

О НЕЛИНЕЙНОМ ОТРАЖЕНИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

О. С. Рыжов, С. А. Христианович

(Москва)

Рассматриваются физические условия, которые позволяют значительно упростить уравнения газовой динамики, описывающие нестационарные течения с небольшими, но резкими изменениями параметров среды. Математические упрощения опираются на тот факт, что изменения давления в потоке происходят в небольшой области, примыкающей к фронту ударной волны. Такие течения названы «короткими волнами». Получены точные частные решения выведенных нелинейных дифференциальных уравнений. Эти решения применяются затем для приближенного решения задачи о нелинейном отражении ударной волны от абсолютно жесткой стенки. Выбором постоянных, содержащихся в частных решениях, можно добиться удовлетворения граничных условий на фронте одной или нескольких ударных волн с достаточной точностью. Граничные условия на стенке удовлетворяются автоматически.

При изучении распространения волн с небольшим относительным избыточным давлением p/P_0 (здесь P_0 — начальное давление в невозмущенной среде, p — изменение давления) обычно пользуются уравнениями акустики. При этом скорость распространения возмущений считается постоянной и равной скорости распространения звука в невозмущенной среде.

Однако, как показывают наблюдения, ряд явлений, несмотря на малые относительные избыточные давления в волнах, целиком определяется зависимостью скорости распространения возмущений от величины избыточного давления. Так, законы затухания ударных волн на далеких расстояниях от места взрыва в основном определяются этой зависимостью^[1, 2]. Эта же зависимость вносит значительные изменения в картину отражения ударной волны в воде от свободной поверхности при взрыве заряда вблизи поверхности^[3]. К этим же явлениям относится и отражение ударной волны от жесткой стенки при малых углах между фронтом ударной волны и перпендикуляром к стенке.

Исследование этих явлений не может опираться на линейные уравнения акустики. Дело в том, что, несмотря на малость относительного избыточного давления, изменение давления в указанных случаях происходит в малой области. Градиенты давления поэтому велики, и изменения скорости распространения возмущений в зависимости от давления являются существенными. Такие волны с большими градиентами давления вблизи ударного фронта можно назвать «короткими волнами».

§ 1. Короткие волны. 1. Для слабых ударных волн можно с большой точностью считать процесс сжатия адиабатическим и для воды принять закон сжатия в виде

$$p = P_0 [(\rho / \rho_0)^n - 1] \quad (1.1)$$

где ρ_0 — начальная плотность воды, ρ — плотность, p — давление, P_0 и n — постоянные. При температуре порядка $+15^\circ\text{C}$ $P_0 \approx 3000 \text{ кг/см}^2$ и $n \approx 7$.

Зависимость (1.1) справедлива и для воздуха, если P_0 означает начальное давление воздуха, p — избыточное давление и $n = 1.4$.

2. Уравнения динамики в сферических координатах при симметрии вокруг оси $\vartheta = 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v^2}{r} + \frac{2}{n-1} a \frac{\partial a}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{uv}{r} + \frac{2}{n-1} \frac{a}{r} \frac{\partial a}{\partial \vartheta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где t — время, r — расстояние, u и v — проекции вектора скорости \mathbf{q} на направление радиуса-вектора и перпендикуляр к нему, a — скорость звука. Для скорости звука имеем

$$a = a_0 (\rho / \rho_0)^{1/2 (n-1)}, \quad a_0 = \left(\frac{n P_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

Здесь a_0 — скорость звука в невозмущенной среде. Уравнение неразрывности в этих переменных будет иметь вид:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial a}{\partial \vartheta} + \frac{n-1}{2} \frac{a}{r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + 2u + v \operatorname{ctg} \vartheta \right) = 0 \quad (1.4)$$

3. Положим

$$u = a_0 M, \quad v = a_0 V \quad (1.5)$$

Для слабых ударных волн M и V — малые величины. При исследовании коротких волн удобно ввести следующие переменные:

$$\begin{aligned} r = a_0 t (1 + \Delta), \quad a = a_0 \left(1 + \frac{n-1}{2} M_0 \alpha \right), \quad \tau = \ln t \\ M = M_0 \mu, \quad V = V_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} \nu, \quad \vartheta = \theta_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} Y, \quad \Delta = \frac{n+1}{2} M_0 \delta \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь M_0, V_0 и θ_0 — характерные значения M, V и ϑ , причем M_0 и V_0 — малые величины по сравнению с единицей, а μ, ν, α и δ — величины порядка единицы. Таким образом, длина волны в радиальном направлении предполагается малой величиной порядка M_0 .

В новых переменных уравнения (1.3) и (1.4), отбрасывая в коэффициентах малые по сравнению с единицей величины, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{n+1}{2} \left(M_0 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \frac{M_0 V_0}{\theta_0} \nu \frac{\partial \mu}{\partial Y} - \frac{n+1}{2} V_0^2 \nu^2 \right) &= 0 \\ \frac{M_0^2}{V_0 \theta_0} \frac{\partial \alpha}{\partial Y} - \frac{\partial \nu}{\partial \delta} + \frac{n+1}{2} \left(M_0 \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{V_0 M_0}{\theta_0} \nu \frac{\partial \nu}{\partial Y} + M_0^2 \mu \nu \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{2}{n+1} \left(\mu + \frac{n+1}{2} \alpha - \frac{n+1}{2} \delta \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \delta} \right) + \frac{V_0}{M_0 \theta_0} \frac{\partial \nu}{\partial Y} + \\ + 2\mu + \frac{V_0}{\theta_0} \nu \left(\frac{\partial \mu}{\partial Y} + \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \right) - \frac{n+1}{2} \frac{V_0^2}{M_0} \nu^2 + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{V_0}{M_0} \nu \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} \theta_0 Y \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

В последнем уравнении (1.7) разность $\partial \mu / \partial \delta - \partial \alpha / \partial \delta$ заменена ее выражением из первого уравнения этой системы. Из этого уравнения следует, что производные $\partial \mu / \partial \tau$ и $\partial \alpha / \partial \tau$ имеют порядок не больше единицы. Кроме того,

$$\frac{V_0}{M_0 \theta_0} \ll 1 \quad (1.8)$$

Из второго уравнения (1.7) следует тогда, что

$$\frac{M_0^2}{V_0\theta_0} \sim 1 \quad (1.9)$$

Если $\theta_0 \sim 1$, то из соотношения (1.9) видно, что $V_0 \sim M_0^2$. Если же θ_0 — малая величина, то, сопоставляя формулы (1.8) и (1.9), получим

$$\theta_0 \sim \sqrt{M_0}, \quad V_0 \sim M_0 \sqrt{M_0} \quad (1.10)$$

Во всех случаях первое уравнение системы (1.7) после отбрасывания малых слагаемых, принимает вид:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \delta} = \frac{\partial \mu}{\partial \delta}$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание, что в дальнейшем будут рассматриваться только ударные волны, перед фронтом которых избыточное давление и скорость частиц равны нулю, получим $\alpha = \mu$.

Из уравнений (1.1) и (1.3) следует, что $\alpha = p/nP_0 M_0$ и, следовательно,

$$M = p/nP_0 \quad (1.11)$$

Если при исследовании распространения слабых коротких волн в воде ограничиться давлениями, не превышающими 200—300 атм, то этим давлениям отвечают числа M , меньшие 0.01—0.05. Для слабых коротких волн в воздухе следует ограничиться избыточными давлениями до 0.15—0.20 атм при $P_0 = 1$ атм. Тогда максимальные значения чисел M будут 0.10—0.15!

Положим теперь $M_0^2 = V_0\theta_0$. Так как величина $V_0 M_0 / \theta_0$ всегда мала, то второе уравнение (1.7) после отбрасывания малых слагаемых будет иметь вид:

$$\frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial Y} = 0 \quad (1.12)$$

Полученное соотношение выражает условие отсутствия вихрей.

Если $\theta_0 \sim 1$, то $V_0 \sim M_0^2$ и последнее уравнение (1.7) примет вид:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \mu = 0 \quad (1.13)$$

Система уравнений (1.11) и (1.13) совпадает с системой уравнений коротких волн в случае центральной симметрии [2]. Таким образом, при изменении угла ϑ в конечном интервале, т. е. при малости производных в направлении, перпендикулярном радиальному, движение волны вдоль каждого луча не зависит от движения по соседним лучам. Общий интеграл системы (1.12) и (1.13) легко определяется.

4. Пусть θ_0 — малая величина, т. е. волна, «короткая» не только в направлении радиуса, но и в направлении, перпендикулярном к нему. Тогда в соответствии с (1.10) положим $\theta_0 = \sqrt{M_0}$ и $V_0 = M_0 \sqrt{M_0}$.

Если изменения параметров потока происходят вблизи оси $\vartheta = 0$, то третье уравнение (1.7) примет вид:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \mu + \frac{v}{2Y} = 0 \quad (1.14)$$

Если же область резких изменений параметров течения лежит вблизи конечного угла $\vartheta = \vartheta_*$, то последнее уравнение упрощается:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \mu = 0 \quad (1.15)$$

Аналогичным образом можно получить систему уравнений коротких волн и в случае плоских течений. Для плоских волн в цилиндрической системе координат имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \mu &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial Y} &= 0, \quad M = \frac{p}{n P_0} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Если длина волны имеет порядок величины меньший, чем M_0 , и производные от μ и v по δ и Y велики, то уравнения (1.15) и (1.16) еще упрощаются; в случае «очень коротких волн» имеем

$$(\mu - \delta_0) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial Y} = 0 \quad (1.17)$$

где δ_0 — постоянная. Система уравнений (1.17) аналогична уравнениям, которые описывают околосвуковые газовые течения [4].

Если течение автомодельно, т. е. не зависит от τ , то для сферических волн имеем

$$(\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \mu = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial Y} = 0 \quad (1.18)$$

Соответственно для плоских волн получим

$$(\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \mu = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial Y} = 0 \quad (1.19)$$

Системы уравнений (1.18) и (1.19) будут гиперболического типа при $\delta > \mu$ и эллиптического в противном случае. Уравнение «звуковой линии» будет, следовательно, $\delta = \mu$.

§ 2. Некоторые частные решения автомодельных уравнений. 1. Построим частные решения систем уравнений (1.18) и (1.19), для которых $v = 0$ при $Y = 0$. Преобразуем предварительно эти уравнения, принимая за независимые переменные μ и Y , а за искомые функции δ и v . Система уравнений (1.18) примет тогда вид:

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} + \frac{\partial \delta}{\partial Y} = 0, \quad \mu \frac{\partial \delta}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial \delta}{\partial \mu} + \left(\frac{\partial v}{\partial \mu} \right)^2 \right] + \mu - \delta = 0 \quad (2.1)$$

Преобразованные уравнения (1.19) аналогичны уравнениям (2.1). Будем искать частные решения системы (2.1) в виде

$$v = \varphi(\mu) Y, \quad \delta = -\frac{1}{2} \varphi'(\mu) Y^2 + F(\mu) \quad (2.2)$$

Для определения функций φ и F имеем систему уравнений

$$\varphi' - \frac{1}{2} \varphi \varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'' \mu = 0, \quad \left(\mu + \frac{1}{2} \varphi \right) F' - F + \mu = 0 \quad (2.3)$$

Для плоских волн аналогичная система имеет вид:

$$\varphi' - \frac{1}{2} \varphi \varphi'' + \varphi'^2 - \frac{1}{2} \mu \varphi'' = 0, \quad \frac{1}{2} (\mu + \varphi) F' - F + \mu = 0 \quad (2.4)$$

Общее решение системы (2.3) будет

$$\varphi = \frac{A^2 - B^2 - \mu^2}{A + \mu}$$

$$F = \mu - \frac{1}{2B} [(\mu + A)^2 - B^2] \ln \frac{\mu + A - B}{\mu + A + B} + C [(\mu + A)^2 - B^2] \quad (2.5)$$

где A , B и C — произвольные постоянные.

Решение системы уравнений (2.4) для плоских волн можно представить в виде

$$\varphi = \frac{1}{C'} \operatorname{tg}(C'\mu + A') - \mu, \quad F = B \sin^2(A' + C'\mu) + \frac{1}{2C'} \sin 2(C'\mu + A') + \mu \quad (2.6)$$

Здесь A' , B и C' — произвольные постоянные. Полагая

$$C' = ic, \quad A' = -iac + \frac{1}{2}\pi, \quad B = -(1+k)/c$$

представим равенства (2.6) в виде

$$\varphi = -\frac{1}{c} \operatorname{cth} c(a - \mu) - \mu, \quad F = \mu - \frac{1 + e^{-2c(a-\mu)}}{2c} - \frac{k}{2c} [1 + \operatorname{ch} 2c(a - \mu)] \quad (2.7)$$

Полагая $C' = ic$, $A' = -iac$ и $B = (1+k)/c$, запишем равенства (2.6) в виде

$$\varphi = -\frac{1}{c} \operatorname{th} c(a - \mu) - \mu, \quad F = \mu + \frac{1 - e^{2c(a-\mu)}}{2c} - \frac{k}{2c} [\operatorname{ch} 2c(a - \mu) - 1] \quad (2.8)$$

2. Принимая за независимые переменные μ и ν , а за неизвестные функции δ и Y , из системы уравнений (1.17) получим

$$(\mu - \delta_0) \frac{\partial Y}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \mu} - \frac{\partial \delta}{\partial \nu} = 0 \quad (2.9)$$

Эта система имеет частное решение, аналогичное полученному выше для уравнений (1.19):

$$\delta - \delta_0 = c^2 \left[\frac{1}{2} \nu^2 + (\delta_0 - a)(a - \mu)^2 + \frac{2}{3} (a - \mu)^3 \right], \quad Y = -c^2 (a - \mu) \nu \quad (2.10)$$

Другое частное решение, не имеющее особенности на линии $\mu = \delta_0$, дается формулами [4]

$$\mu - \delta_0 = \frac{1}{2\varepsilon} (\delta - \delta_0) - \frac{1}{4\varepsilon^2} Y^2, \quad \nu = -\frac{1}{2\varepsilon^2} (\delta - \delta_0) Y + \frac{1}{12\varepsilon^3} Y^3 \quad (2.11)$$

где a , c , ε — постоянные.

§ 3. Граничные условия на фронте ударной волны. 1. Пусть ударная волна имеет на фронте избыточное давление p и распространяется в среде с начальным избыточным давлением p_1 и скоростью частиц q_1 , направленной перпендикулярно фронту. Тогда скорость распространения фронта ударной волны N и скорость частиц за фронтом q будут [3]

$$N = a_0 \left(1 + \frac{n+1}{4} \frac{p}{P_0 n} + \frac{n-3}{4} \frac{p_1}{P_0 n} \right) + q_1, \quad q = a_0 \frac{p - p_1}{P_0 n} + q_1$$

Если нормаль к фронту ударной волны, а, следовательно, и вектор скорости частиц составляют малый угол с направлением радиуса-вектора,

то проекцию скорости частиц на оба эти направления можно считать равной q . Поэтому, если $q_1 = a_0 p_1 / P_0 n$, имеем отсюда, используя обозначения (1.5):

$$M = \frac{P}{P_0 n}, \quad N = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} (M + M_1) \right] \quad (3.1)$$

2. Пусть равенства

$$\delta = \delta(\mu, Y, \tau), \quad v = v(\mu, Y, \tau) \quad (3.2)$$

дают решение уравнений коротких волн. На фронте ударной волны и в потоке в рассматриваемом приближении проекция скорости частиц на направление радиуса-вектора (или число M) связана с давлением одним и тем же соотношением (1.11) или (3.1). Поэтому, зная решение (3.2), легко составить дифференциальное уравнение, которое определяет положение фронта ударной волны, ограничивающей зону возмущенного движения.

Обозначим через ψ угол между нормалью к ударному фронту и направлением радиуса-вектора. Имеем

$$\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{d\Delta}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{M_0 d\delta}{\theta_0 dY} \quad (3.3)$$

Для проекций вектора скорости за фронтом верны равенства

$$u = q \cos \psi \approx q, \quad v = q \sin \psi \approx u\psi \quad (3.4)$$

Скорость распространения фронта в направлении радиуса-вектора равна

$$\frac{N}{\cos \psi} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} (M + M_1) + \frac{\psi^2}{2} \right] \quad (3.5)$$

С другой стороны, эту скорость можно определить при помощи уравнений (3.2):

$$\frac{dr}{dt} = a_0 \left(1 + \Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial M} \frac{dM}{d\tau} + \frac{\partial \Delta}{\partial \tau} \right) \quad (3.6)$$

Таким образом, уравнение фронта ударной волны будет

$$\Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial M} \frac{dM}{d\tau} + \frac{\partial \Delta}{\partial \tau} = \frac{n+1}{4} (M + M_1) + \frac{\psi^2}{2} \quad (3.7)$$

Если решение (3.2) не зависит от τ , то из формулы (3.7) следует

$$\Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial M} \frac{dM}{d\tau} = \frac{n+1}{4} (M + M_1) + \frac{\psi^2}{2} \quad (3.8)$$

Если и давление на фронте волны не зависит от времени, то дифференциальное уравнение ударного фронта еще более упрощается и принимает вид:

$$\Delta = \frac{1}{4} (n+1) (M + M_1) + \frac{1}{2} \psi^2 \quad (3.9)$$

Когда θ_0 является малой величиной, положим в соответствии с (1.10)

$$\theta_0 = \sqrt{M_0}, \quad V_0 = M_0 \sqrt{M_0}$$

Уравнение (3.9), принимая во внимание (3.3), можно представить тогда в виде

$$\delta = \frac{1}{2} (\mu + \mu_1) + \frac{1}{2} (d\delta / dY)^2 \quad (3.10)$$

Переходя к декартовым координатам, имеем

$$x = a_0 t \left[1 + \frac{1}{2} (n+1) M_0 X \right] = r \cos \vartheta \approx a_0 t \left(1 + \Delta - \frac{1}{2} \vartheta^2 \right) \quad (3.11)$$

$$y = a_0 t \sqrt{\frac{n+1}{2}} M_0 Y = r \sin \vartheta \approx a_0 t \vartheta$$

Следовательно,

$$\delta = X + \frac{1}{2} Y^2 \quad (3.12)$$

Дифференциальное уравнение фронта ударной волны в декартовых координатах дается равенством

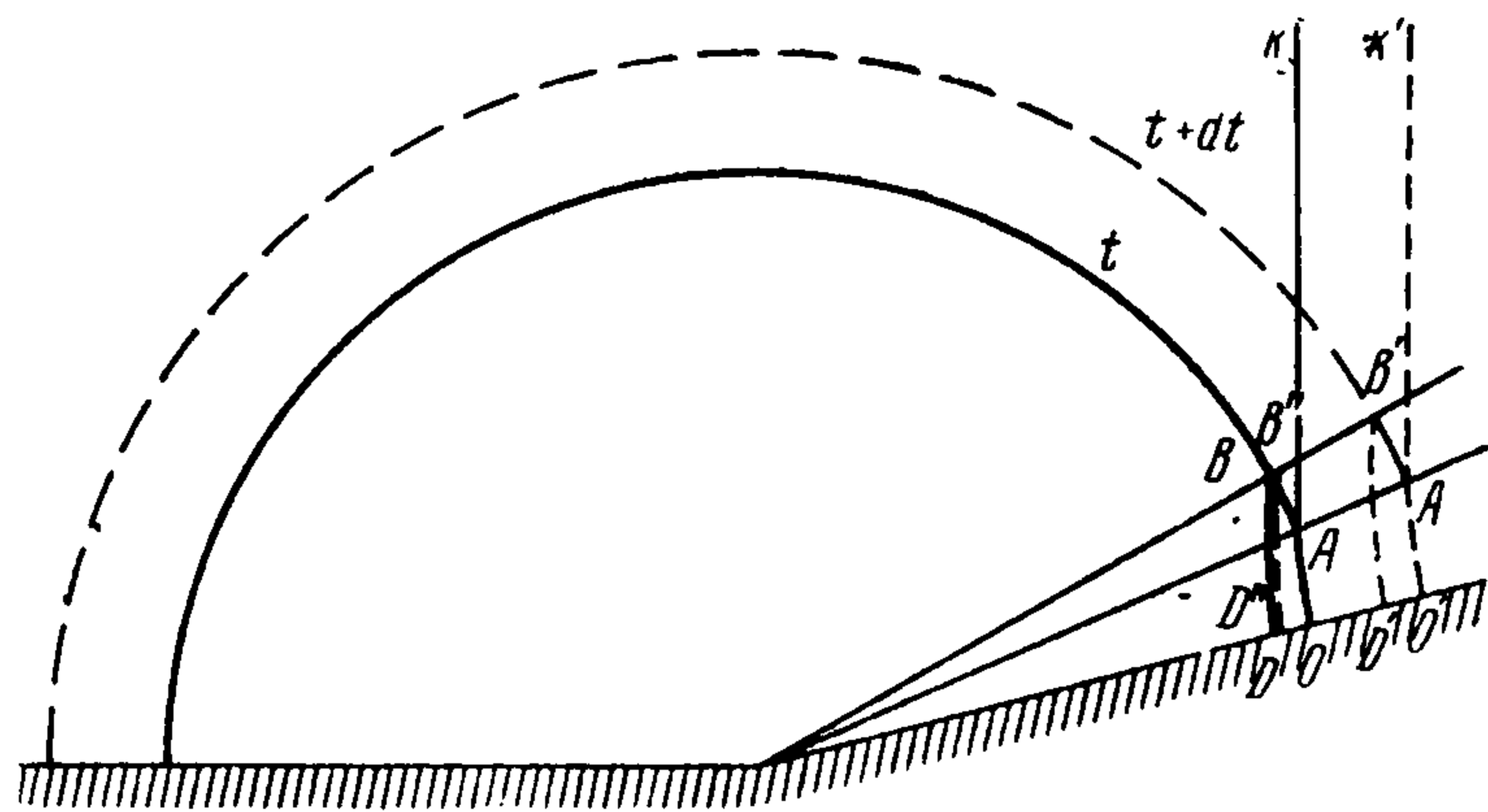
$$dX/dY = - \left[Y + \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)} \right] \quad (3.13)$$

3. Остановимся теперь на условии непрерывности проекции вектора скорости в направлении, параллельном фронту, при переходе через ударную волну. Пусть перед фронтом волны среда покоится. Тогда составляющая вектора скорости, параллельная фронту, равна нулю

и величины M и V , даваемые равенствами (3.2) на фронте ударной волны, должны удовлетворять соотношению

$$M\phi + V = 0 \quad (3.14)$$

В дальнейшем мы будем удовлетворять условию (3.14) и аналогичному условию на фронте ударной волны, распространяющейся по возмущенной пред-



Фиг. 1

варительно среде, приближенно и проверять степень точности его выполнения. Приближенное выполнение условия непрерывности касательной составляющей вектора скорости при переходе через фронт ударной волны можно заменить приближенным выполнением некоторого интегрального соотношения.

Запишем в интегральной форме закон сохранения проекции количества движения на направление, перпендикулярное стенке, для области, включающей фронт ударной волны.

Рассмотрим, например, течение, возникающее [при] так называемом нерегулярном отражении ударной волны от жесткой стенки (фиг. 1). Кривая OA изображает волну Маха, AK — фронт падающей волны, AB — фронт отраженной волны, BD — линию равного давления p . Рассмотрим массу жидкости, находящуюся в момент t в области $O'A'B'D$. Пусть в этот момент фронт волны Маха занимает положение OA и фронт отраженной волны — положение AB . В момент $t + dt$ эти фронты переместятся в положения $O'A'$ и $A'B'$. Частицы, расположенные на линии BD , займут положение $B''D''$.

Обозначим скорость частиц за фронтом падающей волны через u_1 , а избыточное давление через p_1 . Составляющая вектора скорости, перпендикулярная стенке, будет $u_1 \alpha$, где α — угол между плоскостью падающей

волны и перпендикуляром к стенке. Перед фронтами OA и AK $u = 0$. Обозначим через w составляющую вектора скорости, перпендикулярную стенке. Изменение количества движения рассматриваемой массы жидкости за время dt будет равно с точностью до малых величин более высокого порядка относительно M выражению

$$\left[u_1 \alpha_1 (\vartheta - \chi) + \int_{DB} w d\vartheta \right] a_0^2 \rho_0 t dt$$

где χ — угол ϑ , отвечающий «тройной» точке A . Действительно, разность между количествами движения в областях $O'A'B'D'$ и $OABD$ будет меньше $w_{\max} \vartheta \Delta a_0^2 \rho_0 t dt$, а количество движения в области $BB''D''D$ меньше $w_{\max} \vartheta u a_0^2 \rho_0 t dt$. Импульс сил давления, если через γ обозначить угол между касательной к фронту ударной волны и стенкой, а через dl — элемент дуги, можно записать в виде

$$dt \int_{BDOA} (p - p_1) \cos \gamma dl = \left[\int_{DO} (u - u_1) d\Delta - u_1 n p_x OA - (u - u_1) n p_x BD \right] P_0 n t dt$$

Приравнявая импульс сил изменению количества движения, имеем

$$u_1 \alpha (\vartheta - \chi) + \int_{DB} w d\vartheta = \int_{DO} (u - u_1) d\Delta - u_1 n p_x OA - (u - u_1) n p_x BD \quad (3.15)$$

Вводя обозначения

$$\chi^\circ = \frac{\chi}{V^{1/2} (n+1) M_0}, \quad \alpha^\circ = \frac{\alpha}{V^{1/2} (n+1) M_0}, \quad W = \frac{w}{a_0 M_0 V^{1/2} (n+1) M_0} \quad (3.16)$$

получим

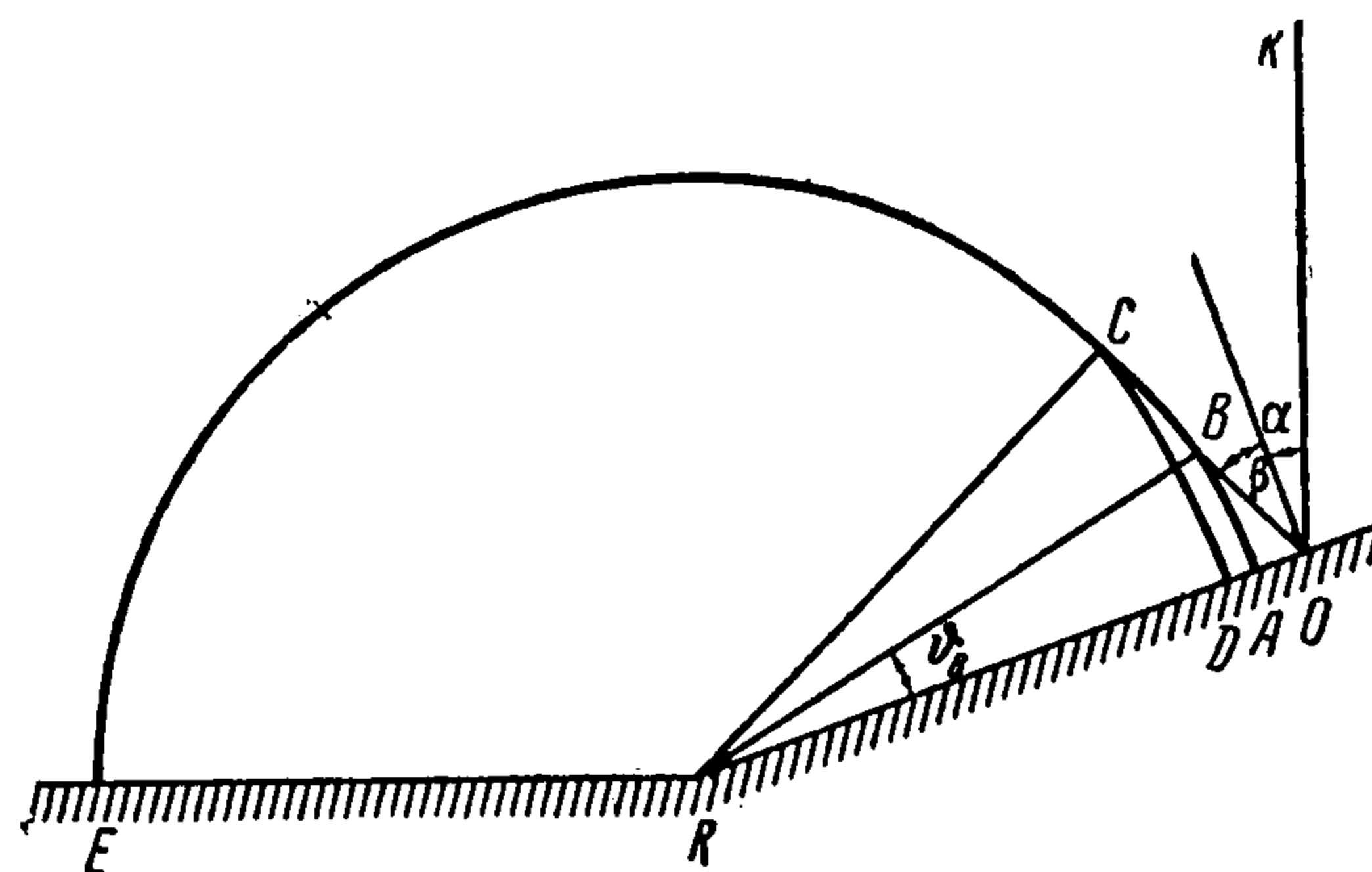
$$\mu_1 \alpha^\circ (Y - \chi^\circ) + \int_{DB} W dY = \int_{DO} (\mu - \mu_1) d\delta - \mu_1 (X_A - X_O) - (\mu - \mu_1) (X_B - X_D) \quad (3.17)$$

§ 4. Приближенное решение задачи о регулярном отражении плоской ударной волны от жесткой стенки при углах падения, близких к критическому. 1. Пусть слабая плоская бесконечно длинная ударная волна с избыточным давлением p_1 и с фронтом, перпендикулярным стенке RE (фиг. 2), набегает на стенку RO , перпендикуляр к которой составляет с ударным фронтом малый угол α .

Фронт отраженной волны $OBCE$ в общем случае состоит из отрезка прямой OB , вдоль которого избыточное давление постоянно, небольшой дуги BC , вдоль которой имеет место интенсивное падение

давления, и дуги окружности CE , представляющей собой фронт волны, вдоль которой давление почти не отличается от давления в падающей волне.

В области $ABCD$ будет иметь место интенсивное изменение давления как в радиальном направлении, так и в направлении изменения угла ϑ . В этой области можно считать, что течение соответствует короткой волне.



Фиг. 2

2. Пусть β означает угол наклона фронта отраженной волны к перпендикуляру к стенке RO . Давление в этой области или, что то же самое, число M_0 , а также угол β определяются из условия равенства скоростей распространения падающей и отраженной волн вдоль стенки:

$$\frac{N_0}{\cos \beta} = \frac{N_1}{\cos \alpha} \quad (4.1)$$

и из уравнения сохранения количества движения в проекции на перпендикуляр к стенке. Пользуясь (3.17), получим

$$M_0 = M_1 (1 + \alpha/\beta) \quad (4.2)$$

Из уравнения (4.1), принимая во внимание равенство (3.1), имеем

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{2} (n + 1) M_0$$

Откуда

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{2} M_0} \frac{1 - \mu_1}{\sqrt{1 - 2\mu_1}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{n+1}{2} M_0} \frac{\mu_1}{\sqrt{1 - 2\mu_1}} \quad (4.3)$$

При уменьшении μ_1 угол α уменьшается и достигает минимального значения при $\mu_1 = 1/3$. Это значение α носит название критического угла падения.

Таким образом, отмечая критические значения звездочками внизу, имеем

$$\alpha_* = 2 \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n+1}{2} M_0}, \quad \beta_* = \frac{1}{2} \alpha_* \quad (4.4)$$

Следовательно, максимальное увеличение избыточного давления за фронтом отраженной волны достигается при регулярном отражении на критическом угле и равно трем.

Каждому значению α из уравнений (4.3) соответствуют два различных значения M_0/M_1 . В действительности, как известно, реализуется течение, отвечающее значению

$$\frac{1}{\mu_1} = 1 + \frac{\alpha^{\vee 2}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^{\vee 2}}} \right) \quad \left(\alpha^{\vee} = \frac{\alpha}{\sqrt{1/2(n+1)}} \right) \quad (4.5)$$

Формула (4.5) справедлива, конечно, только для малых углов α , близких к критическому.

Точка B на фиг. 2 есть точка пересечения фронта отраженной волны со звуковой волной. Уравнение фронта звуковой волны и уравнение отраженной волны соответственно будут

$$\Delta = \frac{n+1}{2} M_0, \quad \Delta + \vartheta \beta - \frac{1}{2} \vartheta^2 = \frac{n+1}{4} M_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (4.6)$$

Отсюда

$$\vartheta_B = \sqrt{\frac{n+1}{2} M_0} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{1 - 2\mu_1}} - \sqrt{1 - \mu_1} \right) \quad (4.7)$$

Угол падения α_s , при котором звуковая волна догоняет фронт падающей волны, соответствует $\vartheta_B = 0$; начиная с этого значения α область постоянного давления исчезает. Из (4.7) находим соответствующее значение μ_1 . Имеем

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.65, \quad \alpha_s = \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}} \approx 2.06 \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} \quad (4.8)$$

3. Рассмотрим случай $\alpha > \alpha_s$. Для определения течения в области $ABCD$ воспользуемся частным решением (2.8). Так как на фронте звуковой волны BA $w = u\vartheta + v = 0$, то $a = 1$.

Вдоль стенки RO при $Y = 0$ имеем

$$\frac{dX}{d\mu} = 1 + e^{2c(1-\mu)} + k \operatorname{sh} 2c(1-\mu)$$

$$\frac{d^2X}{d\mu^2} = -2c [e^{2c(1-\mu)} + k \operatorname{ch} 2c(1-\mu)]$$

причем $dX/d\mu > 0$ и $d^2X/d\mu^2 < 0$. Эти условия выполняются при $c > 0$ и $k > -1$.

Постоянные c и k выбираются так, чтобы при $\mu \rightarrow \mu_1$ фронт отраженной волны переходил в звуковую окружность $\delta = \mu_1$, и так, чтобы наилучшим образом удовлетворить уравнению сохранения количества движения (3.17).

Уравнение сохранения количества движения в проекции на направление, перпендикулярное к стенке, в области, которая ограничена фронтом отраженной волны, линией $\mu = \text{const}$ и стенкой RO , в рассматриваемом случае дает

$$\begin{aligned} \mu_1 \alpha^\circ Y - \frac{1}{c} \operatorname{th} c(1-\mu) \frac{Y^2}{2} = (\mu - \mu_1)(X_A - X_B) + \\ + (1 - \mu_1)(X_0 - X_D) + \frac{1}{2}(1 - \mu)(1 + \mu - 2\mu_1) - \\ - \frac{1}{2c} \{ (1 + k)(1 - \mu_1) - (\mu - \mu_1) [e^{2c(1-\mu)} + k \operatorname{ch} 2c(1-\mu)] \} - \\ - \frac{1}{4c^2} [1 - e^{2c(1-\mu)} - k \operatorname{sh} 2c(1-\mu)] \end{aligned}$$

где Y — ордината точки фронта отраженной волны. Это уравнение удовлетворяется для всех точек отраженного ударного фронта до линии $\mu = 0.6$ с погрешностью, не большей 5%, если ее относить к величине $\mu_1 \alpha^\circ Y$. Вблизи $\mu = \mu_1$ погрешность достигает 20%. При этом $\mu_1 = 0.4$, $\alpha^\circ = 1.325$, $c = 2$ и $k = -1$.

На фиг. 3 показано рассчитанное таким образом поле скоростей; точнее, изображены линии равных значений μ , которые совпадают с линиями равных давлений, и фронт отраженной волны.

При приближении к линии $\mu = \mu_1$ градиенты давления падают, поэтому течение в этой области уже не описывается уравнениями коротких волн.

На поле скоростей вблизи линии $\mu = \mu_1$ оказывает значительное влияние течение во всей области возмущенного движения, которое определяется волновым уравнением акустики. При $\mu < 0.5 \div 0.6$ полученное решение, вероятно, уже не дает достаточно точной картины течения.

В области, близкой к линии $\mu = 1$, поле скоростей близко к $\delta = \mu$, т. е. давление вдоль стенки вблизи точки A падает линейно с расстоянием.

4. Когда $\alpha_* < \alpha < \alpha_s$, фронт отраженной волны уже не имеет прямолинейного участка. Поле скоростей за фронтом отраженной волны приближенно можно определить, пользуясь частным решением (2.7) уравнений (2.2). Вычисления показывают, что уравнение сохранения количества

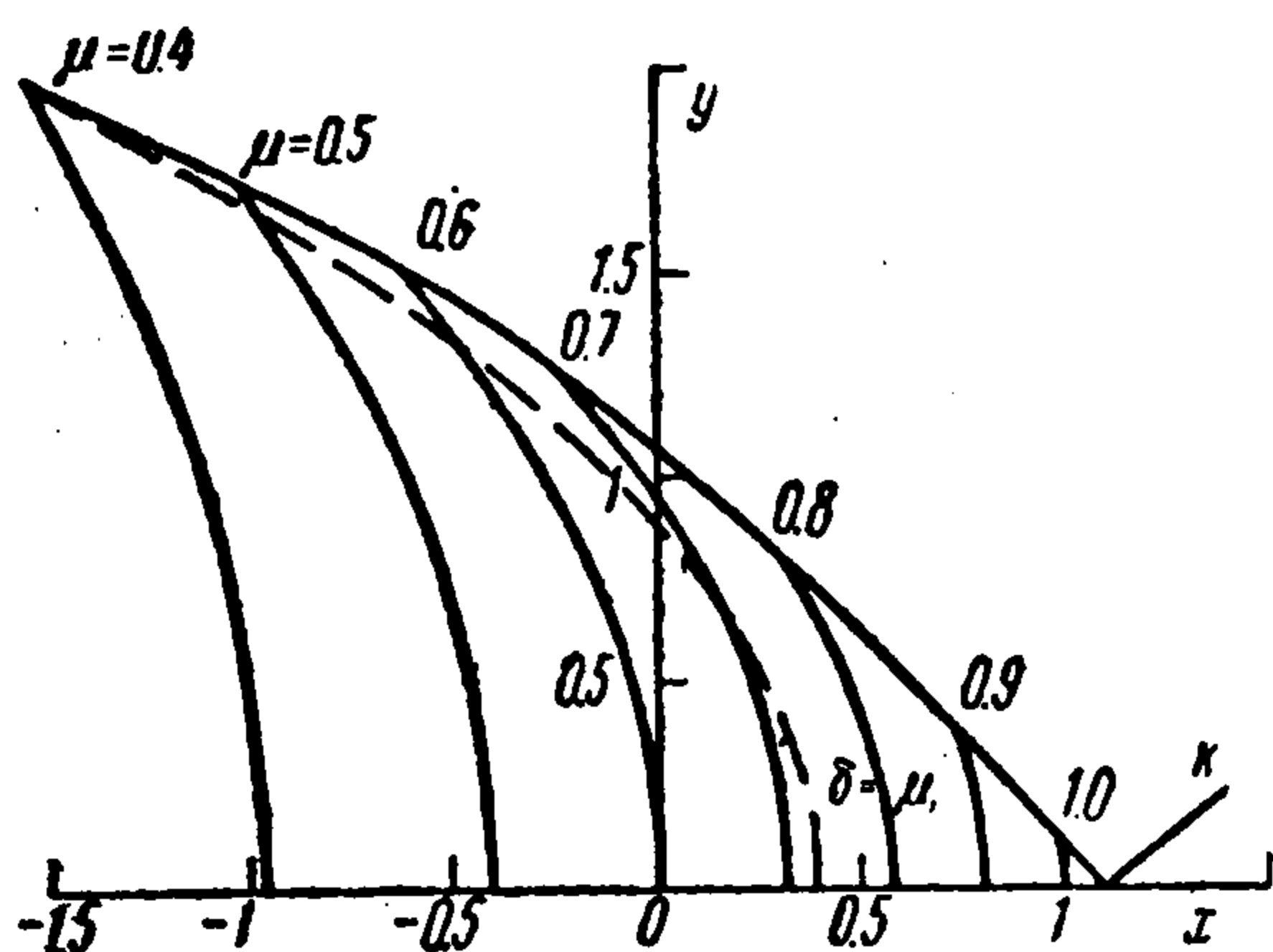
движения (3.17) наилучшим образом удовлетворяется при $a \rightarrow \infty$. В этом случае решение (2.7) можно представить в виде

$$X = \mu - \frac{1}{2c} - he^{-2c(\mu-\mu_1)}, \quad \frac{w}{a_0} = M\vartheta + V = -\frac{\vartheta}{c} \quad (4.9)$$

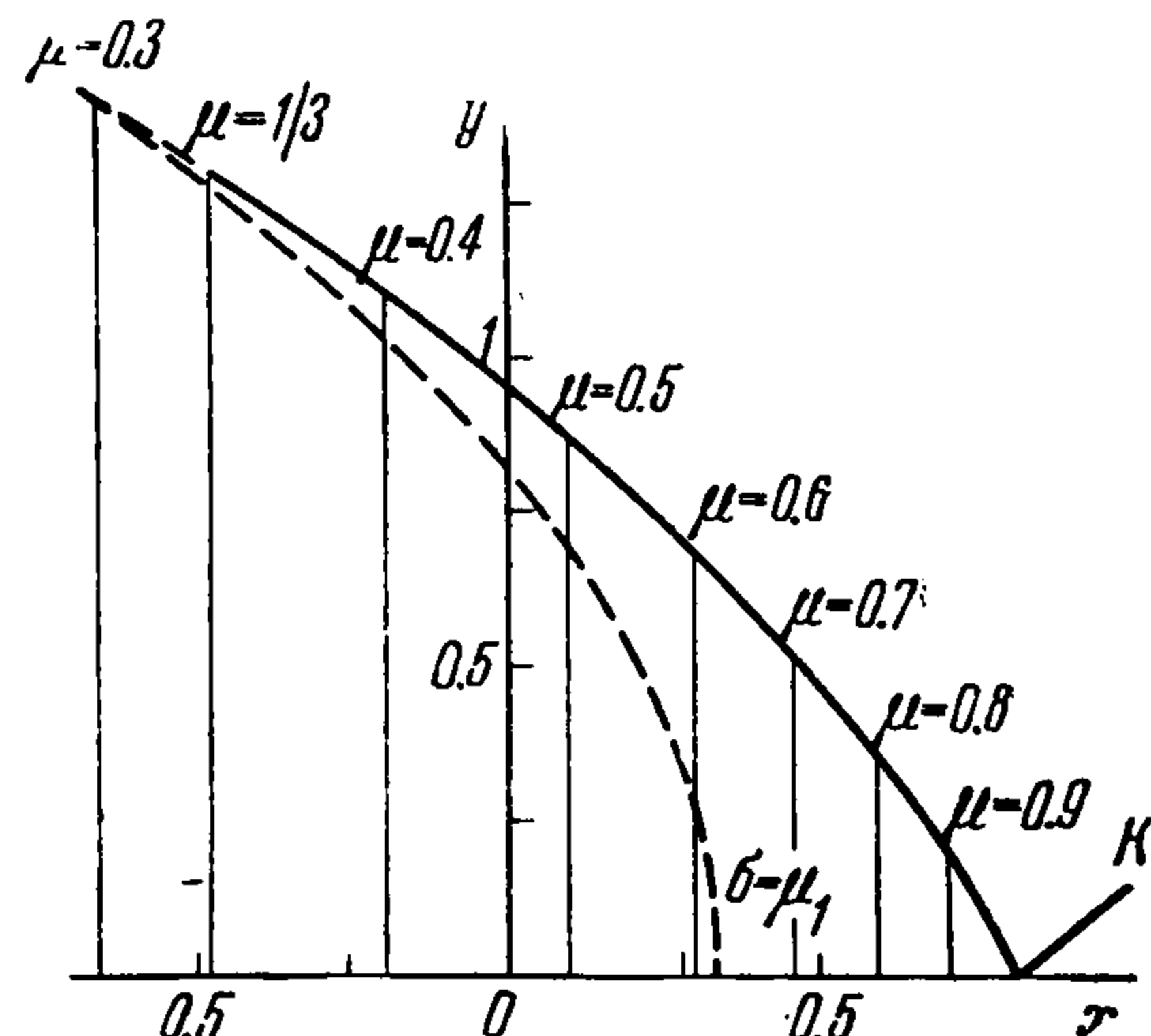
где h и c — постоянные. Пусть M_0 — число Маха в точке O (фиг. 2) за фронтом отраженной волны. В этой точке скорости распространения падающей и отраженной волн вдоль стенки должны быть равны, поэтому

$$\frac{1}{c} = 2 - \mu_1 - \alpha_0^2 - 2he^{-2c(1-\mu_1)} \quad (4.10)$$

Постоянная h выбирается из условия, что при $\mu \rightarrow \mu_1$ фронт отраженной волны совпадает со звуковой окружностью $\delta = \mu_1$.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 изображена картина отражения, когда угол падения равен критическому углу. При этом $\mu_1 = 1/3$, $\alpha^0 = 2/\sqrt{3}$, $h = 0.65$, $c = 3.2$.

Погрешность, с которой удовлетворяется уравнение (3.17), отнесенная к величине $\mu_1 \alpha^0 Y$, даже при значениях μ , близких к μ_1 , не превосходит 20%.

§ 5. Нерегулярное отражение. При углах падения $\alpha < \alpha_*$ имеет место нерегулярное отражение, схема которого показана на фиг. 1. Кроме падающей и отраженной ударных волн, появляется третья ударная волна — волна Маха.

Падающая и отраженная волны пересекаются теперь не у стенки, а в «тройной» точке A , движущейся по прямой $\vartheta = \chi$; волна Маха соединяет точку A со стенкой.

Запишем условия, определяющие равенство скоростей распространения ударных волн в точке A вдоль прямой $\vartheta = \chi$ и распространение фронта волны Маха вдоль стенки. Пользуясь (3.1), получим

$$(\alpha^0 + \chi^0)^2 = (\beta^0 - \chi^0)^2 + \mu_2, \quad (\alpha^0 + \chi^0)^2 - \psi_A^{\circ 2} = \mu_2 - \mu_1, \quad \psi_A^0 = \frac{\psi_A}{V^{1/2(n+1)M_0}} \quad (5.1)$$

Здесь M_0 — число M в основании волны Маха, ψ_A — угол между нормалью к волне Маха в точке A и лучом $\vartheta = \chi$.

Сравнивая скорость распространения волны Маха вдоль стенки и скорость движения точки A параллельно стенке, получим

$$\alpha^{\circ 2} = 1 - \mu_1 + 2(X_A - X_0) \quad (5.2)$$

Отсюда $\alpha^{\circ 2} = 1 - \mu_1$ при $\chi \rightarrow 0$, поэтому

$$M_0 / M_1 = 1 + \alpha^{\circ 2} \quad (5.3)$$

Когда угол падения равен критическому, $\alpha^{\circ} = 2$, и, следовательно, избыточное давление в основании волны Маха при этом значении угла падения в пять раз превосходит избыточное давление в падающей волне. Если угол α близок к нулю, то уравнение отраженной волны будет мало отличаться от уравнения звуковой окружности:

$$X + \frac{1}{2} Y^2 = \mu_1 \quad (5.4)$$

Уравнение фронта падающей волны можно представить в виде

$$X - \alpha^{\circ} Y = \frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \alpha^{\circ 2} \quad (5.5)$$

Отсюда для угла, определяющего положение тройной точки, получим соотношение

$$\chi = \sqrt{1/2(n+1)M_1} - \alpha \quad \text{или} \quad \chi^{\circ} = 1 - \alpha^{\circ} \quad (5.6)$$

Таким образом, если бы отраженная волна была близкой к звуковой, угол χ обращался бы в нуль при угле падения, равном половине критического угла. В действительности угол χ обращается в нуль, когда угол падения равен критическому углу, но имеет весьма малую величину примерно в интервале $0.5 \alpha_* < \alpha < \alpha_*$. При этом в чрезвычайно малой области вблизи волны Маха происходит очень резкое изменение давления.

Для описания картины течения в этой области можно поэтому воспользоваться уравнениями (2.9). Положение основания волны Маха дается равенством $X = 0.5$, т. е. в уравнениях (2.9) значение δ_0 следует взять также равным 0.5. Положим

$$X = \frac{1}{2} + \varepsilon (\xi - \xi_0), \quad Y = \varepsilon \eta \quad (5.7)$$

Здесь ε — малая величина, а ξ_0 — постоянная, равная значению ξ при $\mu = 1$. С точностью до величин порядка ε^2 имеем $\delta = X$. Решение (2.11) в новых обозначениях примет вид:

$$\xi - \xi_0 = 2\mu - 1 + \frac{1}{2} \eta^2, \quad \nu = -(\mu - \frac{1}{2}) \eta - \frac{1}{6} \eta^3 \quad (5.8)$$

Разрешая последнее из этих уравнений относительно η , имеем

$$\eta = \eta_*(\nu, \mu) \quad (5.9)$$

Складывая частные решения (2.10) и (2.11) и полагая $c^2 = \varepsilon h$, получим

$$\eta = \eta_*(\mu, \nu) - h(a - \mu) \nu, \quad \xi - \xi_0 = 2\mu - 1 + h [(\frac{1}{2} - a)(a - \mu)^2 + \frac{2}{3}(a - \mu)^3] \quad (5.10)$$

Вычисляя для поля скоростей, даваемого равенствами (5.10), кривизну линий $\mu = \text{const}$ при $\eta = 0$, получим

$$\left(\frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} = \frac{h + 4(2\mu - 1)^{-2}}{h^2 [a - \mu + 2/h(2\mu - 1)]^2} \quad (5.11)$$

Из требования наилучшего удовлетворения уравнения сохранения количества движения (3.17) вдоль волны Маха следует, что кривизну кривой $\mu = 1$ при $\eta = 0$ надо взять бесконечной. При этом $a = 1 - 2/h$.

Из формулы (5.11) получим тогда

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = \frac{1}{(1-\mu)^2} \frac{4 + (2\mu - 1)^2 h}{[4 + (2\mu - 1)h]^2} \quad (5.12)$$

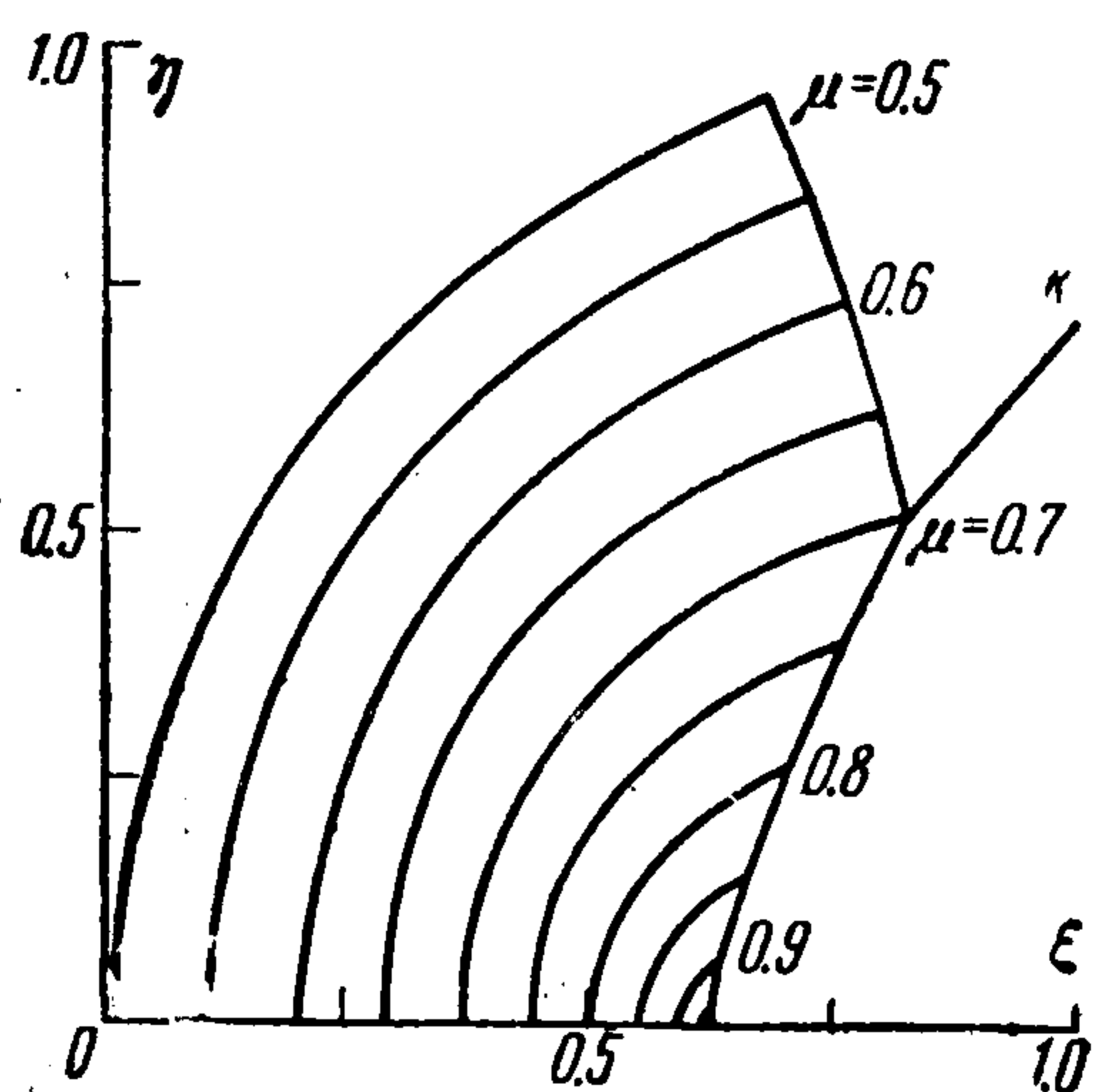
Решение (5.10) примет теперь вид:

$$\begin{aligned} \eta &= [2 - (1 - \mu)h]v + \eta_*(\mu, v) \\ \xi - \xi_0 &= -(1 - \mu)^2 \left[1 + \frac{h}{3} \left(\mu - \frac{1}{4}\right)\right] + \frac{1}{2} [hv^2 + \eta_*^2(\mu, v)] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Причем (5.14)

$$(\partial\xi/\partial\mu)_{v=0} = (1 - \mu)[4 + h(2\mu - 1)], \quad (\partial^2\xi/\partial\mu^2)_{v=0} = -4[1 + h(\mu - \frac{3}{4})]$$

Для того чтобы величина $\partial\xi/\partial\mu$ возросла при уменьшении числа μ вдоль стенки, должно выполняться неравенство $h < 4$. Изменение величины h незначительно влияет на распределение давления вдоль стенки, но заметно изменяет кривизну линий $\mu = \text{const}$ при значениях μ , близких к единице. Для того чтобы вдоль линий $\mu = \text{const}$ с возрастанием η абсолютная величина v возросла, значение должно быть больше двух. На фиг. 5 показано поле скоростей для $h = 2^2/3$, при котором уравнение сохранения количества движения для области, прилегающей к волне



Фиг. 5

Маха, выполняется с максимальной точностью. Уравнения, определяющие положение волны Маха и уравнения отраженной волны, в рассматриваемом случае соответственно имеют вид:

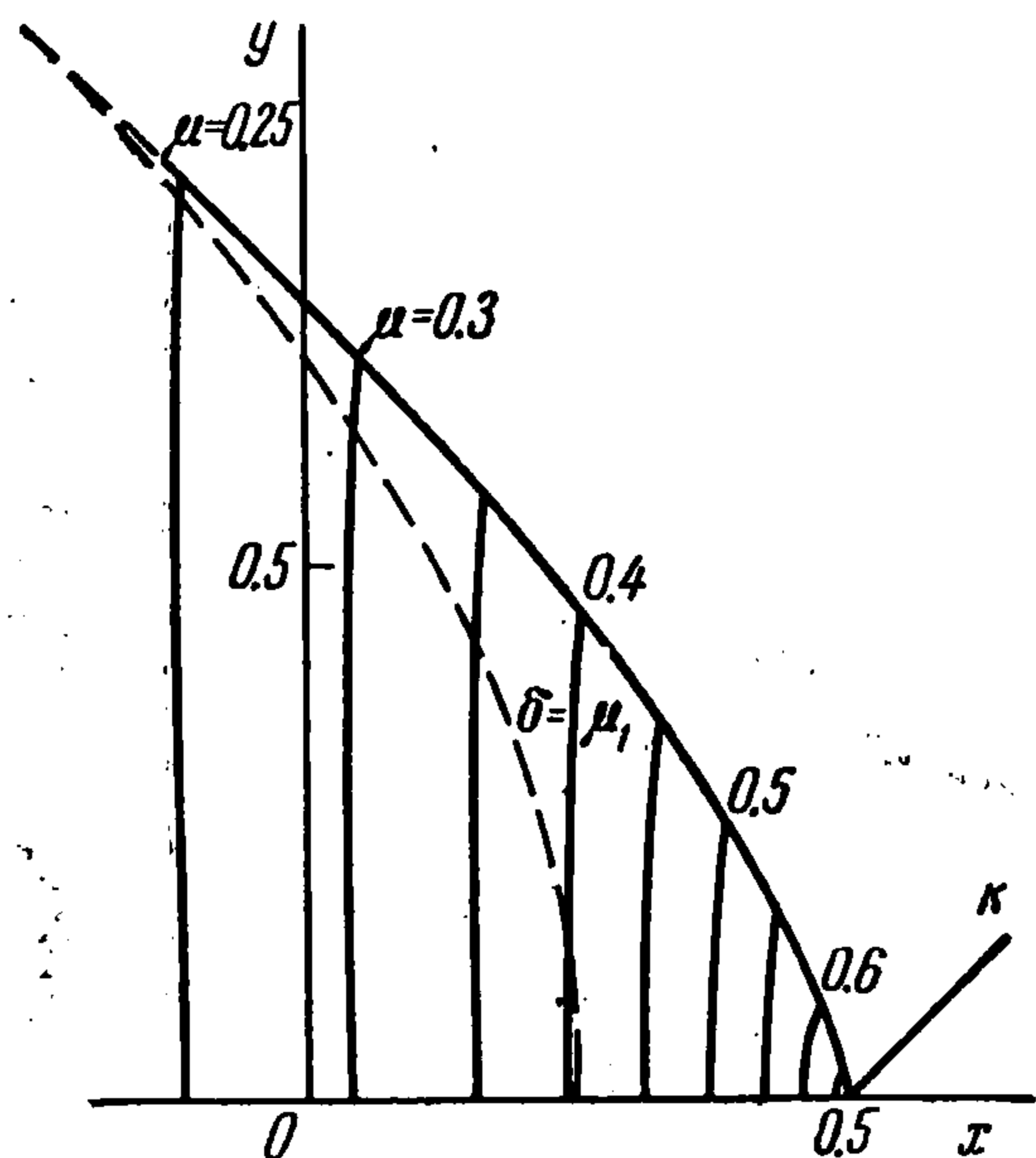
$$\frac{d\xi}{d\eta} = \sqrt{1 - \mu}, \quad \frac{d\xi}{d\eta} = \sqrt{1 - \mu - \mu_1}$$

При значениях угла α , меньших критического, но очень близких к нему, поле скоростей за фронтом отраженной волны будет близко к полю скоростей при углах падения, незначительно превышающих его, за исключением весьма малой области вблизи точки пересечения фронта падающей волны со стенкой. Размер этой области стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \alpha_*$. В этой малой области, включающей волну Маха, поле скоростей приближенно будет совпадать с полем скоростей, изображенным на фиг. 5. Для построения поля скоростей за отраженной волной воспользуемся снова решением (2.7). Положим $a = t$, где t равно величине μ , при которой начинается менее резкое изменение давления [вблизи точки O]. Так как размеры области резкого изменения давления можно считать пренебрежимо малыми, то, приравнявая скорости распространения фронта отраженной и падающей волн вдоль стенки, получим

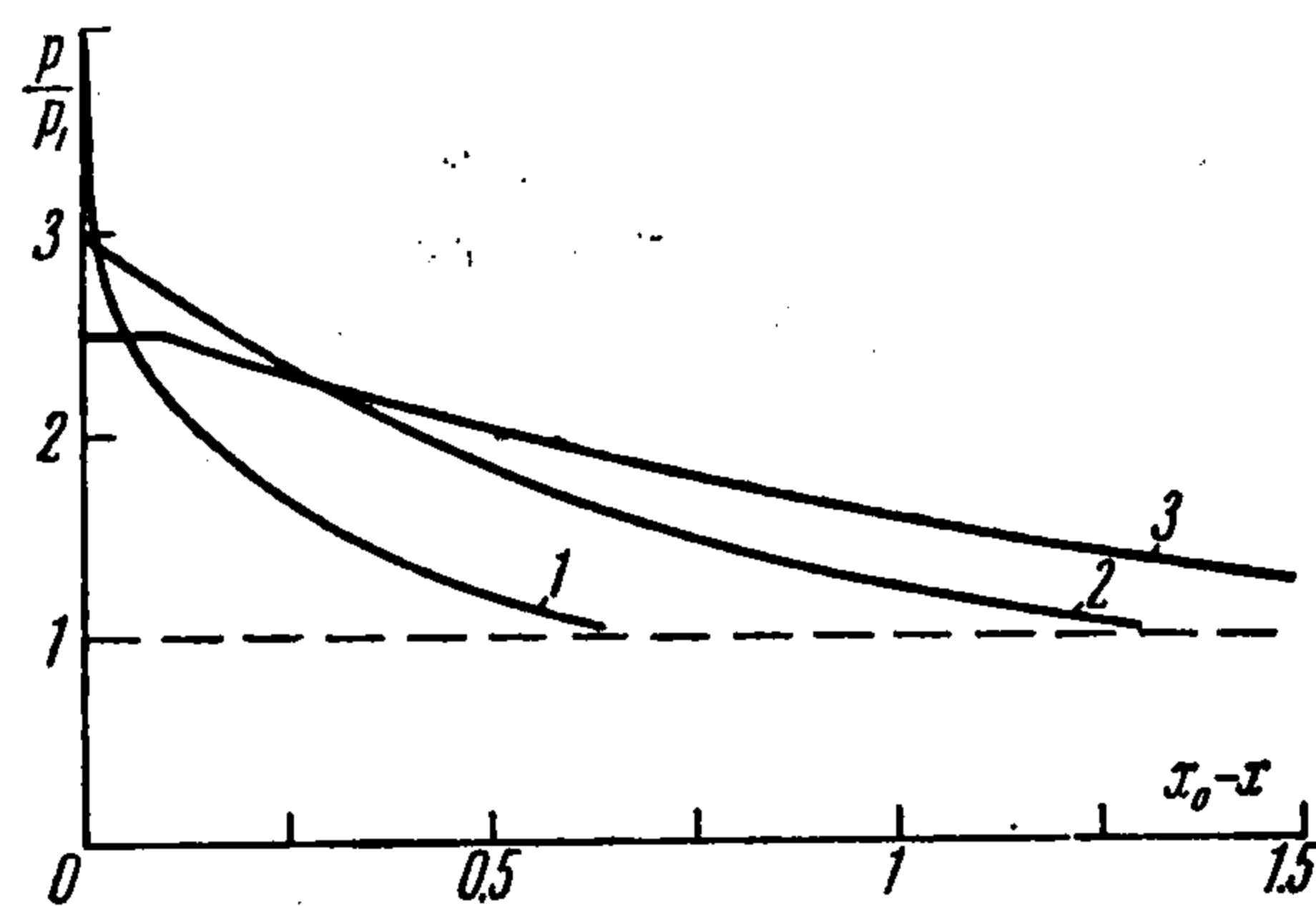
$$c = \frac{2(1+k)}{2m-1}$$

Величина k выбирается так, чтобы фронт отраженной волны при $\mu \rightarrow \mu_1$ стремился к звуковой окружности $\delta = \mu_1$. Вдоль фронта отраженной волны должно удовлетворяться уравнение сохранения количества движения (3.17). Вычисления показывают, что для выполнения этого условия при $\mu_1 = 0.25$ величина c должна быть порядка 5. На фиг. 6 построено поле скоростей для значений $c = 5.25$, $k = 0.05$, соответствующих

величине $m = 0.7$. При этом уравнение сохранения количества движения удовлетворяется с точностью порядка 10% относительно члена $\mu_1 \alpha^\circ Y$. При $\mu_1 = 0.3$ и этих же значениях c и k ошибка возрастает. При $\mu_1 = 0.2$ число m можно взять равным 0.65. Приблизительно можно считать, что поле скоростей, данное на фиг. 6, соответствует полю скоростей за фронтом отраженной волны в интервале $0.2 \leq \mu \leq 0.3$, соответствующего изменению угла α в пределах от $\alpha_* = 2 \sqrt{1/2} (n+1) M_1$ до $\alpha = 1.41 \sqrt{1/2} (n+1) M_1$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Приведенное выше приближенное решение не позволяет определить размеры области сильного изменения давления, т. е. величину ϵ , а также точную границу, отделяющую область очень резких изменений давления вблизи волны Маха. Для этого требуется построение решения системы уравнений (1.19), которое включает особенность, описывающую поле давлений вблизи волны Маха. Если на основании оптических измерений определена зависимость $\chi = \chi(\alpha)$, то величина ϵ определяется из уравнений

$$\chi = 0.5 \epsilon \sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1}, \quad \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{\alpha^2}{1/2 (n+1) M_1}$$

На фиг. 7 нанесены кривые 1, 2 и 3 распределения давления соответственно для углов падения $\alpha = 1.73 \sqrt{1/2} (n+1) M_1$ для критического угла $\alpha_* = 2 \sqrt{1/2} (n+1) M_1$ и для угла $\alpha = 2.095 \sqrt{1/2} (n+1) M_1$. Эти эпюры показывают, что области повышенного давления вблизи критического угла имеют очень малую протяженность и для их экспериментального наблюдения при опытах со взрывами малых зарядов нужны приборы с очень высокой разрешающей способностью.

Поступила 20 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.
2. Х р и с т и а н о в и ч С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, т. XX, вып. 5, 1956.
3. Г р и б А. А., Р я б и н и н А. Г., Х р и с т и а н о в и ч С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
4. Ф а л ь к о в и ч С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.