РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАЗРЫВОВ В ЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ

К. Е. Губкин

(Москва)

В работе дается решение уравнений газовой динамики, описывающее распространение волн малой амплитуды. Ширина возмущенной области (длина в направлении движения фронта волны, на которой существенно меняются величины, характеризующие возмущенное движение) предполагается малой по сравнению с характерными размерами задачи. Нелинейный характер движения, существенно проявляющийся, когда волна проходит расстояния, значительно превышающие ширину возмущенной области, приводит к изменению профиля волны и образованию в ней разрывов. Учет нелинейных факторов приводит к дополнительному по сравнению с акустикой [1, 2] затуханию ударного фронта. В случае распространения сферических (или цилиндрических) волн в однородной неподвижной среде полученное решение согласуется с результатами, полученными ранее в работах Л. Д. Ландау [3], С. А. Христиановича [4], Г. Б. Уитема [5].

1. Характеристики. Исходная система уравнений движения сжимаемого газа имеет вид: (1.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_k = 0, \quad \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + v_k\frac{\partial p}{\partial x_k} - c^2\frac{\partial \rho}{\partial t} - c^2 v_k\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0$$

где v_i, ρ, p, c означают соответственно скорость газа, плотность, давление и скорость звука в точке с декартовыми координатами x_i в момент времени t, g_i — ускорение силы тяжести; индексы i, k пробегают значения 1, 2, 3. Давление, плотность и скорость звука связаны между собой уравнением состояния $\gamma p = \rho c^2$, где γ — постоянная величина, равная отношению удельных теплоемкостей газа.

Рассмотрим характеристики системы (1.1). Уравнение, определяющее характеристические поверхности $\varphi(x_i, t) = \text{const}$, имеет вид:

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)^2\right]\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)^3 = 0 \tag{1.2}$$

Равенство нулю первой скобки (1.2) дает уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \pm c\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)^2} = 0 \tag{1.3}$$

которое определяет два (в соответствии со знаком перед корнем) семейства характеристик C_+ и C_-. Если в уравнении $\varphi(x_i, t) = \text{const}$ рассматривать t как параметр, то вместо неподвижных в пространстве (x_i, t) характеристических поверхностей C_+ и C_- будем иметь движущиеся поверхности N_+ и N_- в пространстве (x_i). Скорость распространения этих поверхностей согласно уравнению (1.3) равна $vi \pm cn_i$, где n_i — нормаль к соответствующей поверхности N_+ или N_-:

$$n_i = \frac{\partial \varphi / \partial x_i}{\sqrt{(\partial \varphi / \partial x_k)^2}}$$

Равенство нулю второй скобки (1.2) дает уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \tag{1.4}$$

которое определяет семейство характеристических поверхностей C_0, образуемых траекториями частиц. Соответствующие характеристикам C_0, движущиеся в пространстве (x_i) поверхности S представляют собой жидкие поверхности, передвигающиеся вместе с частицами газа.

Обозначим производные вдоль характеристической поверхности скобками согласно определению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi / \partial x_i}{\partial \varphi / \partial t}\frac{\partial}{\partial t}$$

В результате приведения системы (1.1) к характеристикам получим уравнения, содержащие производные от искомых функций только вдоль соответствующих характеристических поверхностей. Вдоль характеристик C_+ и C_-

$$(v_k \pm cn_k)\left(\frac{\partial p}{\partial x_k}\right) \pm \rho c\,(n_i v_k \pm c\delta_{ik})\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \pm\, \rho c n_k g_k \qquad (1.5)$$

Верхний знак в (1.5) относится к C_+, а нижний к C_--характеристикам; $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Вдоль C_0-характеристик

$$\rho s_i v_k\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + s_i\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = \rho g_i s_i, \qquad v_k\left(\frac{\partial p}{\partial x_k}\right) - c^2 v_k\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k}\right) = 0 \qquad (1.6)$$

Вектор s_i в (1.6) удовлетворяет условию $s_i\, \partial\varphi / \partial x_i = 0$ (т. е. направление s_i лежит в плоскости, касательной к жидкой поверхности S). Поскольку на поверхности S имеются два независимых вектора, удовлетворяющих этому условию, первое уравнение (1.6) представляет собой два независимых уравнения.

Таким образом, вдоль C_0-характеристик имеем три соотношения в соответствии с тем, что для гиперболической системы уравнений (1.1) поверхности, образуемые траекториями частиц, являются тремя совпадающими семействами характеристик.

2. Геометрическая акустика. Распространение разрывов малой амплитуды. Определим решение характеристической системы уравнений, которое соответствует распространению волн малой амплитуды с малой шириной возмущенной области.

Пусть в невозмущенном состоянии давление p_0, плотность ρ_0 и скорость движения газа U_i не меняются со временем и заданы как функции координат. Будем считать возмущенные давление $\Delta = p - p_0$, плотность $\delta = \rho - \rho_0$ и скорость $u_i = v_i - U_i$ малыми величинами первого порядка по сравнению с невозмущенными давлением p_0, плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0. Ширину возмущенной области λ будем считать малой по сравнению с радиусом R кривизны фронта волны и по сравнению с характерной длиной H, на которой существенно меняется среда. В этом случае можно пренебречь членами порядка Δ^2, $\lambda\Delta / R$, $\lambda\Delta / H$ по сравнению с Δ. Кроме того, будем предполагать, что в направлениях, касательных фронту волны, функции Δ, δ, u_i меняются на величину порядка самих этих величин на расстояниях, значительно бо́льших, чем ширина возмущенной области (т. е. на расстояниях порядка R, H).

Рассмотрим расходящуюся волну, ограниченную с внешней стороны поверхностью фронта N. Определим C_+-характеристики так, чтобы в начальный момент времени $t = 0$ они проходили через семейство равноотстоящих от фронта волны поверхностей (N_+ при $t = 0$). Характеристики C_- и C_0 определяем так, чтобы в соответствующий каждой характеристике момент времени они проходили через поверхность фронта волны. При таком выборе характеристик углы между нормалями к движущимся поверхностям N_+, N_-, S, N внутри возмущенной области размерами порядка λ не будут превышать величин порядка λ / R, λ / H.

Запишем уравнения (1.6), на C_0-характеристиках в виде

$$\frac{d}{dt}(u_k s_k) = u_k \frac{ds_k}{dt} - \frac{s_k}{\rho}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_k}\right) - s_i u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\delta}{\rho\rho_0} s_k \frac{\partial p_0}{\partial x_k}$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta - c^2\delta) = (c^2 - c_0^2)\, U_k \frac{\partial \rho_0}{\partial x_k} - u_k\left(\frac{\partial p_0}{\partial x_k} - c^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_k}\right) - \delta \frac{dc^2}{dt}$$

Здесь $d/dt = v_k(\partial/\partial x_k)$ означает производную вдоль траектории частицы.

Интегрируя эти уравнения по времени вдоль траектории частицы и учитывая, что время пребывания частицы в возмущенной области $\sim \lambda / c_0$, получим

$$s_k u_k = O(\lambda\Delta / R) + O(\lambda\Delta / H) \qquad (2.1)$$

$$\Delta - c_0^2\delta = O(\lambda\Delta / R) + O(\lambda\Delta / H) + O(\Delta^2) \qquad (2.2)$$

Первое из полученных равенств эквивалентно:

$$u_i - u n_i = O_i(\lambda\Delta / R) + O_i(\lambda\Delta / H) \qquad \left(u = \sqrt{u^2_k}\right)$$

Уравнение на C_--характеристиках можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\Delta - \rho c u) = \rho c n_i u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \gamma \Delta \frac{\partial U_k}{\partial x_k} - \rho c^2 u \frac{\partial n_k}{\partial x_k} -$$

$$-\left(u_k + \frac{c\delta}{\rho_0} n_k\right)\frac{\partial p_0}{\partial x_k} + \rho c (n_i v_k - c\delta_{ik})\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(u_i - u n_i) - u\frac{d\rho c}{dt}$$

Здесь $d/dt = (v_k - cn_k)(\partial/\partial x_k)$ означает производную вдоль траектории элемента поверхности N_-.

Поскольку поверхность N_- находится в возмущенной области в течение времени $\sim \lambda / c_0$, интегрирование этого уравнения по t дает

$$\Delta - \rho_0 c_0 u = O(\lambda\Delta / R) + O(\lambda\Delta / H) + O(\Delta^2) \tag{2.3}$$

Отметим, что равенства (2.1), (2.2) и (3.3) совпадают с соотношениями на ударном фронте, если пренебречь малыми членами порядка $\lambda\Delta / R$, $\lambda\Delta / H$, Δ^2, поэтому ударный фронт не влияет с указанной точностью на течение позади него.

Обратимся к уравнению на C_+-характеристиках (1.5), которое запишем в виде

$$2\frac{d\Delta}{dt} - \frac{\Delta}{\rho c}\frac{d\rho c}{dt} + \Delta\left(c\frac{\partial n_k}{\partial x_k} + \gamma\frac{\partial U_k}{\partial x_k} + n_i n_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \rho c (n_i v_k + c\delta_{ik})\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\Delta}{\rho c} n_i - u_i\right) + \left(\frac{c\delta}{\rho} n_k - u_k\right)\frac{\partial p_0}{\partial x_k} + n_i(\Delta n_k - \rho c u_k)\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

Здесь $d/dt = (v_k + cn_k)(\partial/\partial x_k)$ означает производную вдоль луча — траектории движения элемента поверхности N_+. Интегрируя это уравнение вдоль луча и пренебрегая малыми порядка $\lambda\Delta / R$, $\lambda\Delta / H$, Δ^2 по сравнению с Δ, приходим к результату:

$$\Delta = \alpha\frac{\sqrt{\rho_0 c_0}}{L}, \qquad L = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \left(c_0\frac{\partial n_k}{\partial x_k} + \gamma\frac{\partial U_k}{\partial x_k} + n_i n_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)dt\right] \tag{2.4}$$

Величина α (на данном луче) зависит от номера поверхности N_+. Если длину луча обозначить через l, то скорость движения поверхности N_+ есть dl / dt, поэтому уравнение C_+-характеристик (1.3) можно записать вдоль луча в виде

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(v_k + cn_k)^2} =$$

$$= \sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2} + \frac{n_k U_k + c_0}{\sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2}}\frac{\gamma + 1}{2}\frac{\Delta}{\rho_0 c_0} + O\left(\Delta\frac{\lambda}{R}\right) + O\left(\Delta\frac{\lambda}{H}\right) + O(\Delta^2)$$

Подставляя в это уравнение вместо Δ его выражение из (2.4) и пренебрегая малыми по сравнению с Δ членами, получим в результате интегрирования решение

$$l - l_0 = \int_0^t \sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2}\,dt + \alpha\frac{\gamma + 1}{2}\int_0^t \frac{(n_k U_k + c_0)\,dt}{\sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2}\sqrt{\rho_0 c_0}\,L} + f(\alpha) \tag{2.5}$$

где $f(\alpha)$ — произвольная функция, которая определяется заданным в начальный момент времени распределением давления в волне, l_0 — положение фронта волны при $t = 0$. Первый член в правой части полученного решения (2.5) определяет перемещение волны как целого, второй же член определяет изменение со временем ее «профиля».

Запишем теперь уравнения самих лучей. В уравнении (1.3), определяющем движение N^+ поверхностей, можно пренебречь малыми по сравнению с невозмущенной скоростью звука c_0 членами и, таким образом, исходить при определении лучей из уравнения

$$\frac{d\varphi}{\partial t} + U_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2} = 0$$

Отсюда имеем уравнения лучей в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = U_i + c_0 n_i, \qquad \frac{dn_i}{dt} = (n_i n_k - \delta_{ik})\left(\frac{\partial c_0}{\partial x_k} + n_j\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)$$

Воспользуемся полученным решением (2.5) для определения закона изменения давления на фронте ударной волны. Вдоль пути движения фронта $l = l(t)$ выполняется соотношение

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2} + \frac{n_k U_k + c_0}{\sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2}} \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta}{\rho_0 c_0} \tag{2.6}$$

которое непосредственно следует из уравнения, связывающего давление на ударном фронте с его скоростью, если ограничиться членом первого порядка. Дифференцируя уравнение (2.5) по α вдоль пути фронта и подставляя вместо dl/dt ее выражение из (2.6), получим

$$\alpha \frac{n_k U_k + c_0}{\sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2} \sqrt{\rho_0 c_0 L}} \frac{dt}{d\alpha} + 2 \int_0^t \frac{(n_k U_k + c_0)\, dt}{\sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2} \sqrt{\rho_0 c_0 L}} + \frac{4}{\gamma + 1} f'(\alpha) = 0$$

Отсюда находим закон изменения α на фронте ударной волны вдоль луча:

$$\alpha^2 \int_{l_0}^{l} \frac{(n_k U_k + c_0)\, dl}{(U_k + c_0 n_k)^2 \sqrt{\rho_0 c_0 L}} = \frac{4}{\gamma + 1} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \alpha f'(\alpha)\, d\alpha \tag{2.7}$$

Если в начальный момент времени давление в волне непрерывно, то момент образования разрыва определяется из уравнения (2.5) так же, как в случае одномерного течения газа [6]. При $l \gg l_0$ возмущенная область в силу сохранения энергии должна содержать как зону с $\Delta > 0$, так и зону с $\Delta < 0$ (это замечание не относится к плоским волнам). Из уравнений (2.5) и (2.7) следует, что при $l \gg l_0$ профиль давления за фронтом волны близок к линейному независимо от профиля волны в начальный момент времени. Амплитуда волны с линейным профилем давления за фронтом меняется согласно (2.7) по закону

$$\Delta = \frac{\alpha_0 \sqrt{\rho_0 c_0}}{L} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\alpha_0}{\lambda_0} \int_{l_0}^{l} \frac{(n_k U_k + c_0)\, dl}{(U_k + c_0 n_k)^2 \sqrt{\rho_0 c_0 L}}\right)^{-1/2}$$

где λ_0 — ширина области $\Delta > 0$ при $t = 0$.

В однородной неподвижной среде поверхность фронта волны стремится к сферической при $R \to \infty$, а амплитуда волны убывает по закону $\Delta = B / R\sqrt{\ln R}$, где $B = \text{const}$ для данного луча. Величина B при этом может быть различной в разных направлениях, если начальные данные не обладают сферической симметрией. Это решение для однородной неподвижной среды является асимптотическим при $R \to \infty$ решением уравнений (1.1) для любого возмущения с конечной энергией, поскольку в этом случае ширина возмущенной области сравнивается лишь с радиусом кривизны фронта волны и $\lambda / R \to 0$ при $R \to \infty$.

Для неоднородной движущейся среды должно выполняться также условие

$$H \gg \lambda = \lambda_0 + \frac{\gamma + 1}{4} \int_0^t \frac{\Delta}{\rho_0 c_0} \frac{n_k U_k + c_0}{\sqrt{(U_k + c_0 n_k)^2}} dt$$

где интеграл берется вдоль пути фронта. Это условие ограничивает применимость полученного решения при $l \to \infty$.

Поступила 4 III 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J. B. Geometrical Acoustics. I. The Theory of Weak Shock Waves. Journal of Applied Physics, vol. 25, No. 8, 1954.
2. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1953.
3. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.
4. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, т. XX, вып. 5, 1956.
5. Whitham G. B. The propagation of spherical blast. Proceedings of the Royal Society, ser. A, vol. 203, No 1075, 1950.
6. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ. 1950.