Ньютона и Фурье (2.5), и своему аргументу в области чисто турбулентного обмена. Только в этом случае из формул (3.4) и (3.5) выпадут величины молекулярного происхождения ν и λ и формулы примут вид (2.4).

Отсюда следует, что функции f и f_1 совпадают в областях изменения своих аргументов $0 \leq R \leq R_0$ и $0 \leq \sigma R \leq \sigma R_0$, где R_0 представляет кри-

¹ Использование понятия местного рейнольдсова числа в «первом приближении», по-видимому, впервые появилось в наших работах по применению теории подобия в турбулентном движении [7].

тическое местное число Рейнольдса, соответствующее границе области ламинарного движения, и асимптотически стремятся каждая к своему аргументу при беспредельном возрастании этих аргументов.

Естественно допустить, что в точке $R = R_0$, начиная с которой наряду с молекулярным обменом возникает гораздо более значительный по величине молярный обмен, функция $f(R)$, представляющая отношение трения в переходной области к трению в ламинарной области, должна резко возрасть. Такой характер функции $f(R)$ можно передать отрезком AL ветви равнобокой гиперболы (фиг. 2) с асимптотами $f = \pm R$. Тогда аналитическим выражением функции $f(R)$ во всем интервале изменения R будет служить функция

$$f(R) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq R \leq R_0 \\ \sqrt{R^2 - R_0^2} + 1 & \text{при } R_0 \leq R \end{cases} \quad (3.6)$$

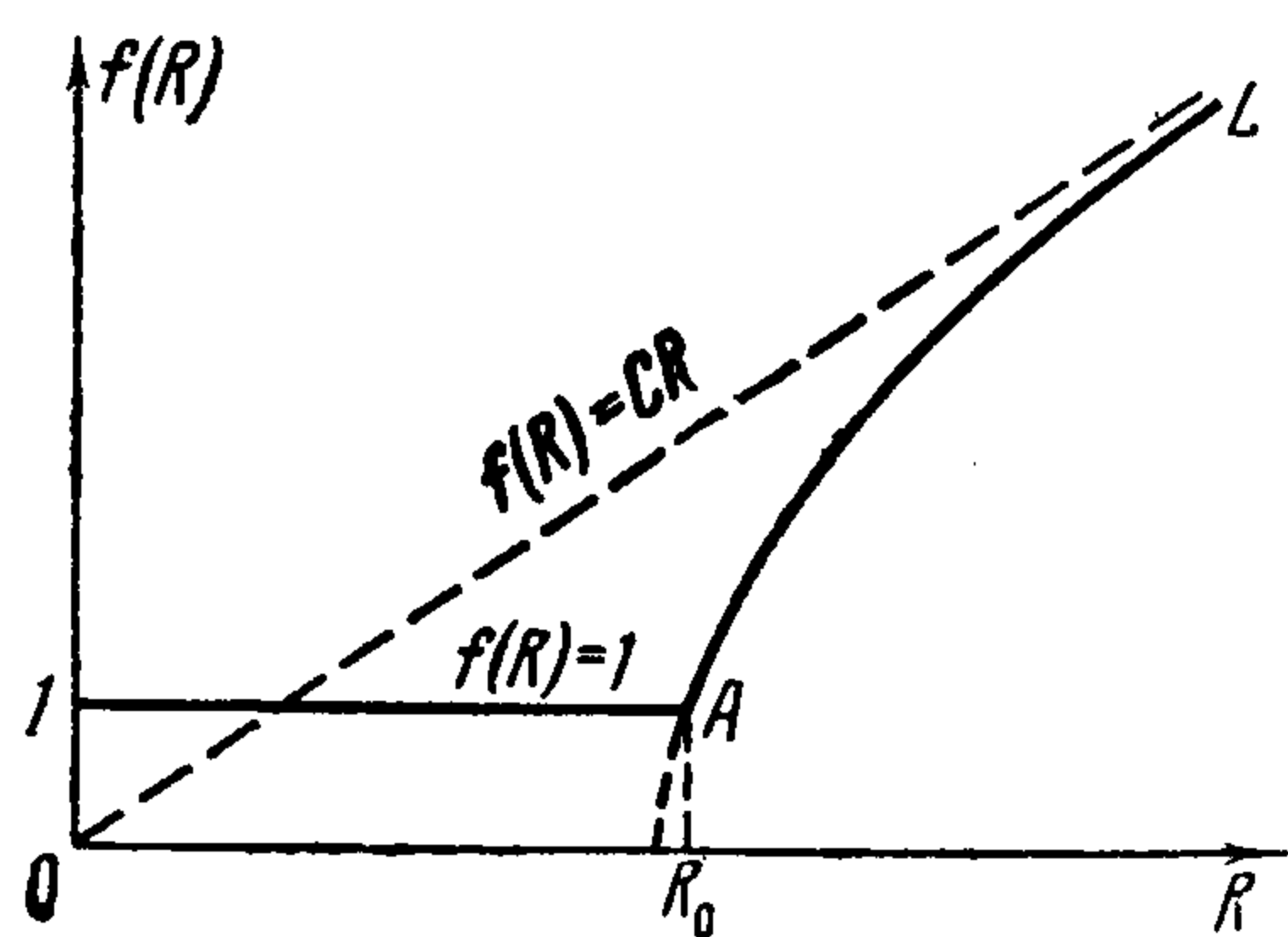
Повторяя в точности те же рассуждения, зададим функцию $f_1(\sigma R)$ аналитическим выражением

$$f_1(\sigma R) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \sigma R \leq \sigma R_0 \\ \sqrt{\sigma^2 R^2 - \sigma^2 R_0^2} + 1 & \text{при } \sigma R_0 \leq \sigma R \end{cases} \quad (3.7)$$

Это показывает, что если при принятой выше трактовке аналогии Рейнольдса в области чисто молярного обмена считать коэффициенты турбулентного перемешивания ϵ (или A) одинаковыми для переноса как количества движения, так и тепла, то функции f и f_1 можно также считать одинаковыми.

Возвращаясь после этого к формулам (3.4) и (3.5), получим следующую расширенную формулировку аналогии Рейнольдса:

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{f(\sigma R)}{f(R)} \frac{d\vartheta}{du} = \frac{c_p}{\sigma} \frac{f(\sigma R)}{f(R)} \frac{d\vartheta}{du} \quad (3.8)$$



Фиг. 2

Непосредственно видно, что в области, где процессы переноса количества движения и тепла имеют чисто молекулярный характер ($f = 1$), будет справедлива формула (2.5) и, наоборот, в области чисто молярного обмена [$f(R) = R$, $f(\sigma R) = \sigma R$] — формула (2.4). Полученная только что закономерность (3.8) показывает, как влияет число Прандтля σ на отношение количества переносимого тепла к величине трения в смешанных областях взаимодействия молекулярных и молярных процессов.

Обращаясь вновь к формулам (3.4) и (3.5) и производя в них замену функций f и f_1 их значениями (3.7) и (3.8), получим следующие окончательные выражения для τ и q :

$$\tau = \begin{cases} \mu \, du/dy & \text{при } 0 \leq R \leq R_0 \\ \mu \, (du/dy) \sqrt{R^2 - R_0^2} + 1 & \text{при } R_0 \leq R \end{cases} \quad (3.9)$$

$$q = \begin{cases} \lambda \, (d\vartheta/dy) & \text{при } 0 \leq \sigma R \leq \sigma R_0 \\ \lambda \, (d\vartheta/dy) \sqrt{\sigma^2 R^2 - \sigma^2 R_0^2} + 1 & \text{при } \sigma R_0 \leq \sigma R \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь $R = \varepsilon/\nu$, а выражение ε через местные производные от осредненных скоростей (и длину l) зависит от выбора приближения.

§ 4. Определение профиля скоростей в установившемся движении по «первому приближению». Остановившись на «первом [приближении]» и рассматривая для простоты случай установившегося турбулентного движения вблизи гладкой плоскости при отсутствии продольного перепада давления, примем, следуя Прандтлю [8]:

$$\tau = \text{const} = \tau_w, \quad l = \kappa y \quad (4.1)$$

где τ_w — напряжение трения на гладкой поверхности, κ — постоянная величина, определяемая из эксперимента. Тогда будем иметь

$$\varepsilon = l^2 \frac{du}{dy} = \kappa^2 y^2 \frac{du}{dy}$$

и на границе ламинарной области $y = y_0$

$$\varepsilon_0 = \kappa^2 y_0^2 \left(\frac{du}{dy} \right)_0 \quad (4.2)$$

а уравнение (3.10) разобьется на два

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{при } 0 \leq y \leq y_0 \quad (4.3)$$

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \left[\frac{\kappa^4 y^4}{\nu^2} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - \frac{\kappa^4 y_0^4}{\nu^2} \left(\frac{du}{dy} \right)_0^2 + 1 \right]^{1/2} \quad \text{при } y_0 \leq y \quad (4.4)$$

Введем универсальные координаты

$$\varphi = \frac{u}{v_*}, \quad \eta = \frac{y v_*}{\nu}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.5)$$

при этом уравнения примут вид:

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = 1 \quad \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (4.6)$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} \left[\kappa^4 \eta^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 - \kappa^4 \eta_0^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_0^2 + 1 \right]^{1/2} = 1 \quad \text{при } \eta_0 \leq \eta \quad (4.7)$$

Из первого следует

$$\varphi = \eta \quad \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (4.8)$$

Замечая, что $(d\varphi/d\eta)_0 = 1$, и разрешая второе уравнение относительно $d\varphi/d\eta$, получим

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \left[\frac{\kappa^4 \eta_0^4 - 1 \pm \sqrt{(\kappa^4 \eta_0^4 - 1)^2 + 4\kappa^4 \eta^4}}{2\kappa^4 \eta^4} \right]^{1/2}$$

или, сохраняя, естественно, только верхний знак и несколько преобразуя правую часть

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \left[\frac{\kappa^4 \eta_0^4 - 1}{2\kappa^2 \eta^2} + \left(\frac{(\kappa^4 \eta_0^4 - 1)^2}{4\kappa^4 \eta^4} + 1 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \frac{1}{\kappa \eta} \quad (4.9)$$

Вводя подстановку

$$t = \left[\frac{\kappa^4 \eta_0^4 - 1}{2\kappa^2 \eta^2} + \left(\frac{(\kappa^4 \eta_0^4 - 1)^2}{4\kappa^4 \eta^4} + 1 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (t_0 \geq t \geq 1) \quad (4.10)$$

$$t = t_0 = \kappa \eta_0 \quad \text{при } \eta = \eta_0, \quad t = 1 \quad \text{при } \eta = \infty$$

придем к квадратуре

$$\varphi = \eta_0 + \frac{1}{\kappa} (t_0 - t) + \frac{2}{\kappa} \int_t^{t_0} \frac{dt}{t^4 - 1} \quad (4.11)$$

в которой уже выполнено граничное условие задачи

$$\varphi = \eta_0 \quad \text{при } \eta = \eta_0 \quad (4.12)$$

Производя в правой части (4.11) интегрирование, найдем следующее распределение скоростей в универсальных координатах:

$$\varphi = \begin{cases} \eta & \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ \eta_0 + \kappa^{-1} [\theta(t_0) - \theta(t)] & \text{при } \eta \leq \eta_0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Здесь

$$\theta(t) = t - \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t-1} - \arctg t \quad (4.14)$$

Полученное распределение скоростей, как это непосредственно видно из формулы, непрерывно в точке $\eta = \eta_0$. Вычисляя правую часть (4.9) при $\eta = \eta_0$, убедимся, что в этой точке $d\varphi/d\eta = 1$, т. е. предлагаемое распределение не только непрерывно в точке $\eta = \eta_0$, но и имеет в этой точке непрерывную первую производную.

Остается определить константы κ и η_0 ; заслуживает внимания тот факт, что в «первом приближении» рассмотрение переходной области не увеличивает число эмпирических констант.

Для определения κ и η_0 составим асимптотическое выражение $\varphi(\eta)$, соответствующее $\eta \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow 1$.

Будем иметь согласно (4.10) и (4.14) следующие асимптотические равенства:

$$t - 1 \sim \frac{\kappa^4 \eta_0^4 - 1}{4\kappa^2 \eta^2}, \quad \theta(t) \sim 1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \ln(t - 1) \quad (4.15)$$

после чего уже нетрудно найти асимптотическое выражение функции $\varphi(\eta)$

$$\varphi(\eta) \sim \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C(\eta_0, \kappa) \quad (4.16)$$

Здесь положено

$$C(\eta_0, \kappa) = \eta_0 + \frac{1}{\kappa} (t_0 - 1) - \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{t_0 + 1}{t_0 - 1} - \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\kappa^2 \eta_0^4}{8} \right) - \\ - \frac{1}{\kappa} \arctg t_0 + \frac{\pi}{4\kappa} \quad (4.17)$$

Асимптотическое равенство (4.16) представляет не что иное, как известный логарифмический закон скоростей. Задаваясь этим законом в форме

$$\varphi = 5.6 \log \eta + 4.9 \quad (4.18)$$

по-видимому, более точной [1], чем формула Никурадзе, и сравнивая (4.16) с (4.18), получим, округляя значение η_0

$$\kappa = 0.41, \quad \eta_0 = 7 \quad (4.19)$$

Само собой разумеется, что можно было определить эти константы и сообразуясь с логарифмической формулой Никурадзе

$$\varphi = 5.75 \log \eta + 5.5$$

Определив константы, получим следующее аналитическое выражение

для профиля скорости во всей области:

$$\varphi = \begin{cases} \eta & \text{при } 0 \leq \eta \leq 7 \\ 10.14 - 2.44 \left(t - \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t-1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \right) \\ t = \left\{ \frac{202}{\eta^2} + \left[\left(\frac{202}{\eta^2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} & \text{при } \eta \geq 7 \end{cases} \quad (4.20)$$

Сравнение результатов расчета по формуле (3.17) с экспериментальными данными [1] приводит (фиг. 1)¹ к вполне удовлетворительному совпадению.

Несколько сложнее с вычислительной стороны строится профиль скоростей, если учесть известное линейное изменение напряжения трения поперек потока в трубе, использовать более сложный закон изменения величины l и принять во внимание влияние параметра, содержащего величину продольного градиента давления. Наличие хорошего совпадения опытных данных с простейшим профилем скоростей (4.20), не учитывающим эти влияния, объясняется сравнительной малостью (около 20% радиуса трубы) области, где происходит развитие профиля скоростей — от линейного до логарифмического, и последующим слабым отклонением профиля от логарифмического.

Остановимся теперь на тех случаях, когда распределение трения поперек потока заранее не известно (пограничный слой, струя, след и др.) и приходится использовать общие уравнения осредненного турбулентного движения в форме Рейнольдса, содержащие производную $\partial\tau/\partial y$ напряжения трения по нормальной к потоку координате. Пользование в этих случаях формулами (3.9) и (3.10) нельзя признать обоснованным, во-первых, потому, что дифференцирование приближенных формул может привести к значительным ошибкам, и, во-вторых, потому, что возникновение высших производных скорости в выражениях, где, согласно принятому номеру приближения, производные соответствующего порядка были заранее откинута, вряд ли допустимо. Правильнее в таких случаях непосредственно применять гипотезу локальности к производной $\partial\tau/\partial y$, полагая

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} f(R) \quad (4.21)$$

где функция f и локальное число R имеют те же значения, что и раньше. Так, в случае «первого приближения» будем иметь

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} f \frac{(l^2 \partial u / \partial y)}{\nu} \quad (4.22)$$

Легко видеть, что асимптотическим выражением этой формулы отвечающим предположению об отсутствии влияния молекулярной вязкости, будет служить известная формула Тейлора

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.23)$$

¹ Опытные точки на фиг. 1 обезличены; они представляют на самом деле результаты измерений различных авторов (Лауфер, Шульд-Грюнов и др.). Расположение точек взято нами с фиг. 4 обзора Клаузера [1].

которая, как известно, дает иногда совпадающие с теорией Прандтля результаты, а иногда и отличающиеся от них.

Согласно излагаемым в настоящей статье соображениям формула Тейлора (4.23) и ее обобщения, заключающиеся в общей формуле (4.21), должны занять самостоятельное место в полуэмпирических теориях турбулентности. Этот вопрос составляет предмет специального исследования.

§ 5. Определение установившегося температурного профиля по «первому приближению». Как это следует из уравнений осредненного движения и осредненного переноса тепла, в случае отсутствия зависимости скорости и температуры от продольной координаты можно считать

$$\tau = \tau_w, \quad q = q_w \quad (5.1)$$

где q_w — секундное количество тепла, проходящее сквозь единичную площадку на поверхности обтекаемого жидкостью тела.

Наряду с ранее рассмотренными универсальными масштабами скоростей v_* и длин $l_* = \nu/v_*$ введем еще универсальный масштаб температур ϑ_* и, кроме того, безразмерную величину ψ

$$\psi = \frac{\vartheta}{\vartheta_*} \quad \left(\vartheta_* = \frac{q_w}{\rho c_p v_*} \right) \quad (5.2)$$

Полагая, как и ранее,

$$l = \kappa y, \quad R = \frac{l^2}{\nu} \frac{du}{dy} = \frac{\kappa^2 y^2}{\nu} \frac{du}{dy} = \kappa^2 \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (5.3)$$

можем переписать основные равенства (3.9) и (3.10) в форме

$$1 = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\eta} & \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ \frac{d\varphi}{d\eta} \left[\kappa^4 \eta^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 - \kappa^4 \eta_0^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_0^2 + 1 \right]^{1/2} & \text{при } \eta_0 \leq \eta \end{cases} \quad (5.4)$$

$$1 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\eta} & \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\eta} \left[\sigma^2 \kappa^4 \eta^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 - \sigma^2 \kappa^4 \eta_0^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_0^2 + 1 \right]^{1/2} & \text{при } \eta_0 \leq \eta \end{cases} \quad (5.5)$$

Легко заметить, что если в системе равенств (5.5) ввести новую независимую переменную $\zeta = \sigma\eta$, то они примут вид:

$$1 = \frac{d\psi}{d\zeta} \quad \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_0 \quad (5.6)$$

$$1 = \frac{d\psi}{d\zeta} \left[\kappa^4 \zeta^4 \left(\frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 - \kappa^4 \zeta_0^4 \left(\frac{d\varphi}{d\zeta} \right)_0^2 + 1 \right]^{1/2} \quad \text{при } \zeta_0 \leq \zeta$$

Сравнивая между собой системы (5.6) и (5.4), а также граничные условия

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } \zeta = 0 \quad (5.7)$$

в ламинарной области потока и условия срачивания решений на границе этой области

$$\varphi = \eta_0 \quad \text{при } \eta = \eta_0, \quad \psi = \zeta_0 \quad \text{при } \zeta = \zeta_0 \quad (5.8)$$

заклучим, что во всей области течения будет выполняться равенство

$$\psi = \frac{\vartheta}{\vartheta_*} = \varphi(\sigma\eta) \quad (5.9)$$

Таким образом, универсальное распределение безразмерной температуры может быть при заданном значении числа Прандтля легко построено по известному распределению скоростей (4.20). Схема построения основывается на представленном соотношении (5.10) свойстве значения ординаты, представляющей отношение температур $\psi = \vartheta / \vartheta_*$ в точке с абсциссой η , значению ординаты, представляющей безразмерную скорость $\varphi = u / v_*$ в точке с абсциссой $\sigma\eta$.

Таким образом (фиг. 1), при $\sigma > 1$ кривая распределения безразмерной температуры ϑ / ϑ_* ляжет выше и сдвинется влево от кривой безразмерных скоростей u / v_* , а при $\sigma < 1$, наоборот, ниже и вправо от той же кривой. При $\sigma = 1$ кривые совпадут. На фиг. 1 для примера показано расположение температурных кривых для значений $\sigma = 1/2, 1, 2$. Аналогичные по типу кривые, но с изломами на границах переходной области, получаются и по известной теории Кармана [9].

§ 6. Замечание о профиле скоростей по «второму приближению». Как уже было указано в § 3, гипотеза локальности во «втором приближении» выражается формулой

$$\tau = \mu u' f(R) \quad \left(R = \frac{\kappa^2 u'^3}{\nu u''^2} \right) \quad (6.1)$$

Здесь R — локальное число Рейнольдса.

В ламинарной области функция f остается той же, что и в случае «первого приближения», т. е. равной единице, а в турбулентной стремится с возрастанием местного числа Рейнольдса к линейной его функции:

$$f \left(\frac{\kappa^2 u'^3}{\nu u''^2} \right) \rightarrow \kappa^2 \frac{u'^3}{\nu u''^2} \quad (6.2)$$

Здесь κ^2 — неизвестный коэффициент пропорциональности, который должен быть определен из опыта. Подставляя это значение функции в основное соотношение (6.1), получим формулу Кармана (2.2), которая, как и ранее формула Прандтля (2.1), может рассматриваться как асимптотическое выражение общей формулы трения

$$\tau = \begin{cases} \mu u' & \text{при } 0 \leq R \leq R_0 \\ \mu u' \sqrt{R^2 - R_0^2 + 1} & \text{при больших } R \end{cases} \quad \text{при } R_0 \leq R \quad (6.3)$$

Вопрос о сращивании решения в ламинарной области с остальной частью потока представляет в этом случае некоторое затруднение. Локальное определение (6.1) числа Рейнольдса R предполагает заранее, что $u'' \neq 0$; между тем в ламинарной области это условие не выполняется. Можно поступить одним из следующих двух путей: либо отказаться от непрерывности изменения числа Рейнольдса и ввести для турбулентной области свое начальное число Рейнольдса (здесь и в дальнейшем штрихи при φ обозначают производные по универсальной координате η , причем $\varphi_0' = 1$)

$$R_0 = \frac{\kappa^2 u_0'^3}{\nu u_0''^2} = \frac{\kappa^2 \varphi_0'^3}{\varphi_0''^2} = \frac{\kappa^2}{\varphi_0''^2}, \quad \varphi_0'' = \varphi''(\eta_0 + 0) \quad (6.4)$$

где φ_0'' является новой опытной константой, либо, используя для ламинарной области число Рейнольдса «первого приближения», определить φ_0'' из условия сращивания локального числа Рейнольдса на границе

ламинарной области

$$\frac{l_0^2 u_0'}{\nu} = \frac{\kappa^2 y_0^2 u_0'}{\nu} = \kappa^2 \frac{u_0'^3}{\nu u_0''^2} \quad (6.5)$$

так что ($\varphi_0' = 1$)

$$\frac{1}{|\varphi_0''|} = \eta_0 \quad (6.6)$$

Вторая производная $\varphi''(\eta)$ при этом, конечно, будет в точке $\eta = \eta_0$ претерпевать разрыв, но функция $\varphi(\eta)$ и ее первая производная сохраняет непрерывность во всей области течения. Если согласиться использовать приближенное равенство (6.6), то можно в дальнейшем решении не прибегать к увеличению числа опытных постоянных, сохраняя в качестве неизвестных те же две константы κ и η_0 , что и в первом приближении.

В рассматриваемом в настоящей статье случае установившегося движения ($\tau = \tau_w$) будем иметь согласно второму из равенств (6.3) в универсальных переменных

$$1 = \varphi' \left(\frac{\kappa^4 \varphi'^6}{\varphi''^4} - \frac{\kappa^4}{\varphi_0''^4} + 1 \right)^{1/2} \quad (6.7)$$

Отсюда, разрешая относительно φ'' , получим

$$\varphi'' = - \frac{\kappa \varphi'^2}{[1 + (\kappa^4 / \varphi_0''^4 - 1) \varphi'^2]^{1/4}} \quad (6.8)$$

где φ_0'' определяется согласно (6.6), а знак минус впереди дроби в правой части соответствует условию убывания наклона касательной к профилю скоростей при удалении от поверхности обтекаемого тела. Постоянная разность, стоящая в круглой скобке под радикалом в знаменателе, согласно (6.6) равна

$$\frac{\kappa^4}{\varphi_0''^4} - 1 = \kappa^4 \eta_0^4 - 1 \quad (6.9)$$

и может рассматриваться как положительная величина.

Полагая в уравнении (6.8)

$$\varphi' = \sqrt{\frac{t^4 - 1}{t_0^4 - 1}} \quad \left(\begin{array}{l} \varphi' = 1 \quad \text{при } \eta = \eta_0, t = t_0 = \kappa / \varphi_0'' > 1 \\ \varphi' = 0 \quad \text{при } \eta = \infty, t = 1 \end{array} \right) \quad (6.10)$$

получим дифференциальное уравнение

$$d\eta = - \frac{2}{\kappa} \sqrt{t_0^4 - 1} \frac{t^4 dt}{(t^4 - 1)^{3/2}} \quad (6.11)$$

интегралом которого, удовлетворяющим граничному условию

$$t = t_0 \quad \text{при } \eta = \eta_0$$

будет служить

$$\eta - \eta_0 = + \frac{2}{\kappa} \sqrt{t_0^4 - 1} \int_t^{t_0} \frac{t^4 dt}{(t^4 - 1)^{3/2}} \quad (6.12)$$

Вычисление интеграла справа дает

$$\eta - \eta_0 = \frac{1}{\kappa} \sqrt{t_0^4 - 1} \left(\frac{t}{\sqrt{t^4 - 1}} - \frac{t_0}{\sqrt{t_0^4 - 1}} + \int_t^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 1}} \right) \quad (6.13)$$

Сохранившийся в правой части интеграл не может быть выражен

в элементарных функциях; его можно преобразовать к виду

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}} = \int_1^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}} - \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F\left(\operatorname{arc sec} t_0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\operatorname{arc sec} t; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (6.14)$$

если принять обычное обозначение для эллиптического интеграла первого рода

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (6.15)$$

Таким образом, имеем

$$\eta = \eta_0 + \frac{1}{\alpha} \sqrt{t_0^4-1} \left[\frac{t}{\sqrt{t^4-1}} - \frac{t_0}{\sqrt{t_0^4-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\operatorname{arc sec} t_0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\operatorname{arc sec} t; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (6.16)$$

С другой стороны, из (6.10) и (6.11) имеем

$$d\varphi = \sqrt{\frac{t^4-1}{t_0^4-1}} d\eta = -\frac{2}{\alpha} \frac{t^4 dt}{t^4-1}$$

так что, интегрируя и принимая во внимание граничное условие

$$\varphi = \eta_0, \quad t = t_0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_0$$

получим

$$\varphi = \eta_0 + \frac{1}{2\alpha} (t - t_0) + \frac{1}{\alpha} [\theta(t_0) - \theta(t)] \quad (6.17)$$

где сохранено обозначение (4.14).

Совокупность равенств (6.16) и (6.17) дает искомый профиль скоростей во «втором приближении». Составляя выражения правых частей этих равенств вблизи $t=1$ и исключая t , получим асимптотическую логарифмическую формулу скоростей при больших η . В настоящей статье мы удвольтвуемся лишь приведенными общими соображениями.

Поступила 11 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Clauser F. The turbulent boundary layer. Advances in applied mechanics, ed. by H. Dryden and Th. v. Karman, N. Y., vol. IV, p. 7, 1956.
2. Wada K. Journ. of Japan. Soc. Nav. Arch., vol. 41, p. 103.
3. Szablewski W. Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg. Ing. Arch., Bd., 23, H. 4, S. 295—306, 1955.
4. Van Driest E. On turbulent flow near a wall. Journ. Aero. Sci., vol. 23, No. 11, pp. 1007—1011, 1956.
5. Miles W. On the velocity profile for turbulent flow near a smooth wall. Journ. Aero. Sci., vol. 24, No 9, p. 704, 1957.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1957, стр. 158—160.
7. Лойцянский Л. Г. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача. Изв. Научно-иссл. ин-та гидротехники, т. IX, 1933; Лойцянский Л. Г. О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности, ПММ, т. II, вып. 2, 1935.
8. Prandtl L. Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung, VDJ 77, Nr-5, 1933.
9. Эккерт Э. Р. Введение в теорию тепла и массообмена. Госэнергоиздат, 1957, стр. 126.