

УДАР РЕШЕТКИ ПЛАСТИН ПРИ СИММЕТРИЧНОМ КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ

С. И. Пархомовский
(Николаев)

Установившееся симметричное кавитационное обтекание пластинки в потоке идеальной жидкости по схеме Д. А. Эффроса [1] изучено М. И. Гуревичем [2]. Отметим, что это течение можно рассматривать и как кавитационное обтекание решетки пластин с густотой l/L .

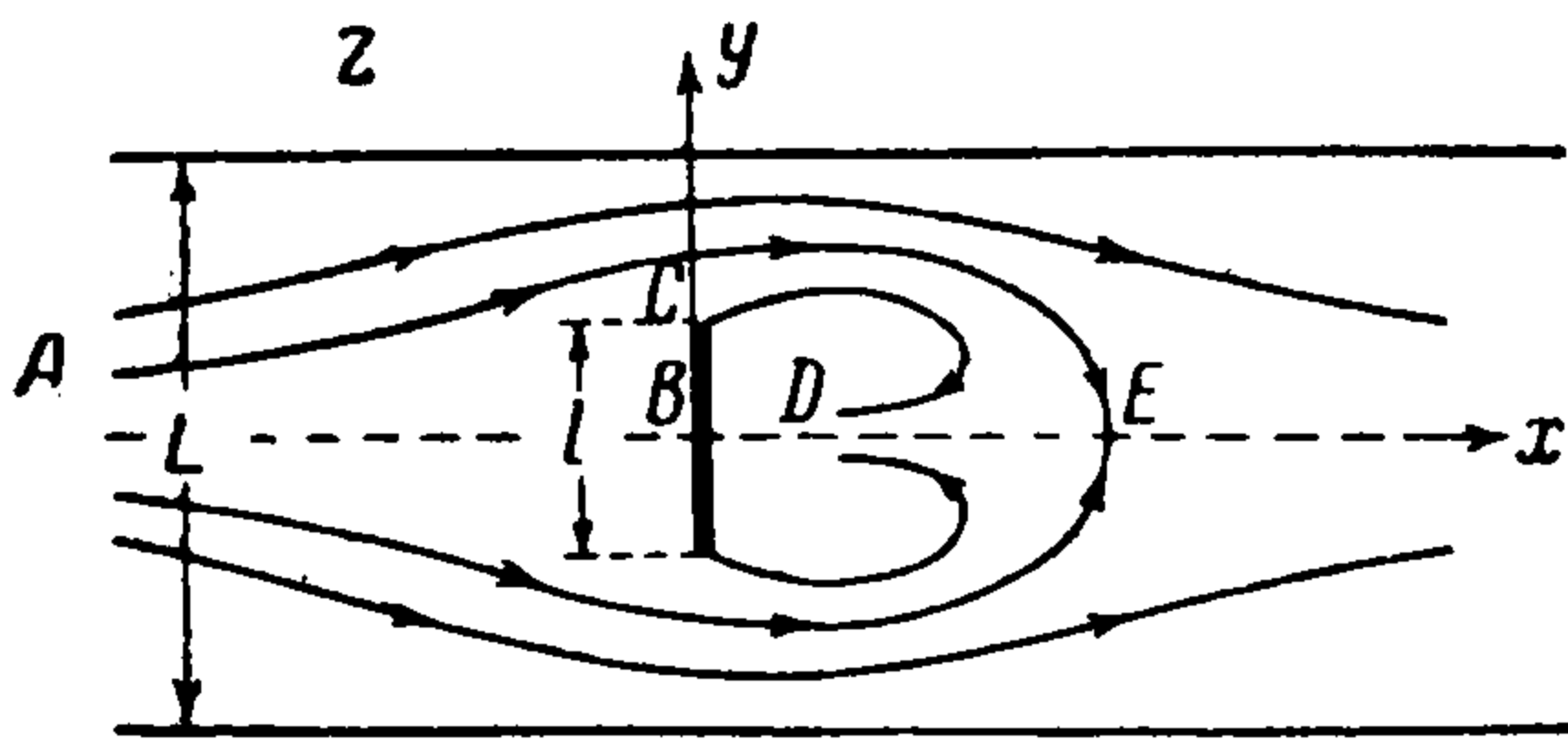
§ 1. **Граничная задача.** Рассмотрим пластину, помещенную в поток идеальной жидкости, который ограничен параллельными стенками (фиг. 1). Пусть пластина внезапно приобрела поступательную скорость v_1 навстречу потоку (нормальный удар). Возникающее ударное течение имеет потенциал скоростей φ , связанный с импульсивным давлением p и плотностью жидкости ρ соотношением.

$$p = -\rho\varphi \tag{1.1}$$

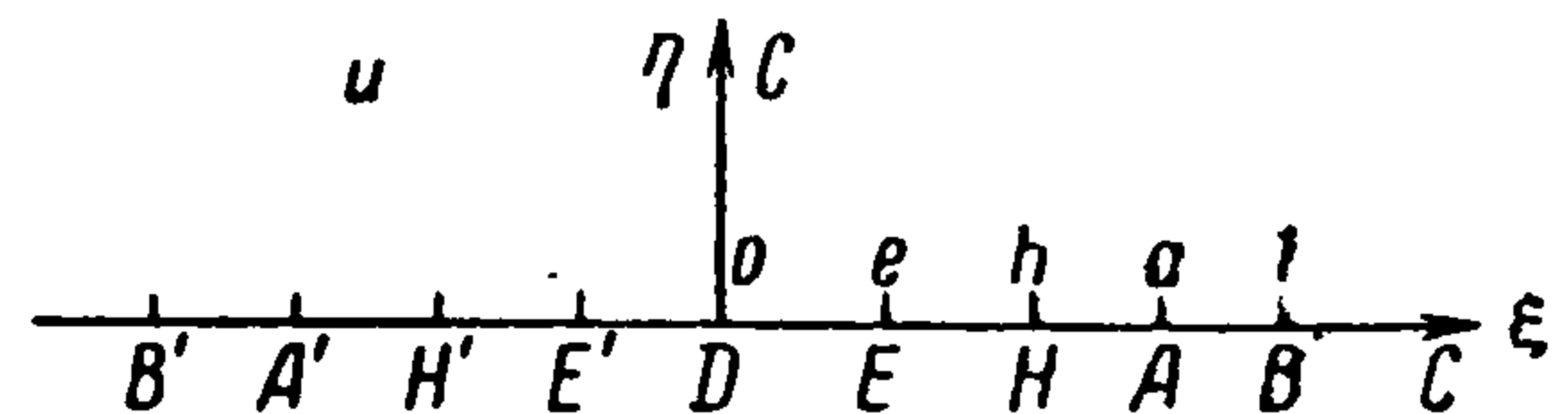
Рассмотрим комплексный потенциал ударного течения $w = \varphi + i\psi$. Гармонические функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ в плоскости течения z должны удовлетворять следующим граничным условиям.

1. На свободных поверхностях $p = 0$, следовательно, $\varphi = 0$.
2. На пластинке известна нормальная скорость $\partial\varphi/\partial n = v_1$.
3. Ось x и стенки являются линиями тока $\psi = \text{const}$.

Кроме того, из физических представлений вытекает, что комплексно сопряженная скорость dw/dz должна быть конечной величиной в бесконечно удаленных точках потока, обращаться в бесконечность на кромках пластины и стремиться к нулю на струйке D .



Фиг. 1



Фиг. 2

Отобразим конформно область течения между стенкой и осью x на верхний правый квадрант (фиг. 2) плоскости параметрического переменного $u = \xi + i\eta$. Соответственные точки на фиг. 1 и 2 обозначены одинаковыми буквами. Отображение определяется согласно работе [2]:

$$\frac{dz}{du} = \frac{N(u+e)^2}{v_0 u (u^2 - a^2)(u^2 - h^2)} \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \tag{1.2}$$

где N — вещественный коэффициент, v_0 — модуль скорости установившегося кавитационного течения на свободной поверхности, e — параметр, выражающийся через основные параметры a, h соотношением

$$e = \frac{ah(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\chi})}{h\sqrt{\chi} - a\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, \quad \chi = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \tag{1.3}$$

Граничные условия, выраженные посредством функции dw/du на плоскости u , примут соответственно вид;

$$\text{Im} \frac{dw}{du} = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi = 0, 0 < \eta < \infty \\ v_1 |dz/du| & \text{при } \eta = 0, 1 < \xi < \infty \\ 0 & \text{при } \eta = 0, 0 < \xi < 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Первое условие (1.4) позволяет продолжить dw/du по принципу симметрии во второй квадрант верхней полуплоскости u , после чего аналитическая функция dw/du в верхней полуплоскости u имеет известные предельные значения мнимой части:

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{du} = \begin{cases} v_1 |dz/du| & \text{при } \eta = 0, \quad 1 < \xi < \infty \\ -v_1 |dz/du| & \text{при } \eta = 0, \quad -\infty < \xi < -1 \\ 0 & \text{при } \eta = 0, \quad -1 < \xi < 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

$$(1.7)$$

и определяется при помощи интеграла Шварца и соотношений (1.5), (1.6), (1.7):

$$\frac{dw}{du} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{dw}{du} \frac{d\xi}{\xi - u} = \frac{2v_1 |N|}{\pi v_0} \int_1^{\infty} \frac{(e + \xi)^2 \sqrt{(\xi + 1)/(\xi - 1)}}{(\xi^2 - a^2)(\xi^2 - h^2)(\xi^2 - u^2)}$$

Выполнив интегрирование, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dw}{du} = & \frac{2v_1 |N|}{\pi v_0 (u^2 - a^2)(u^2 - h^2)} \left[[(u^2 - a^2)K_1 + (u^2 - h^2)K_2 - \right. \\ & \left. - \frac{e^2 + u^2(1 + 2e)}{u \sqrt{u^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{(u+1)/(u-1)} + 1}{\sqrt{(u+1)/(u-1)} - 1} + i \frac{\pi(e+u)^2}{2u} \sqrt{\frac{u+1}{u-1}} \right] \\ K_1 = & \frac{1}{\chi h (a^2 - h^2)} \left[\frac{\pi}{2} (e + h)^2 - 2 \frac{e^2 + h^2(1 + 2e)}{1 + h} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \chi \right] \\ K_2 = & \frac{1}{\alpha a (h^2 - a^2)} \left[\frac{\pi}{2} (e + a)^2 - 2 \frac{e^2 + a^2(1 + 2e)}{1 + a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Полученное выражение dw/du удовлетворяет всем граничным условиям, а для dw/dz выполняются указанные выше требования физического характера.

§ 2. Определение импульса сил. Пусть J_x — суммарный импульс сил, действовавших со стороны жидкости на пластину. Согласно фиг. 1 и соотношению (1.1) имеем

$$J_x = -2i \int_{BC} p dz = 2i\rho \int_{BC} \varphi dz$$

Перейдем к параметрической плоскости u . Интегрируя по частям и учитывая, что на концах пластины $\varphi = 0$, получим

$$J_x = -2i\rho \int_1^{\infty} z \frac{d\varphi}{du} du = -2i\rho \int_1^{\infty} z(u) \operatorname{Re} \frac{dw}{du} du \quad (2.1)$$

где $\operatorname{Re}(dw/du)$ определяется по (1.8). Остается найти $z(u)$.

Интегрируя (1.2) и используя соответствие точек B плоскостей z и u , получим

$$\begin{aligned} z(u) = & -i \frac{N}{v_0} \left[A \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + \frac{B_+}{\chi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \chi t + B_- \chi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\chi} + \right. \\ & \left. + \frac{C_+}{\alpha} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha t + C_- \alpha \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\alpha} - \frac{\pi}{2} (A + B_- \chi + C_- \alpha) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$t = \sqrt{\frac{u+1}{u-1}}, \quad A = \frac{2e^2}{a^2 h^2}, \quad B_{\pm} = -\frac{1}{a^2 - h^2} \left(1 \pm \frac{e}{h}\right)^2, \quad C_{\pm} = \frac{1}{a^2 - h^2} \left(1 \pm \frac{e}{a}\right)^2$$

Из соответствия точек C плоскостей z и u найдем

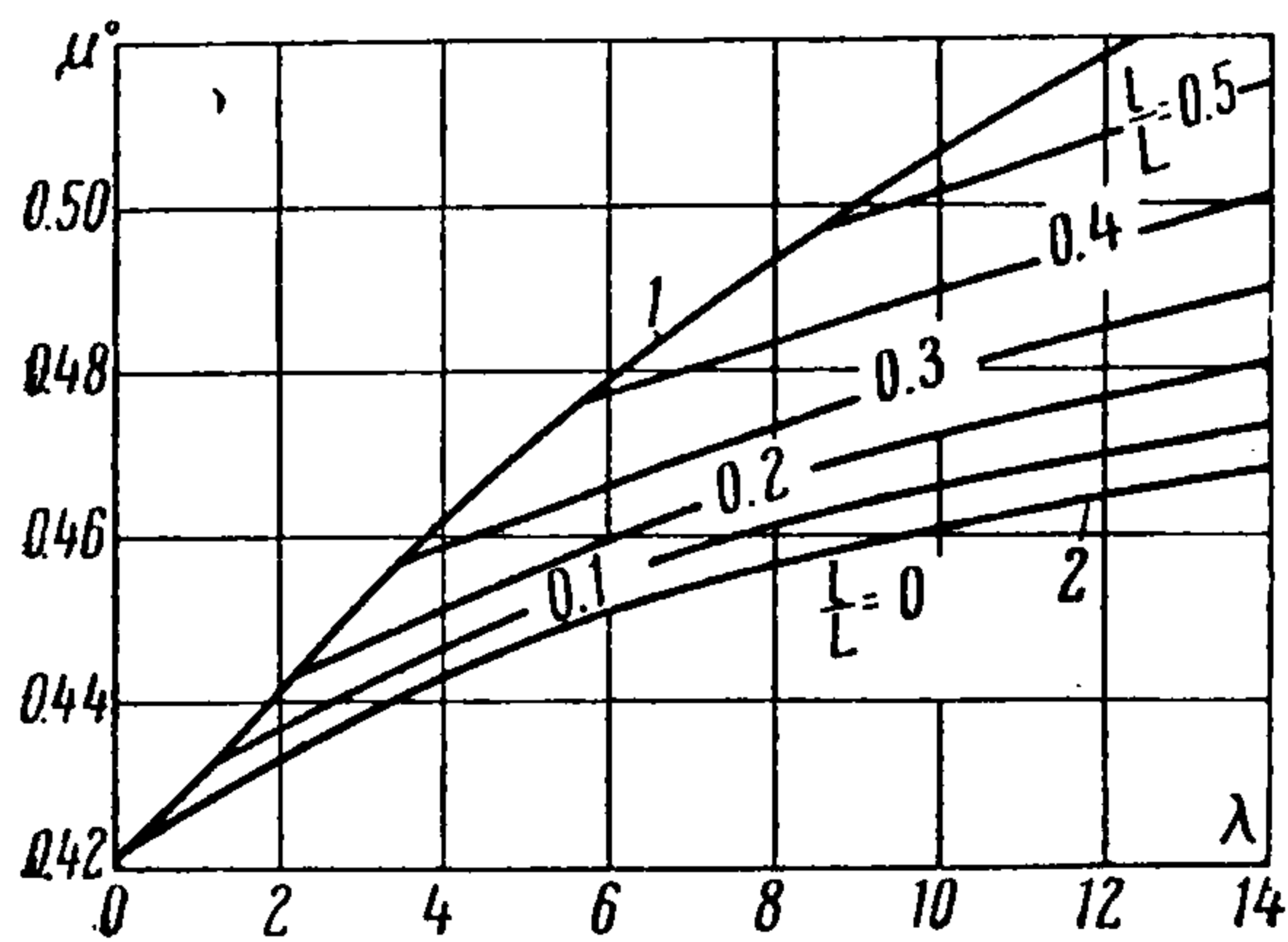
$$N = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} A + \left(B_- \chi - \frac{B_+}{\chi} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \chi + \left(C_- \alpha - \frac{C_+}{\alpha} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha \right]^{-1} v_0 l = N_0 v_0 l \quad (2.3)$$

где $N_0 = N/v_0 l$ — безразмерный коэффициент. Наконец, как и работе [2], густота решетки l/L и число кавитации λ определяются соотношениями

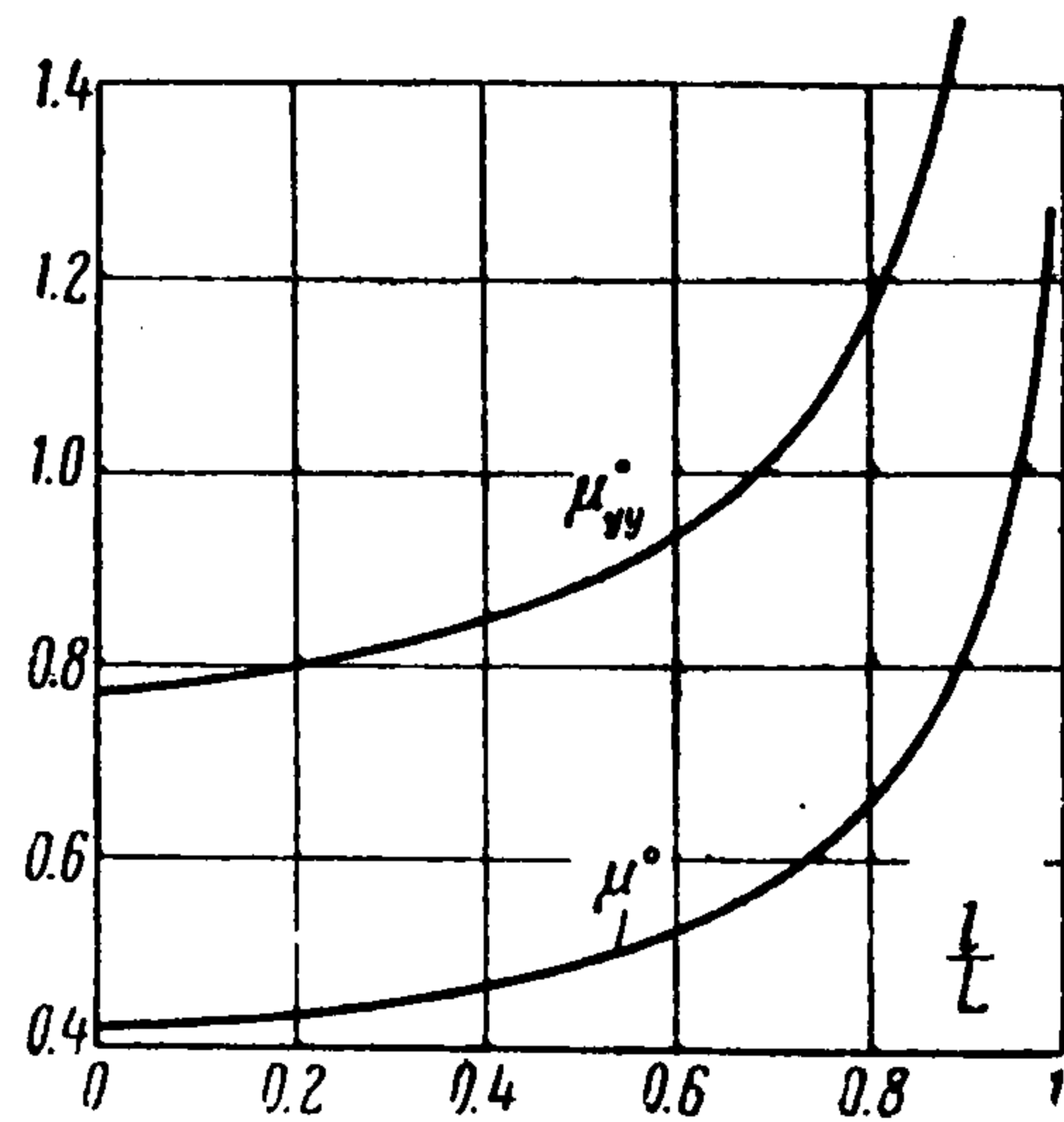
$$\frac{l}{L} = \frac{\alpha a^2 (a^2 - h^2)}{\pi (a + e)^2 N_0}, \quad \lambda = \frac{2a (a^2 + e^2 + 2e)}{(1 - a)(a - e)^2} \quad (2.4)$$

Выполнив замену переменной $u = \sec \theta$ в (2.1) и (1.8), (2.2), приведем J_x к виду, удобному для численного интегрирования. Вычисление безразмерного коэффициента присоединенной массы одной пластины решетки $\mu^\circ = J_x / \rho v_1 l^2$ велось для различных значений параметров a, h . Затем графики перестраивались по l/L и λ в соответствии с формулами (2.4) (2.3).

На фиг. 3 изображена зависимость μ° от λ для различных значений l/L . Кривая 1 соответствует решетке пластин с бесконечной кавитационной областью, кривая 2 — кавитационному обтеканию пластины в неограниченном потоке. Как видно, μ° возрастает с ростом λ при $l/L = \text{const}$. Влияние l/L на μ° становится все более значительным с ростом l/L . Рассмотрим два важных частных случая.



Фиг. 3



Фиг. 4

§ 3. Удар решетки пластин при обтекании с отрывом струй. При $h \rightarrow 0$ и $e \rightarrow 0$ основание струйки D удаляется на бесконечность, что соответствует обтеканию решетки пластин с отрывом струй. Выполнив указанные предельные переходы в (1.3), (1.8), (2.2), (2.3), (2.4), мы произвели расчеты μ° для различных значений независимого параметра a ($0 < a < 1$). Затем графики перестраивались по l/L (фиг. 4) и по λ (кривая 1 на фиг. 3). Для сравнения на фиг. 4 представлен график безразмерного коэффициента присоединенной массы μ_{yy}° решетки пластин при непрерывном обтекании, рассчитанный по формуле [3]

$$\mu_{yy}^\circ = \frac{\mu_{yy}}{\rho l^2} = - \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \ln \cos \frac{\pi}{2} \frac{l}{L}$$

Как видно из фиг. 4, существенный рост $\mu^\circ, \mu_{yy}^\circ$ наблюдается только при $l/L > 0.7$. Интересно отметить, что $\mu_{yy}^\circ / \mu^\circ \approx 2$ для всех значений l/L . Это объясняется тем, что при ударе пластины, обтекаемой с отрывом струй, возмущение жидкости в основном воспринимается только от передней ее части, при непрерывном же обтекании — от обеих обтекаемых частей пластины.

Рассмотрим редкую решетку ($a \rightarrow 0$). В этом случае

$$\frac{l}{L} \approx \frac{\pi + 4}{2\pi} a^2$$

Удерживая в $z(u)$ малые до четвертого и в $\text{Re}(dw/du)$ до третьего порядка относительно a , найдем приближенную формулу для μ° с точностью до a^2 :

$$\mu^\circ \approx \frac{1}{\pi(\pi + 4)^2} \int_0^{1/2\pi} [A_1 A_2 + a^2(4A_1 B_2 + \frac{1}{2} A_1 A_2 + 4A_2 B_1)] d\theta = 0.4224 + 0.8697a^2$$

$$A_1 = 2\theta + 4\sin \theta + \sin 2\theta, \quad A_2 = (2\pi + 4) \sin \theta + 4 \cos^2 \theta \ln \text{ctg} \frac{\pi - 2\theta}{4}$$

$$B_2 = \frac{3\pi + 8}{12} \sin \theta + \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \sin \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \ln \text{ctg} \frac{\pi - 2\theta}{4}$$

$$B_1 = \frac{3}{8} \theta + \frac{5 + \cos 2\theta}{6} \sin \theta + \frac{4 + \cos 2\theta}{16} \sin 2\theta \quad (3.1)$$

Эта формула пригодна для $0 < l/L < 0.001$. При $a \rightarrow 0$ получаем струйное обтекание пластины в неограниченном потоке, для которой (3.1) дает известное ^[4] значение $\mu^\circ = 0.4224$.

§ 4. Удар пластины в неограниченном потоке при кавитационном обтекании. При $h \rightarrow a$ стенки, ограничивающие кавитационный поток, удаляются на бесконечность. В этом случае (1.3) и система неравенств $0 < e < e < 1$ позволяют определить границы изменения независимого параметра $0 < a < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Выполнив предельный переход $h \rightarrow a$ в основных формулах, мы вычислили μ° для различных значений a . Затем график перестраивался по λ (кривая 2 на фиг. 3). Как видно, при $\lambda > 8$ имеем уже незначительное возрастание μ° . Отметим, что для весьма малой кавитационной области $\lambda \rightarrow \infty$ и μ° должно приближаться к известному ^[3] значению коэффициента присоединенной массы $\frac{1}{4}\pi$ при непрерывном обтекании пластины. Рассмотрим развитое кавитационное течение ($a \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$). Действуя как в § 4, определим приближенную формулу

$$\mu^\circ \approx 0.4224 - 0.0378 a^2$$

которая верна для $0 < \lambda < 0.1$. При $a \rightarrow 0$ получим известное ^[4] значение $\mu^\circ = 0.4224$ для пластины при обтекании с отрывом струй.

Поступила 27 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Э ф р о с Д. А. Гидродинамическая теория плоско-параллельного кавитационного течения. ДАН СССР, т. LI, No 4, 1946.
2. Г у р е в и ч М. И. Симметричное кавитационное обтекание плоской пластинки, помещенной между параллельными стенками. Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1946.
3. С е д о в Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
4. Г у р е в и ч М. И. Удар пластины при обтекании с отрывом струй. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

С. П. Пустовойт

(Пермь)

Сравнительно небольшое число опубликованных работ по нестационарной тепловой конвекции относится к частично открытым областям, например ^[1, 2, 3], только в одной из них ^[4] рассматривается случай сферического слоя. Ниже приводится приближенное решение одной задачи о слабой нестационарной тепловой конвекции в сферической полости. Предложенная при этом схема решения задач о слабой конвекции в замкнутых полостях несколько отличается от той, которая обычно использовалась ранее (см., например, ^[1, 3, 4]).

§ 1. Постановка задачи. 1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ покоящаяся жидкость температуры T_0 заполняет сферическую полость радиуса R , стенки которой все время поддерживаются при температуре T_1 , отличной от начальной температуры жидкости, причем пусть для определенности $T_0 > T_1$. Такая задача может, например, соответствовать схематизации (правда, довольно грубой) остывания жидкости в сферическом сосуде, который омывается извне охлаждающим его потоком.

2. Начало декартовых координат X, Y, Z поместим в центр шара, ось Z направим вертикально вверх. Введем безразмерные координаты и время:

$$X = \frac{X}{R}, \quad Y = \frac{Y}{R}, \quad Z = \frac{Z}{R}, \quad t = \frac{\nu}{R^2} t^* \quad (1.1)$$