

Эта формула пригодна для $0 < l/L < 0.001$. При $a \rightarrow 0$ получаем струйное обтекание пластины в неограниченном потоке, для которой (3.1) дает известное ^[4] значение $\mu^\circ = 0.4224$.

§ 4. Удар пластины в неограниченном потоке при кавитационном обтекании. При $h \rightarrow a$ стенки, ограничивающие кавитационный поток, удаляются на бесконечность. В этом случае (1.3) и система неравенств $0 < e < e < 1$ позволяют определить границы изменения независимого параметра $0 < a < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Выполнив предельный переход $h \rightarrow a$ в основных формулах, мы вычислили μ° для различных значений a . Затем график перестраивался по λ (кривая 2 на фиг. 3). Как видно, при $\lambda > 8$ имеем уже незначительное возрастание μ° . Отметим, что для весьма малой кавитационной области $\lambda \rightarrow \infty$ и μ° должно приближаться к известному ^[3] значению коэффициента присоединенной массы $\frac{1}{4}\pi$ при непрерывном обтекании пластины. Рассмотрим развитое кавитационное течение ($a \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$). Действуя как в § 4, определим приближенную формулу

$$\mu^\circ \approx 0.4224 - 0.0378 a^2$$

которая верна для $0 < \lambda < 0.1$. При $a \rightarrow 0$ получим известное ^[4] значение $\mu^\circ = 0.4224$ для пластины при обтекании с отрывом струй.

Поступила 27 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Э ф р о с Д. А. Гидродинамическая теория плоско-параллельного кавитационного течения. ДАН СССР, т. LI, No 4, 1946.
2. Г у р е в и ч М. И. Симметричное кавитационное обтекание плоской пластинки, помещенной между параллельными стенками. Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1946.
3. С е д о в Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
4. Г у р е в и ч М. И. Удар пластины при обтекании с отрывом струй. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

С. П. Пустовойт

(Пермь)

Сравнительно небольшое число опубликованных работ по нестационарной тепловой конвекции относится к частично открытым областям, например ^[1, 2, 3], только в одной из них ^[4] рассматривается случай сферического слоя. Ниже приводится приближенное решение одной задачи о слабой нестационарной тепловой конвекции в сферической полости. Предложенная при этом схема решения задач о слабой конвекции в замкнутых полостях несколько отличается от той, которая обычно использовалась ранее (см., например, ^[1, 3, 4]).

§ 1. Постановка задачи. 1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ покоящаяся жидкость температуры T_0 заполняет сферическую полость радиуса R , стенки которой все время поддерживаются при температуре T_1 , отличной от начальной температуры жидкости, причем пусть для определенности $T_0 > T_1$. Такая задача может, например, соответствовать схематизации (правда, довольно грубой) остывания жидкости в сферическом сосуде, который омывается извне охлаждающим его потоком.

2. Начало декартовых координат X, Y, Z поместим в центр шара, ось Z направим вертикально вверх. Введем безразмерные координаты и время:

$$X = \frac{X}{R}, \quad Y = \frac{Y}{R}, \quad Z = \frac{Z}{R}, \quad t = \frac{\nu}{R^2} t^* \quad (1.1)$$

где ν — кинематическая вязкость. Величины, входящие в уравнения конвекции (см. [3]), — гидродинамическую скорость V^* , избыточную над равновесным при T_1 значением часть p^* давления и избыточную над T_1 часть θ^* температуры — тоже заменим соответствующими безразмерными величинами V, p, θ при помощи соотношений

$$V^* = \frac{\nu}{R} V, \quad p^* = \rho_1 \left(\frac{\nu}{R} \right)^2 p, \quad \theta^* = (T_0 - T_1) \theta \quad (1.2)$$

где ρ_1 — равновесное при T_1 значение плотности.

Тогда уравнения конвекции [3] будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V &= - \nabla p + G \theta n + \Delta V & \left(G = \frac{g \beta (T_0 - T_1) R^3}{\nu^2} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (V \Delta) \theta &= \frac{1}{\sigma} \Delta \theta, \quad \operatorname{div} V = 0 & \left(\sigma = \frac{\nu}{\chi} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь χ — температуропроводность, n — единичный вектор, направленный по оси Z .

3. Начальные и граничные условия с учетом сказанного в п. 1 и в обычном предположении прилипшего слоя формулируются таким образом (r — безразмерный радиус-вектор):

$$V = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{при } t = 0; \quad V = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (1.4)$$

Кроме того, мы наложим на решение физически очевидное условие ограниченности в центре шара.

§ 2. Схема решения. 1. Имея в виду слабую конвекцию и предполагая соответственно число Грассгофа достаточно малым, будем искать решение уравнений (1.3) с краевыми условиями (1.4) в виде разложений величин V, p, θ по степеням числа Грассгофа [5]:

$$V = G V^{(1)} + G^2 V^{(2)} + \dots, \quad p = G p^{(1)} + G^2 p^{(2)} + \dots, \quad \theta = \theta^{(0)} + G \theta^{(1)} + G^2 \theta^{(2)} + \dots \quad (2.1)$$

Подставив эти разложения в уравнения (1.3) и в краевые условия (1.4), будем иметь линейные уравнения для последовательных приближений. Ограничимся нулевым и первым приближениями.

2. В нулевом приближении получается уравнение

$$\frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \Delta \theta^{(0)} \quad (2.2)$$

Граничное условие для этого уравнения вытекает из (1.4), начальное же условие удобно выбрать, имея в виду также (1.4), так, чтобы при $t = 0$ было $\theta^{(0)} = 1$. Таким образом, краевые условия для уравнения (2.2) имеют вид:

$$\theta^{(0)} = 1 \quad \text{при } t = 0; \quad \theta^{(0)} = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (2.3)$$

В первом приближении имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} &= - \nabla p^{(1)} + \theta^{(0)} n + \Delta V^{(1)}, \quad \operatorname{div} V^{(1)} = 0 \\ \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} + (V^{(1)} \Delta) \theta^{(0)} &= \frac{1}{\sigma} \Delta \theta^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

с нулевыми краевыми условиями

$$V^{(1)} = 0, \quad \theta^{(1)} = 0 \quad \text{при } t = 0; \quad V^{(1)} = 0, \quad \theta^{(1)} = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (2.5)$$

и условием ограниченности в центре шара.

3. Решение уравнения нулевого приближения (2.2) с краевыми условиями (2.3) известно (см., например, [6]). Для решения же уравнений первого приближения (2.4) с указанными после них краевыми условиями мы воспользуемся следующей схемой.

Введя обозначение $\operatorname{div} V^{(1)} \equiv \Omega$ и применив операцию дивергенции к первому уравнению (2.4), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega - \Delta \Omega = - \Delta p^{(1)} + \operatorname{div} (\theta^{(0)} n) \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что $p^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta p^{(1)} = \operatorname{div}(\theta^{(0)} \mathbf{n}) \quad (2.7)$$

так как в силу второго уравнения (2.4)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \Delta \Omega = 0 \quad (2.8)$$

Значит, $p^{(1)}$ нужно искать среди решений уравнения (2.7). Это уравнение решается известным образом. Его решения, ограниченные в центре шара, будут содержать неизвестные функции времени. Подберем какое-либо из этих решений $p^{(1)}$ и упомянутые функции времени так, чтобы после подстановки такого $p^{(1)}$ в первое уравнение (2.4) решение $V^{(1)}$ этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям (2.5) и ограниченное в центре шара, обеспечивало еще выполнение условия

$$\Omega = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (2.9)$$

Тогда Ω будет удовлетворять уравнению (2.8) с граничным условием (2.9) и начальным условием

$$\Omega = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (2.10)$$

имеющим место в силу (2.5). Отсюда следует, как известно (см., например, [7]), что $\Omega = 0$, т. е. второе уравнение (2.4) удовлетворяется. Теперь можно решить и уравнение третье (2.4).

§ 3. Решение задачи и краткое обсуждение результатов. 1. Подставив решение уравнения (2.2) с краевым условием (2.3) (см., например, [6])

$$\theta^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k\pi} \frac{\sin k\pi r}{r} \exp - \frac{k^2 \pi^2 t}{\sigma} \quad (3.1)$$

в уравнение (2.7), найдем одно из ограниченных в центре шара решений этого уравнения:

$$p^{(1)} = - \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(k\pi)^3} \exp - \frac{k^2 \pi^2 t}{\sigma} \frac{d}{dr} \frac{\sin k\pi r}{r} + s(t)r \right] \cos \psi \quad (3.2)$$

где ψ — полярная координата сферической системы и $s(t)$ — неизвестная пока функция времени.

2. Для решения уравнений первого приближения воспользуемся полной ортогональной системой функций, являющихся решением уравнения

$$\Delta \Phi(r) + \lambda \Phi(r) = 0 \quad (3.3)$$

где λ — константа, при нулевом граничном условии $\Phi = 0$ при $r = 1$ и условии ограниченности в центре шара. Эта система функций такова [7]:

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\epsilon_i^{(n)} r) P_n^{(m)}(\mu) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \quad (\mu \equiv \cos \psi) \quad (3.4)$$

где индексы n, i, m принимают целочисленные значения. Здесь $J_{n+\frac{1}{2}}$ — функции Бесселя, $\epsilon_i^{(n)}$ — их корни, $P_n^{(m)}$ — присоединенные функции Лежандра, φ — азимутальная координата сферической системы.

Подставив (3.1) и (3.2) в первое уравнение (2.4), обычным образом найдем при помощи (3.4)

$$\begin{aligned} V_x^{(1)} &= \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t) r^{-1/2} J_{2+\frac{1}{2}}(\epsilon_i^{(2)} r) P_2^{(1)}(\mu) \cos \varphi \\ V_y^{(1)} &= \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t) r^{-1/2} J_{2+\frac{1}{2}}(\epsilon_i^{(2)} r) P_{(2)}^{(1)}(\mu) \sin \varphi \\ V_z^{(1)} &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t) r^{-1/2} J_{2+\frac{1}{2}}(\epsilon_i^{(2)} r) P_2(\mu) + \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) r^{-1/2} J_{1/2}(\epsilon_i^{(0)} r) \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$F_i \equiv - \exp [- (\varepsilon_i^{(2)})^2 t] \int_0^t G_i(t) \exp (\varepsilon_i^{(2)})^2 t dt,$$

$$G_i = \frac{2}{[J'_{2+1/2}(\varepsilon_i^{(2)})]^2} \int_0^1 r^{3/2} H(r, t) J_{2+1/2}(\varepsilon_i^{(2)} r) dr, \quad H \equiv \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial r} h - \frac{1}{r} h \right),$$

$$h \equiv - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(k\pi)^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{\sin k\pi r}{r} \right) \exp \frac{-k^2\pi^2 t}{\sigma} \quad (3.6)$$

а коэффициенты $K_i(t)$ и функция $s(t)$ определяются системой

$$\frac{d}{dt} K_i + (\varepsilon_i^{(0)})^2 K_i = N_i s + M_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i K_i = -W \quad (3.7)$$

при нулевых начальных условиях [второе уравнение (3.7) получено из (2.9)], причем

$$M_i \equiv \frac{4}{3\vartheta} \int_0^1 r^{3/2} \theta^{(0)}(r, t) J_{1/2}(\varepsilon_i^{(0)} r) dr, \quad N_i \equiv \frac{2}{\vartheta} \int_0^1 r^{3/2} J_{1/2}(\varepsilon_i^{(0)} r) dr$$

$$\vartheta = (J'_{1/2}(\varepsilon_i^{(0)}))^2 \quad (3.8)$$

$$\alpha_i \equiv -\varepsilon_i^{(0)} J_{1+1/2}(\varepsilon_i^{(0)}), \quad \delta_i \equiv -2\varepsilon_i^{(2)} J_{3+1/2}(\varepsilon_i^{(2)}), \quad W \equiv \sum_i \delta_i F_i \quad (3.9)$$

Аналогичным образом получаем решение третьего уравнения (2.4):

$$\theta^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t) r^{-1/2} J_{1+1/2}(\varepsilon_j^{(1)} r) \cos \psi \quad (3.10)$$

где

$$B_j \equiv - \exp [- (\varepsilon_j^{(1)})^2 t] \int_0^t Q_j(t) \exp [(\varepsilon_j^{(1)})^2 t] dt$$

$$Q_j \equiv \frac{2}{[J'_{1+1/2}(\varepsilon_j^{(1)})]^2} \int_0^1 r^{3/2} (2F(r, t) + K(r, t)) J_{1+1/2}(\varepsilon_j^{(1)} r) dr \quad (3.11)$$

$$F \equiv \sum_{i=1}^{\infty} F_i r^{-1/2} J_{2+1/2}(\varepsilon_i^{(2)} r), \quad K \equiv \sum_{i=1}^{\infty} K_i r^{-1/2} J_{1/2}(\varepsilon_i^{(0)} r)$$

Что касается системы уравнений (3.7) для коэффициентов K_i и функции $s(t)$, то нами было найдено решение соответствующей ей усеченной системы $i = 1, 2, 3$, которого мы, однако, здесь не приводим из-за его громоздкости.

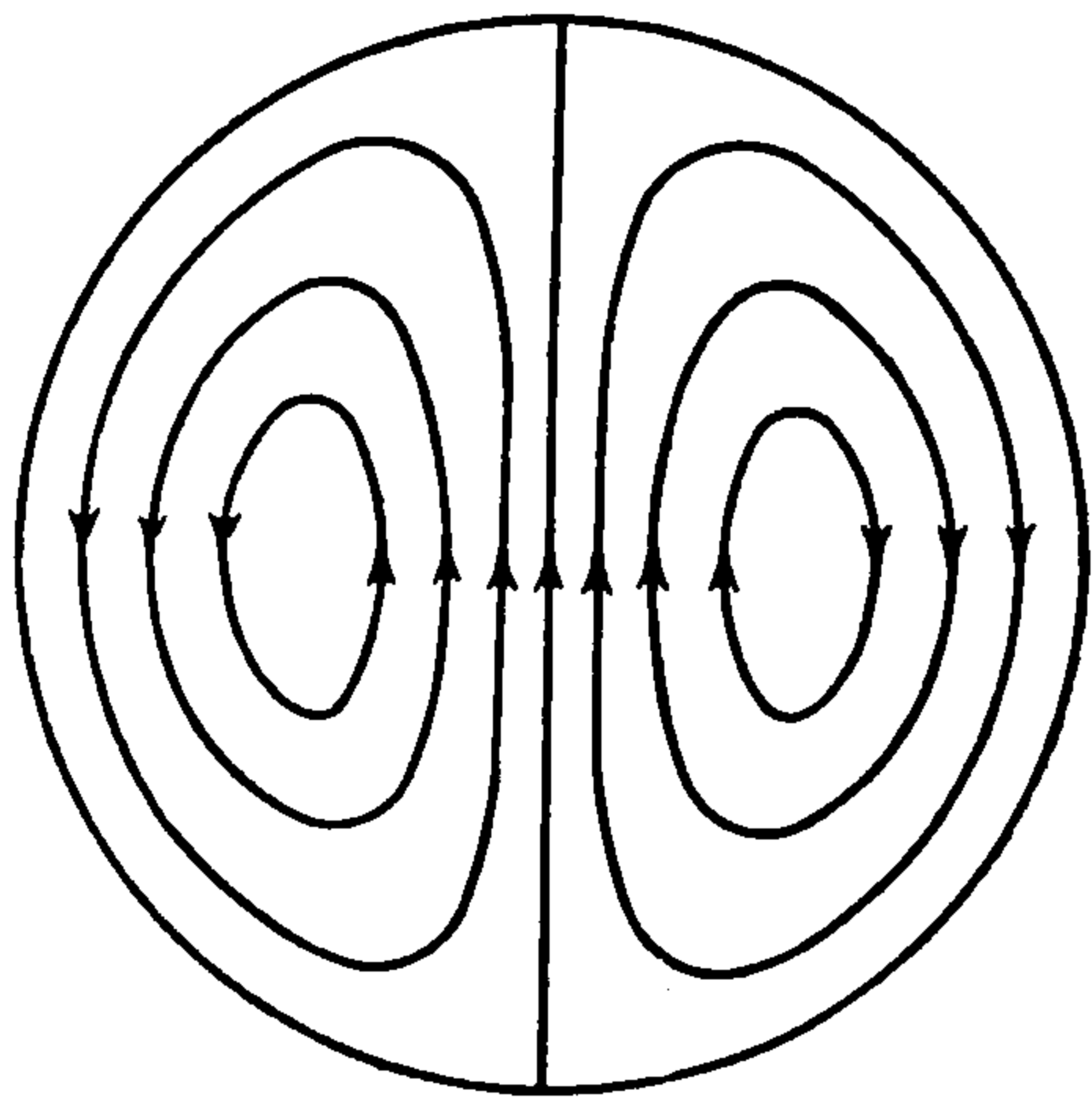
3. Отметим некоторые особенности конвекции, о которых можно заключить по полученному нами приближенному решению задачи.

Напишем уравнение линий тока в сферических координатах, получается

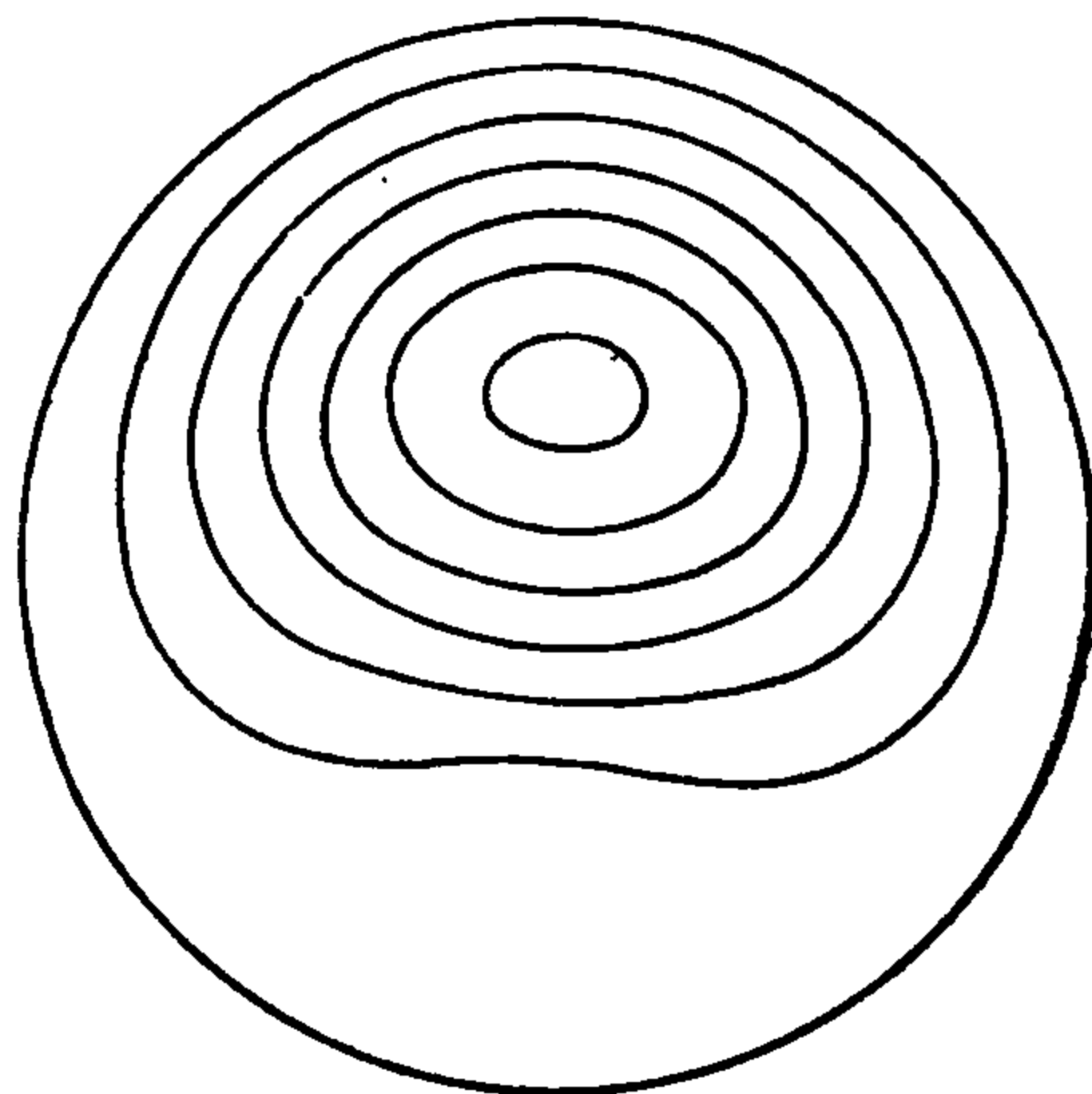
$$\varphi = c_1, \quad \sin \psi = c_2 e^{f(r, t)} \quad \left(\begin{array}{l} c_1 = \text{const} \\ c_2 = \text{const} \end{array} \right), \quad f \equiv \int \frac{u_1}{u_2} dr, \quad \begin{array}{l} u_1 \equiv F - K \\ u_2 \equiv 2F + K \end{array} \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что движение жидкости происходит в вертикальных плоскостях (r, ψ) , проходящих через центр шара, и имеет в этих плоскостях одинаковый характер, причем движение это осесимметрично: более нагретая жидкость поднимается в средней части шара и опускается, охлаждаясь, у стенок (в случае $T_0 < T_1$ было бы наоборот). Для значений параметров $\sigma = 6.75$ (вода при 20°C), $G = 300$ и для безразмерного времени $t = 1$ на фиг. 1 изображены линии тока, вычисленные по формулам (3.5), причем были взяты три коэффициента K_i .

Распределение температуры жидкости соответствует характеру ее движения. На фиг. 2 для указанных выше значений σ , G и времени изображено сечение плоскостью $\varphi = \text{const}$ семейства изотермических поверхностей с шагом 0.1; вычисления сделаны по формулам (3.1) и (3.10) с тремя членами в сумме из (3.1) и с тремя коэффициентами K_i . В направлении от центра шара температура падает. Верхняя часть полости имеет в среднем более высокую температуру, чем нижняя. Область наименее остывшей жидкости смещается из середины полости (где она была бы при чисто молекулярной теплопроводности) вверх примерно на треть радиуса.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для оценки влияния конвекции в рассматриваемом приближении на быстроту остывания жидкости в целом рассмотрим интеграл от конвективной части температуры θ по объему V полости

$$\int \theta dV = \int \theta^{(0)} dV + G \int \theta^{(1)} dV + \dots \quad (3.13)$$

который при не очень больших θ (слабая конвекция) можно с достаточной точностью считать пропорциональным избытку внутренней энергии жидкости над ее значением, соответствующим полному остыванию жидкости до температуры стенок T_1 . Подставив сюда выражение $\theta^{(1)}$ из (3.10), найдем, что второй интеграл справа обращается в нуль. Это значит, что в рассматриваемом приближении энергия жидкости такова же, какой она была бы у твердого тела с теми же тепловыми свойствами, при тех же краевых условиях (при этом кинетическая энергия жидкости не учитывается, так как ее величина второго порядка относительно G). Таким образом, в рассматриваемом приближении конвекция не влияет на быстроту остывания жидкости в целом. Этому приближению соответствует такое перераспределение температуры жидкости, что жидкость в верхней части полости нагревается за счет охлаждения ее в нижней части. Увеличение быстроты остывания жидкости в целом, связанное с наличием конвекции, должно обнаружиться в следующих приближениях.

Автор пользуется случаем выразить благодарность И. Г. Шапошникову за предоставление темы.

Поступила 29 XI 1957

Пермский горный институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Б а е в В. К. Нестационарные конвективные течения. Труды Центрального института прогнозов, 43 (70), 1956.
2. Л и н е й к и н П. С. Гидродинамическая теория муссонов над круглым островом. Известия АН СССР, серия геофизическая, т. XI, вып. 2, 1947.
3. С р е т е н с к и й Л. Н. О переносе тепла жидкостями. Журнал геофизики, т. III, вып. 1, 1933.
4. С е в р у к И. Г. О нестационарной тепловой конвекции в шаровом слое ПММ, т. XXII, № 3, 1958.
5. Ш а п о ш н и к о в И. Г. К теории слабой конвекции. ЖТФ, т. XXII, вып. 5 1952.
6. Л ы к о в Л. В. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, 1952.
7. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. ГИТТЛ, 1951.