ЛАМИНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

И. Г. Севрук

(Пермь)

Излагается асимптотическое решение задачи о ламинарной тепловой конвекции над стационарным линейным источником тепла. По-видимому, впервые этой задачей занялся Я. Б. Зельдович [1], который еще в 1937 г., не решая уравнений конвекции, получил формулы для продольной составляющей скорости и температуры жидкости, исходя из оценки размерностей.

§ 1. Постановка и уравнения задачи. Рассмотрим задачу о стационарной тепловой конвекции жидкости над бесконечно длинной прямолинейной горизонтальной нагретой нитью.

Тепло, выделяемое нитью, приводит к неравномерной нагретости окружающей источник жидкости, что в конечном итоге вызывает конвективное движение жидкости. Поток жидкости имеет форму плоской восходящей струи, постепенно расширяющейся с высотой. По достижении некоторой определенной высоты ламинарное движение нарушается, происходят размывание, турбулизация струи.

Приступая к изучению движения ламинарной струи, будем иметь в виду наличие поперек струи больших градиентов скорости и температуры, что, как известно, характерно для пограничного слоя, образованного на твердой стенке.

Поэтому можно значительно упростить с учетом приближений теории пограничного слоя известные уравнения свободной тепловой конвекции [2]

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \mathbf{g}\beta T', \qquad \mathbf{v}\nabla T' = \chi\Delta T', \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, T и p' — отклонения температуры и давления от их равновесных значений, ρ — плотность жидкости, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения, ν и χ — коэффициенты вязкости и температуропроводности жидкости, и дифференциальные уравнения движения струи можно написать в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta T + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

Здесь u, v — составляющие скорости жидкости вдоль осей x и y (ось x направлена вертикально вверх в плоскости симметрии струи, ось y — поперек струи, а ось z — вдоль источника).

Член с давлением опущен, так как давление изменяется только вдоль струи и оно равно гидростатическому давлению $p(x)$, а потому $p' = 0$.

Уравнения (1.2) будем решать со следующими условиями на границе:

$$v = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.3}$$

$$u = 0, \qquad T = 0 \qquad \text{при } y = \infty \tag{1.4}$$

Последние два условия (1.3) выражают, что плоскость xz является плоскостью симметрии потока.

Введем какую-либо величину, характеризующую мощность источника тепла, например количество тепла Q, отдаваемое в единицу времени единицей длины нити. Тогда, выражая постоянство потока тепла через любую горизонтальную плоскость (молекулярным переносом тепла пренебрегаем), будем иметь

$$Q = 2c\rho\int_0^\infty uT\,dy = \text{const} \tag{1.5}$$

Здесь c — теплоемкость жидкости.

Уравнение непрерывности позволяет ввести функцию тока ψ:

$$u = \partial\psi\,/\,\partial y, \qquad v = -\,\partial\psi\,/\,\partial x \tag{1.6}$$

Так как в рассматриваемой задаче не имеется какой-либо характерной длины, то кажется естественным предположение о том, что профили скоростей $u(x, y)$, а также температур $T(x, y)$ аффинны друг другу, т. е. могут быть приведены в совпадение для любых сечений x струи, если для u, T и y подобрать соответствующие масштабы.

Учитывая все это и принимая, кроме того, одинаковым порядок величин сил, входящих в первое уравнение (1.2), а также независимость потока тепла Q от координаты x, будем функцию тока и температуру искать в виде

$$\psi = 5\left[\frac{Qg\beta\nu^2}{50c\rho}\right]^{1/5} x^{3/5} f(\eta) \tag{1.7}$$

$$\left(\eta = \left[\frac{Og\beta}{50c\rho\nu^3}\right]^{1/5} x^{-2/5} y\right)$$

$$T = \frac{5\nu^2}{g\beta}\left[\frac{Qg\beta}{50c\rho\nu^3}\right]^{4/5} x^{-3/5}\varphi(\eta) \tag{1.8}$$

Здесь η — безразмерная координата, а f и φ — безразмерные функции.

Числовые множители выбраны для простоты уравнений, которые получатся в результате дальнейших преобразований.

Подставляя (1.6) — (1.8) в уравнения (1.2), для функций f и φ получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f''' + 3ff'' = f'^2 - \varphi, \qquad 36\,(f\varphi)' = -\,\varphi'' \qquad \left(\sigma = \frac{\nu}{\chi}\right) \tag{1.9}$$

Здесь σ — число Прандтля, штрих — знак производной по η.

Граничные условия (1.3) и (1.4) в новых переменных примут вид:

$$f = f'' = 0, \qquad \varphi' = 0 \qquad \text{при } \eta = 0 \tag{1.10}$$

$$f' = 0, \qquad \varphi = 0 \qquad \text{при } \eta = \infty \tag{1.11}$$

§ 2. Интегрирование уравнений задачи. Сначала дважды проинтегрируем второе уравнение (1.9). Учитывая граничные условия (1.10), результат интегрирования можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left(-\,3\sigma\int_0^\eta f d\eta\right) \tag{2.1}$$

где $\varphi_0 = \varphi(0)$ — величина, которую нужно в дальнейшем определить.

Подставив (2.1) в первое уравнение (1.9), получим

$$f''' + 3ff'' = f'^2 - \varphi_0 \exp\left(-\,3\sigma\int_0^\eta f d\eta\right) \tag{2.2}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде степенного ряда:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\,\eta^n \tag{2.3}$$

Приняв во внимание граничные условия (1.10) для $\eta = 0$, сразу же найдем, что $a_0 = a_2 = 0$. Подставляя затем (2.3) в (2.2) и приравнивая в обеих частях уравнения коэффициенты при одинаковых степенях η, выразим все коэффициенты ряда (2.3) через $a_1 = a$ и φ_0:

$$a_3 = a^2 - \varphi_0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 3\sigma\varphi_0 a - 4a\,(a^2 - \varphi_0), \quad a_6 = 0 \tag{2.4}$$
$$a_7 = 34a^4 - a^2\varphi_0\,(28 + 27\sigma + 27\sigma^2) - 3\varphi_0^2\,(2 + \sigma), \ldots$$

То, что все коэффициенты с четным индексом равны нулю, можно было бы обосновать еще так. Функция $f'(\eta)$, пропорциональная скорости u, должна быть четной функцией переменной η, а, следовательно, f — нечетной, откуда и заключаем, что коэффициенты при четных степенях η ряда (2.3) равны нулю. Поэтому ряд (2.3) можно записать в виде

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!}\,\eta^{2n+1} \tag{2.5}$$

Рассматривая (2.2) как линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно f'' и ее производной, разрешим его относительно f'', учитывая при этом, что $f''(0) = 0$; получим

$$f'' = e^{-3F(\eta)}\,\Phi(\eta) \tag{2.6}$$

где

$$F(\eta) \equiv \int_0^\eta f d\eta, \qquad \Phi(\eta) \equiv \int_0^\eta (f'^2 - \varphi_0 e^{-3\sigma F(\eta)})\, e^{3F(\eta)} d\eta \tag{2.7}$$

Желая удовлетворить граничному условию (1.11), проинтегрируем (2.6) в пределах от 0 до ∞; получим

$$f'(\infty) - f'(0) = \int_0^\infty e^{-3F(\eta)}\,\Phi(\eta)\, d\eta$$

или

$$\int_0^\infty e^{-3F(\eta)}\,\Phi(\eta)\, d\eta = -a \tag{2.8}$$

Второе уравнение с теми же неизвестными a и φ_0 получим из условия (1.5), которое в переменных f, φ, η примет вид:

$$\varphi_0 \int_0^\infty e^{-3\sigma F(\eta)} f' d\eta = 1 \tag{2.9}$$

Интегралы (2.8) и (2.9) через элементарные функции не выражаются, но в некоторых случаях допускают асимптотическое разложение на основе метода перевала.

В рассматриваемом случае $F(\eta)$ — положительная функция, монотонно стремящаяся вместе с η к бесконечности, имеющая стационарную точку $\eta = 0$. Функции $f'(\eta)$ и $\Phi(\eta)$ — плавно изменяющиеся функции. Поэтому для приближенного вычисления интегралов (2.8) и (2.9) можно применить метод перевала, подробно описанный Ватсоном [3] и примененный Мексином[4] к интегрированию уравнений пограничного слоя.

Согласно методу для вычисления интегралов (2.8) и (2.9) введем новую переменную интегрирования τ:

$$F(\eta) = \tau \tag{2.10}$$

или, заменяя $F(\eta)$ степенным рядом, найденным согласно (2.7):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+2)!}\,\eta^{2n+2} = \tau \tag{2.11}$$

Найдем ряд, обратный ряду (2.11). Используя готовые формулы для коэффициентов из справочника Двайта[5], сначала найдем выражение

$$\begin{aligned}\eta^2 = {} & \left(\frac{a}{2}\right)^{-1}\tau - \frac{a_3}{24}\left(\frac{a}{2}\right)^{-3}\tau^2 + \frac{1}{1440}(5a_3^2 - aa_5)\left(\frac{a}{2}\right)^{-5}\tau^3 - \\ & - \frac{1}{483840}(3a^2a_7 - 70aa_3a_5 + 175a_3^3)\left(\frac{a}{2}\right)^{-7}\tau^4 + \ldots]\end{aligned} \tag{2.12}$$

а затем и η:

$$\eta = \left(\frac{a}{2}\right)^{-1/2}\tau^{1/2}\left[1 - \frac{a_3}{48}\left(\frac{a}{2}\right)^{-2}\tau + \frac{1}{23040}(35a_3^2 - 8aa_5)\left(\frac{a}{2}\right)^{-4}\tau^2 + \ldots\right] \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12) в ряд $f' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n)!}\,\eta^{2n}$, получим

$$\begin{aligned}f' = {} & a + \frac{a_3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{-1}\tau + \frac{1}{48}(aa_5 - a_3^2)\left(\frac{a}{2}\right)^{-3}\tau^2 + \\ & + \frac{1}{2880}(a^2a_7 - 6aa_3a_5 + 5a_3^3)\left(\frac{a}{2}\right)^{-5}\tau^3 + \ldots\end{aligned} \tag{2.14}$$

Остается преобразовать к новой переменной функцию $\Phi(\eta)$.

Для этой цели воспользуемся уравнением (2.6), которое можно переписать в виде

$$\frac{df'}{d\tau} = e^{-3\tau}\,\Phi(\eta)\,\frac{d\eta}{d\tau} \tag{2.15}$$

Положим

$$\Phi(\eta)\frac{d\eta}{d\tau}=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\tau^{1/2(m-1)} \tag{2.16}$$

Подставим (2.14) и (2.16) в уравнение (2.15) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ обеих частях уравнения, найдем

$$b_1=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{-1}(a^2-\varphi_0),\qquad b_2=0,\qquad b_3=\frac{1}{24}\left(\frac{a}{2}\right)^{-3}[4a^4+3a^2\varphi_0(\sigma-1)-\varphi_0^2]\quad b_4=0$$

$$b_5=\frac{1}{260}\left(\frac{a}{2}\right)^{-5}(48a^6-46a^4\varphi_0+45\sigma a^4\varphi_0-27\sigma^2a^4\varphi_0+3a^2\varphi_0^2+$$
$$+15\sigma a^2\varphi_0^2-5\varphi_0^3)\qquad b_6=0,\ldots \tag{2.17}$$

Таким образом, для вычисления интеграла (2.8) имеем

$$\int_0^{\infty}e^{-3F(\eta)}\Phi(\eta)\,d\eta=\int_0^{\infty}e^{-3\tau}\sum_{m=1}^{\infty}b_m\tau^{\frac{1}{2}(m+1)-1}\,d\tau=\sum_{m=1}^{\infty}b_m3^{-\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \tag{2.18}$$

где Γ — гамма-функция.

Подставив (2.18) в (2.8), имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}b_m3^{-\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)=-a \tag{2.19}$$

Используя (2.13) и (2.14), аналогичным путем найдем интеграл (2.9); в результате получим

$$\varphi_0\sum_{m=0}^{\infty}c_m(3\sigma)^{-\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)=1 \tag{2.20}$$

где

$$c_0=\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2},\qquad c_1=0,\qquad c_2=\frac{3a_3}{16}\left(\frac{a}{2}\right)^{-3/2},\qquad c_3=0$$

$$c_4=\frac{1}{4608}\left(\frac{a}{2}\right)^{-7/2}[-245a^4+10a^2\varphi_0(33+12\sigma)-85\varphi_0^2],\qquad c_5=0,\ldots \tag{2.21}$$

В рассматриваемом случае ряды (2.19) и (2.20), по-видимому, быстро сходятся, поэтому достаточно хорошее приближение для a и φ_0 можно получить, используя 3—4 члена этих рядов.

Таким образом, решение задачи, формально удовлетворяющее всем граничным условиям, получим в виде рядов

$$f=a\eta+\frac{1}{6}(a^2-\varphi_0)\eta^3+\frac{1}{120}[3\sigma a\varphi_0-4a(a^2-\varphi_0)]\eta^5+$$
$$+\frac{1}{5040}[34a^4-a^2\varphi_0(28+27\sigma+27\sigma^2)-3\varphi_0^2(2+\sigma)]\eta^7+\ldots \tag{2.22}$$

$$\varphi=\varphi_0\{1-\frac{3}{2}\sigma a\eta^2+\frac{1}{8}\sigma[(9\sigma-1)a^2+\varphi_0]\eta^4-\frac{1}{240}a\sigma[45\sigma a^2(3\sigma-1)+$$
$$+4\varphi_0(12\sigma+1)-4a^2]\eta^6+\ldots\} \tag{2.23}$$

Полученное нами решение задачи имеет ограниченную применимость. Во-первых, оно неприменимо в непосредственной близости от источника тепла. В самом деле, любой реальный источник имеет конечную толщину и полученное решение справедливо лишь, начиная с такого расстояния от источника, где уже его размеры не оказывают заметного влияния на движение жидкости. Во-вторых, начиная с некоторой высоты, поток становится турбулентным.

Поступила 20 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Предельные законы свободно восходящих конвективных потоков. ЖЭТФ, т. 7, вып. 12, 1937.
2. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, 1949.
4. Meksyn D. Integration of the boundary-layer equations. Proc. Roy. Soc., vol. 237, No, 1211 1956.
5. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов. ИЛ, 1948.