

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. А. Тирский
(Москва)

Получено точное решение через эллиптические функции Вейерштрасса энергии для несжимаемой вязкой жидкости при числе Прандтля, равном σ , для случая известного [1] плоского установившегося течения между двумя непараллельными плоскими стенками. Переход в решении от функций Вейерштрасса к эллиптическим функциям Якоби [2] позволил представить полученное решение в виде графиков.

Заметим, что после того как эта работа в основном была закончена, автору стало известно, что это точное решение уже рассматривалось Миллсапом и Польгаузенем [3]. Однако в этой работе уравнение энергии интегрировалось численно.

§ 1 Постановка задачи. Известно [1], что уравнения Навье—Стокса, записанные в полярной системе координат r, θ , допускают точное решение в виде

$$v_r = \frac{rv_r}{2\nu} = -[3\wp(\theta - \theta_0, g_2, g_3) + 1], \quad v_\theta = 0 \quad (1.1)$$

$$p = -\frac{4\rho\nu^2}{r^2} \left[3\wp(\theta - \theta_0, g_2, g_3) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}g_2 \right] + \text{const}$$

где v_r — радиальная, v_θ — тангенциальная составляющие векторы скорости, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости, \wp — эллиптическая функция Вейерштрасса, g_2 и g_3 — инварианты функции \wp , θ_0 — произвольная постоянная, которая может быть и комплексным числом. Это решение может быть истолковано как плоское течение между двумя непараллельными стенками с углом раствора 2α . Тогда произвольные постоянные θ_0, g_2 и g_3 определяются из условия прилипания на стенках и из условия заданного расхода Q :

$$\wp(\pm\alpha - \theta_0, g_2, g_3) = -\frac{1}{3}, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} rv_r(\theta) d\theta = Q \quad (1.2)$$

Нетрудно теперь проверить, что уравнение энергии, записанное в полярной системе координат, допускает точное решение в виде

$$T = \frac{144A\sigma\nu^2}{C_v r^2} t(\theta) \quad (1.3)$$

где A — тепловой эквивалент механической работы, σ — число Прандтля, причем функция $t(\theta)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению Ламе

$$t''(u) = [12\sigma\wp(u) + 4\sigma - 4]t(u) - [\wp^3(u) + \wp^2(u) + l\wp(u) + m] \quad (1.4)$$

где

$$u = \theta - \theta_0, \quad l = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}g_2, \quad m = \frac{1}{9} - \frac{1}{4}g_3$$

Далее мы рассмотрим случай постоянной температуры стенок, тогда функция $t(u) = t(\theta - \theta_0)$ должна удовлетворять однородным краевым условиям

$$t(\alpha - \theta_0) = t(-\alpha - \theta_0) = 0 \quad (1.5)$$

Так как решение уравнения (1.4) зависит от функции $\wp(\theta - \theta_0, g_2, g_3)$, определяемой постоянными θ_0, g_2 и g_3 , то при исследовании свойств решения уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) будем опираться на свойства решения (1.1), полученные в работе [4].

§ 2. Решение для профиля температуры. В случае $\sigma = 1$ однородное уравнение Ламе примет вид:

$$t''(u) = 12\wp(u)t(u) \quad (2.1)$$

и два его частных решения, как следует из теории эллиптических

$$t_1(u) = \wp'(u)$$

$$t_2(u) = \wp'(u) \int \frac{du}{\wp'^2(u)} \equiv -\frac{\wp'(u)}{4} [a^2 \zeta(u + \omega_1) + b^2 \zeta(u + \omega_2) + c^2 \zeta(u + \omega_3) + (a^2 e_1 + b^2 e_2 + c^2 e_3)u] \quad (2.2)$$

где через $\zeta(u)$ обозначена функция Вейерштрасса, $2\omega_1$ и $2\omega_3$ — два примитивных периода функции $\wp(u)$:

$$-\omega_2 = \omega_1 + \omega_3, \quad e_i = \wp(\omega_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$a = \frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \quad b = \frac{1}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}, \quad c = \frac{1}{(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)} \quad (2.4)$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных и используя известные свойства функций Вейерштрасса $\wp(u)$ $\zeta(u)$ для вычисления неопределенных интегралов получим для частного решения неоднородного уравнения (1.4) следующее выражение

$$t_0(u) = \wp'(u) \left[\frac{1}{16} \zeta(u) + Bu + C\zeta(u + \omega_1) + D\zeta(u + \omega_2) + G\zeta(u + \omega_3) \right] \quad (2.5)$$

где

$$C = \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{1}{4} e_1^4 + \frac{1}{3} e_1^3 + \frac{1}{2} l e_1^2 + m e_1 \right), \quad D = \frac{1}{4} b^2 \left(\frac{1}{4} e_2^4 + \frac{1}{3} e_2^3 + \frac{1}{2} l e_2^2 + m e_2 \right)$$

$$G = \frac{1}{4} c^2 \left(\frac{1}{4} e_3^4 + \frac{1}{3} e_3^3 + \frac{1}{2} l e_3^2 + m e_3 \right), \quad B = C e_1 + D e_2 + G e_3 - \frac{1}{12} \quad (2.6)$$

Общее решение уравнения (1.4) будет тогда

$$t(\theta) = c_1 t_1(u) + c_2 t_2(u) + t_0(u) \quad (2.7)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, которые для искомого частного решения с постоянной температурой стенок должны находиться из условий (1.5).

Далее будем различать три случая соответственно случаям, когда дискриминант $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ кубического уравнения $4s^3 - g_2s - g_3 = 0$ меньше, больше и равен нулю.

1°. Случай $\Delta < 0$. Здесь имеем [4] $\theta_0 = \omega_2$ и решение для профиля скорости

$$v^\circ = - [3\wp(\theta - \omega_2) + 1] = - \left[3H \frac{1 - \operatorname{sn} \tau}{1 + \operatorname{sn} \tau} + 1 - 2H(2k^2 - 1) \right], \quad \tau = 2\theta \sqrt{H} \quad (2.8)$$

является единственным решением и дает симметричный относительно оси диффузора чисто расходящийся поток. Здесь решение (2.8) зависит от двух независимых параметров H и модуля функций Якоби k^2 . Физические параметры задачи — число Рейнольдса $N_{Re} = Q/2\nu$ и угол раствора диффузора 2α — определяются через параметры H и k^2 при помощи условий (1.2), и эта связь дается формулами (7.1), (7.3) или таблицами, приведенными в работе [4]. Если теперь в решении (2.7) для профиля температуры сделать замену $u = \theta - \omega_2$ и перейти от функций Вейерштрасса \wp и ζ к функциям Якоби sn , cn , dn и $Z\operatorname{sn}$, то решение для температуры, удовлетворяющее граничным условиям (1.5), получим в следующем виде:

$$t(\theta) = S(\theta) \left\{ \frac{1}{16} T(\theta) + B\theta + 2[MP(\theta) - NQ(\theta)] + DR(\theta) - \right. \\ \left. - c_1 [2(pP(\theta) - qQ(\theta)) + R(\theta) + \gamma\theta] \right\} \quad (2.9)$$

Здесь

$$P(\theta) = J(\theta) - V\sqrt{H} k^2 \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau}{\operatorname{dn} \tau}, \quad Q(\theta) = V\sqrt{H} k k' \frac{\operatorname{sn} \tau}{\operatorname{dn} \tau}$$

$$R(\theta) = J(\theta) + V\sqrt{H} \frac{\operatorname{dn} \tau (1 + \operatorname{cn} \tau)}{\operatorname{sn} \tau}, \quad T(\theta) = J(\theta) - V\sqrt{H} \frac{\operatorname{dn} \tau (1 - \operatorname{cn} \tau)}{\operatorname{sn} \tau}$$

$$S(\theta) = 4H^{3/2} \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{dn} \tau}{(1 + \operatorname{cn} \tau)^2}, \quad J(\theta) = H \left[2 \frac{E}{K} + \frac{2}{3} (2k^2 - 1) - 1 \right] \theta + V\sqrt{H} Z\operatorname{sn} \tau$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -(2k^2 - 1) H \left[1 + \frac{8k^2(1 - k^2) + 1}{24k^2(1 - k^2)} \right] \\ c_1 &= \frac{1/16 T(\alpha) + B\alpha + 2 [MP(\alpha) - NQ(\alpha)] + DR(\alpha)}{2 [pP(\alpha) - qQ(\alpha)] + R(\alpha) + \gamma\alpha} \\ M &= \frac{1}{4} (ps - qt) H^{-4}, \quad N = \frac{1}{4} (pt + qs) H^{-4} \\ D &= -\frac{1}{18} (2k^2 - 1) \left[\frac{1}{3} (2k^2 - 1)^3 + 4(2k^2 - 1)(1 - k^2)k^2 + \frac{4}{9} (2k^2 - 1)^2 H^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} (2k^2 - 1) H^{-2} + \frac{1}{3} H^{-3} \right] \\ B &= H \left[(2M - 2D) \frac{1}{3} (2k^2 - 1) - 4Nkk' - \frac{1}{12} H^{-1} \right], \quad k'^2 = 1 - k^2 \\ p &= \frac{8k^2(1 - k^2) - 1}{16k^2(1 - k^2)}, \quad q = \frac{2k^2 - 1}{4kk'} \\ s &= H^4 \left\{ \frac{1}{108} (2k^2 - 1)^4 + \frac{10}{9} (2k^2 - 1)^2 (1 - k^2) k^2 - 4(1 - k^2)^2 k^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} (2k^2 - 1) \left[\frac{1}{9} (2k^2 - 1)^2 - 12(1 - k^2) k^2 \right] H^{-1} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{9} (2k^2 - 1)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4k^2(1 - k^2) \right] H^{-2} + \frac{1}{27} (2k^2 - 1) H^{-3} \right\} \\ t &= H^4 \left\{ \frac{16}{3} (2k^2 - 1) (1 - k^2) k^3 k' + \frac{2}{3} k k' \left[\frac{1}{3} (2k^2 - 1)^2 - 4(1 - k^2) k^2 \right] H^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{9} (2k^2 - 1) k k' H^{-2} + \frac{2}{9} k k' H^{-3} \right\} \end{aligned}$$

K и E — полный эллиптический интеграл первого и второго рода с модулем k .
Из решения (2.9) легко получить значение температуры на оси диффузора. Имеем

$$t(0) = 2H^2 (D - c_1) \tag{2.10}$$

Так как все функции S, T, P, Q и R , входящие в решение (2.9), нечетные, то $t(\theta)$ будет четной функцией, следовательно, распределение температуры в этом случае ($\Delta < 0$) будет симметричным относительно оси.

На фиг. 1 и 2 приведены профили скорости и температуры, подсчитанные по формулам (2.8) и (2.9) для случая $k^2 = 0.9, H = 144$, что соответствует $\alpha = 0,07074 \approx 4^\circ, N_{Re} = 20.34$.

2° Случай $\Delta > 0$. Здесь возможно несколько вариантов.

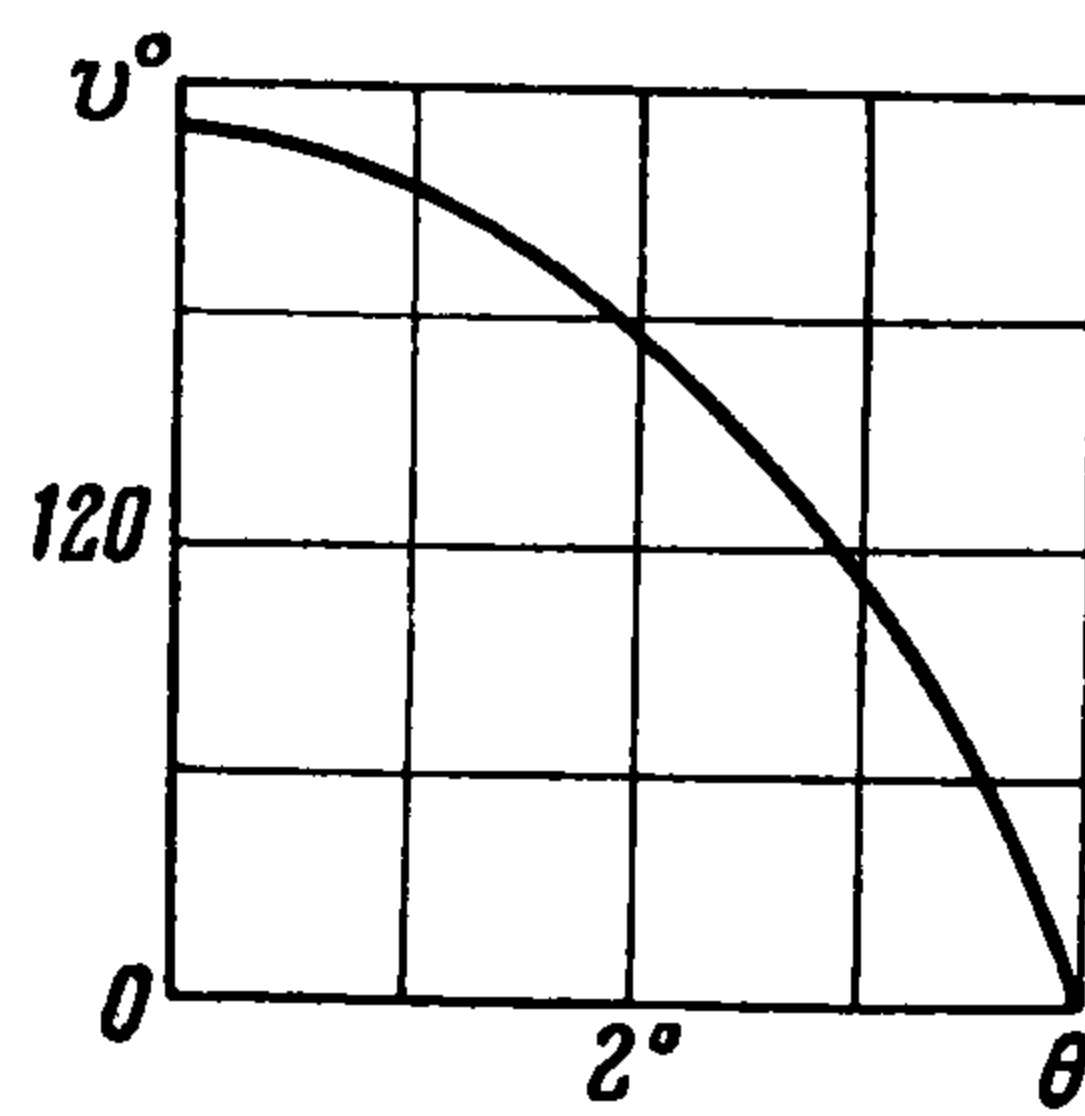
Первый вариант: $\theta_0 = \omega_3$. Решение для профиля скорости будет [4]

$$\begin{aligned} v^0 &= \frac{rv_r}{2v} = - [3\wp(\theta - \omega_3) + 1] = \\ &= - [3\lambda k^2 \text{sn}^2(\theta V \bar{\lambda}) - (1 + k^2) \lambda + 1] \end{aligned} \tag{2.11}$$

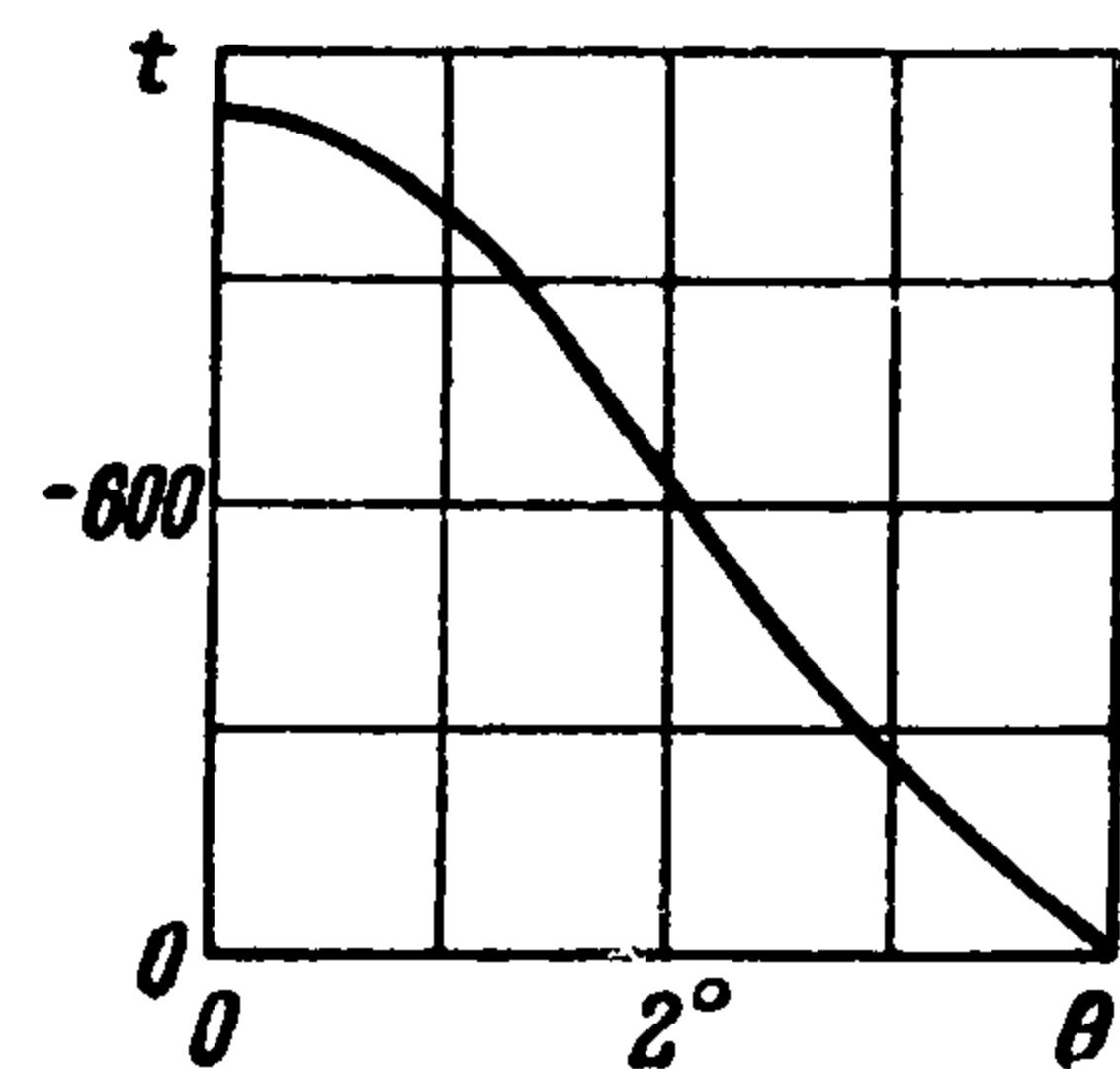
и, следовательно, поток симметричен относительно оси диффузора, величина α может принимать значения η_1, η_2, \dots , являющиеся положительными корнями трансцендентного уравнения [4]

$$\text{sn}^2(\eta V \bar{\lambda}) = \frac{(1 + k^2) \lambda - 1}{3\lambda k^2}$$

В этом случае решение (2.11) зависит от двух независимых параметров λ и модуля функций Якоби k^2 . Физические параметры — число N_{Re} и угол 2α — определяются через λ и k^2 при помощи условий (1.2), и эта связь дается формулами (8.1), (8.2) или табл. 2 и 3, приведенными в работе [4]. Подставляя в решение (2.7) вместо аргумента u $\theta - \omega_3$



Фиг. 1



Фиг. 2

и переходя к функциям Якоби, получим следующее выражение для профиля температуры, удовлетворяющее граничным условиям (1.5), причем $\alpha = \eta_1$:

$$t(\theta) = S_2(\theta) \left\{ \frac{1}{16} T_2(\theta) + B, \theta + CP_2(\theta) + DR_2(\theta) + GQ_2(\theta) - \right. \\ \left. - c_2 [a^2 P_2(\theta) + b^2 R_2(\theta) + c^2 Q_2(\theta) + \gamma_2 \theta] \right\} \quad (2.12)$$

Здесь

$$P_2(\theta) = T_2(\theta) - V\bar{\lambda} k^2 \frac{\operatorname{sn}(\theta V\bar{\lambda}) \operatorname{cn}(\theta V\bar{\lambda})}{\operatorname{dn}(\theta V\bar{\lambda})}, \quad R_2(\theta) = T_2(\theta) - V\bar{\lambda} \frac{\operatorname{sn}(\theta V\bar{\lambda}) \operatorname{dn}(\theta V\bar{\lambda})}{\operatorname{cn}(\theta V\bar{\lambda})} \\ Q_2(\theta) = T_2(\theta) + V\bar{\lambda} \frac{\operatorname{cn}(\theta V\bar{\lambda}) \operatorname{dn}(\theta V\bar{\lambda})}{\operatorname{sn}(\theta V\bar{\lambda})}, \quad T_2(\theta) = \lambda \left[\frac{E}{K} - \frac{1}{3} (2 - k^2) \right] \theta + V\bar{\lambda} \operatorname{Zn}(\theta V\bar{\lambda}) \\ S_2(\theta) = 2\lambda^{3/2} k^2 \operatorname{sn}(\theta V\bar{\lambda}) \operatorname{cn}(\theta V\bar{\lambda}) \operatorname{dn}(\theta V\bar{\lambda}) \\ c_2 = \frac{1/16 T_2(\alpha) + B\alpha + cP_2(\alpha) + DR_2(\alpha) + EQ_2(\alpha)}{a^2 P_2(\alpha) + b^2 R_2(\alpha) + c^2 Q_2(\alpha) + \gamma_2 \alpha} \quad (2.13)$$

$$C = \frac{2 - k^2}{12(1 - k^2)^2} \left\{ \frac{(2 - k^2)^3}{108} - \frac{2 - k^2}{108} \varepsilon + \delta + \frac{(2 - k^2)^2}{27\lambda} + \frac{2 - k^2}{9\lambda^2} + \frac{1}{9\lambda^3} \right\} \\ D = \frac{2k^2 - 1}{12(1 - k^2)k^4} \left\{ \frac{(2k^2 - 1)^2}{108} - \frac{2k^2 - 1}{108} \varepsilon + \delta + \frac{(2k^2 - 1)^2}{27\lambda} + \frac{2k^2 - 1}{9\lambda^2} + \frac{1}{9\lambda^3} \right\} \\ G = \frac{1 + k^4}{12k^4} \left\{ \frac{(1 + k^2)^3}{108} - \frac{1 + k^2}{108} \varepsilon - \delta - \frac{(1 + k^2)^2}{27\lambda} + \frac{1 + k^2}{9\lambda^2} - \frac{1}{9\lambda^3} \right\}$$

$$B = \frac{\lambda}{3} \left[C(2 - k^2) + D(2k^2 - 1) - G(1 + k^2) - \frac{1}{4\lambda} \right]$$

$$\varepsilon = (2 - k^2)^2 + (2k^2 - 1)^2 + (1 + k^2)^2, \quad \delta = \frac{1}{27} (2 - k^2)(2k^2 - 1)(1 + k^2)$$

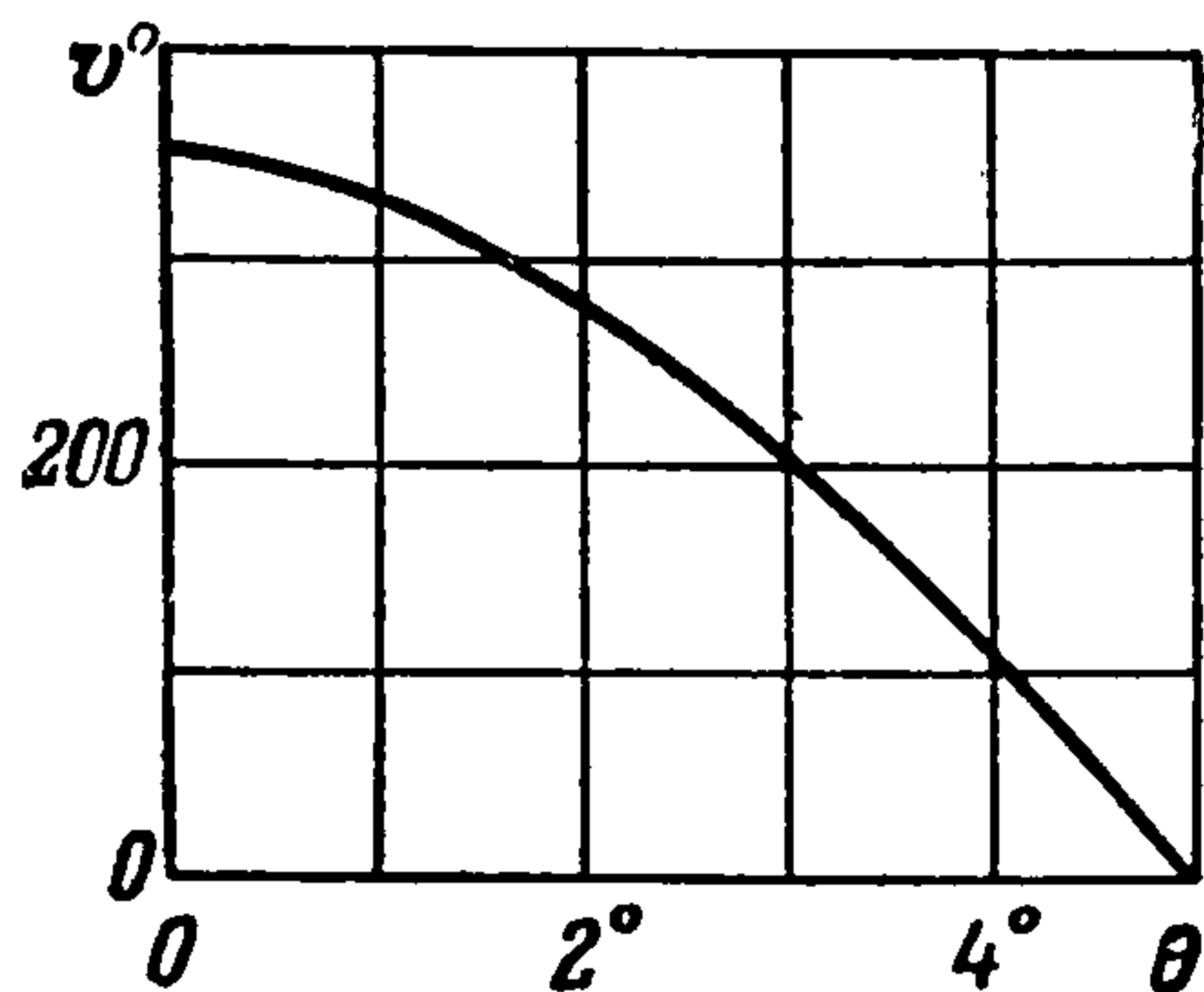
$$a^2 = \frac{1}{(1 - k^2)^2 \lambda^4}, \quad b^2 = \frac{1}{(1 - k^2)^2 k^4 \lambda^4}, \quad c^2 = \frac{1}{k^4 \lambda^4}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{3\lambda^3} \left[\frac{2 - k^2}{(1 - k^2)^2} + \frac{2k^2 - 1}{(1 - k^2)^2} - \frac{1 + k^2}{k^4} \right]$$

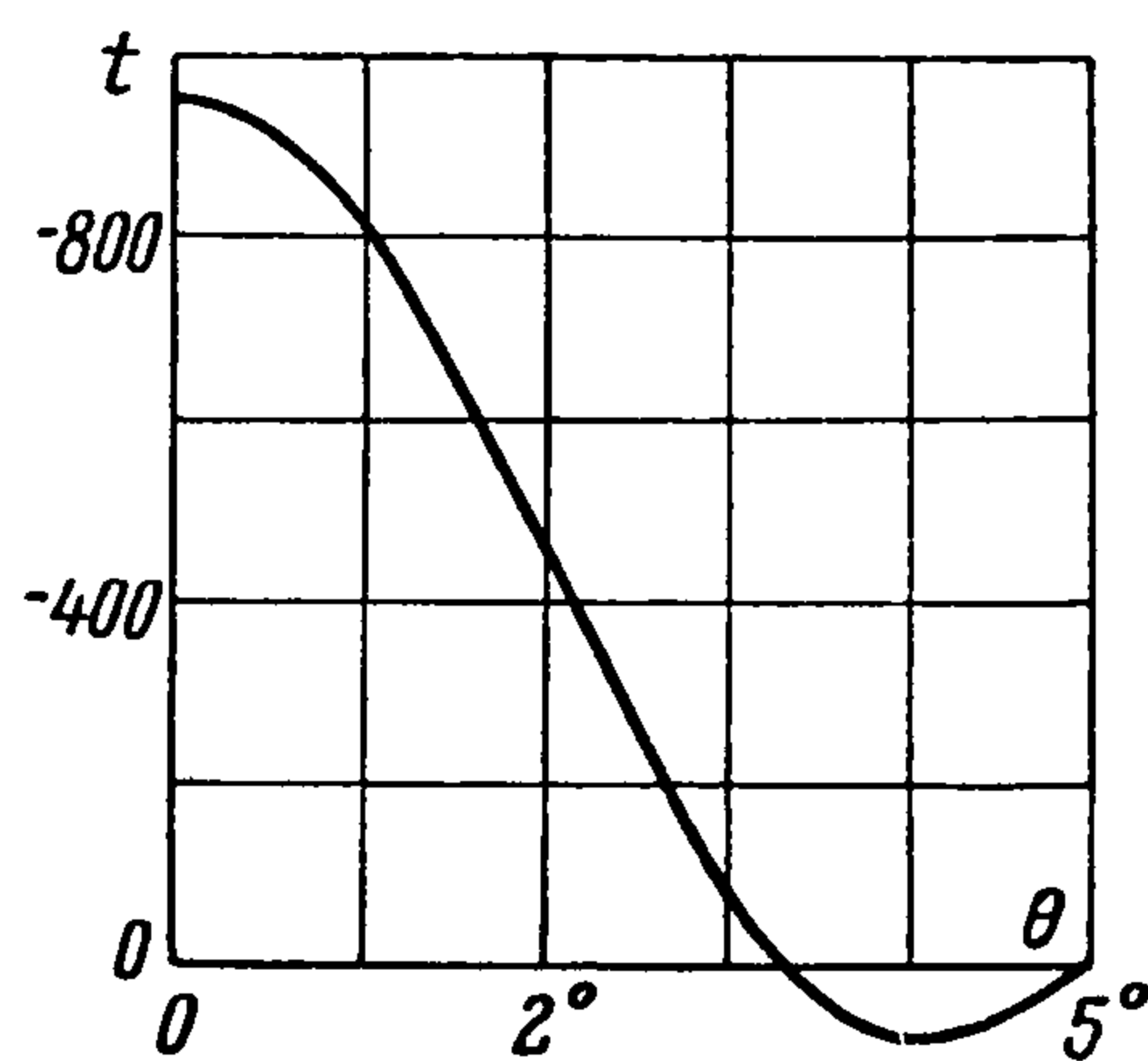
Температура на оси потока будет

$$t(0) = 2\lambda^2 k^2 (G - c_2 c^2) \quad (2.14)$$

В силу того, что все функции, входящие в (2.12), нечетные, распределение температуры в этом случае ($\Delta > 0$, $0_0 = \omega_3$) будет симметричным относительно оси диффузора.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 и 4 показаны профили скорости и температуры, подсчитанные по формулам (2.11) и (2.12) для случая $k^2 = 0,8$, $\lambda = 196$, что соответствует $\alpha = 0.08727 \approx 5^\circ$, $N_{Re} = 34.82$. В этом случае поток получается чисто расходящимся.

При $\alpha = \eta_2 = 2\omega_1 - \eta_1$ центральный расходящийся поток обрамлен симметрично с обеих сторон областями втекания (фиг. 5). Температура в этом случае будет подсчитываться снова по формуле (2.12), но с другим значением постоянной c_2 , которое легко получается из следующего свойства функций T_2 , P_2 , R_2 и Q_2 , например:

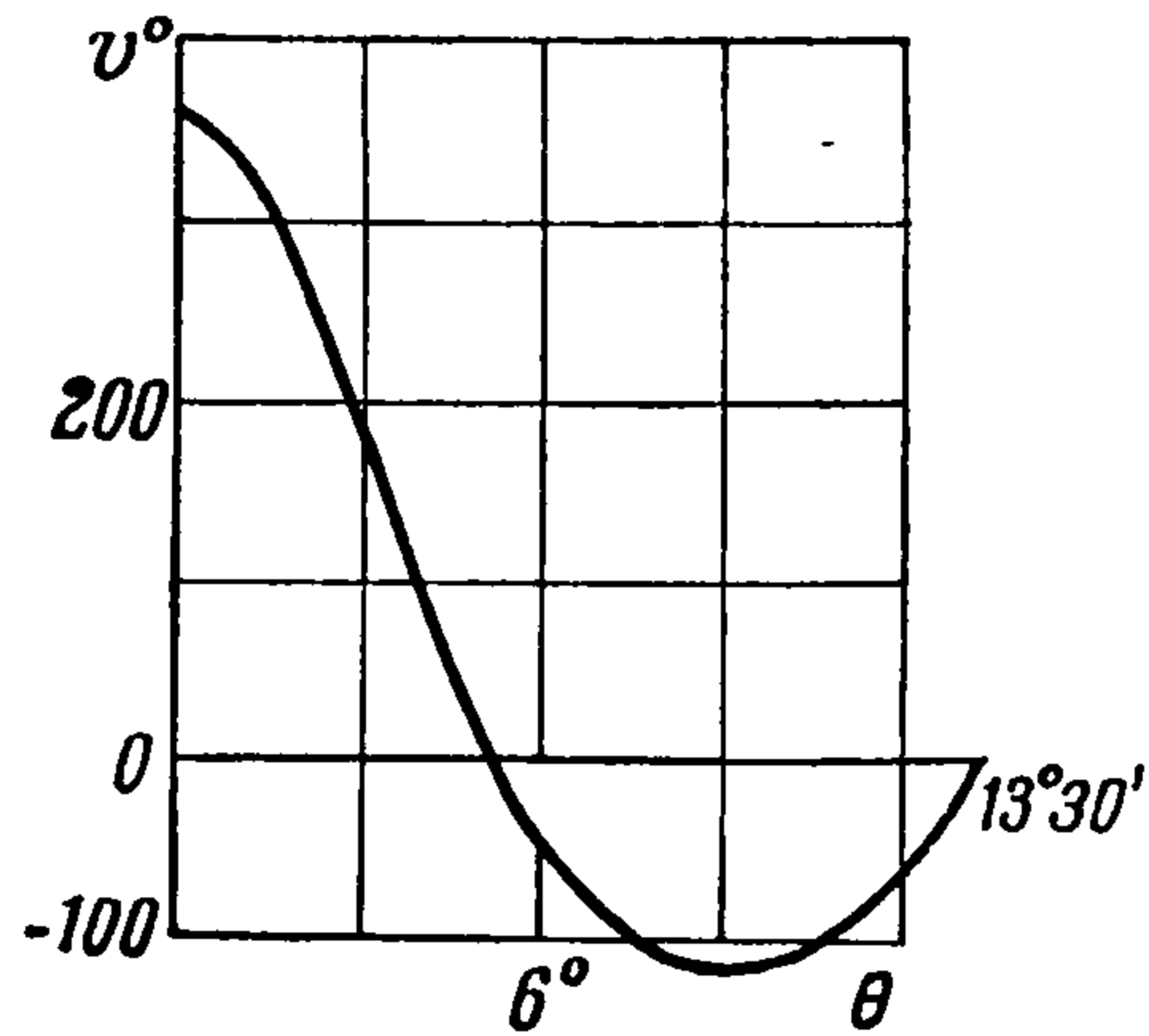
$$T_2(\theta \pm 2\omega_1 n) = T_2(\theta) \pm 2n\omega_1 \lambda \left[E/K - \frac{1}{3}(2 - k^2) \right]. \quad (2.15)$$

где n — целое число. Тогда

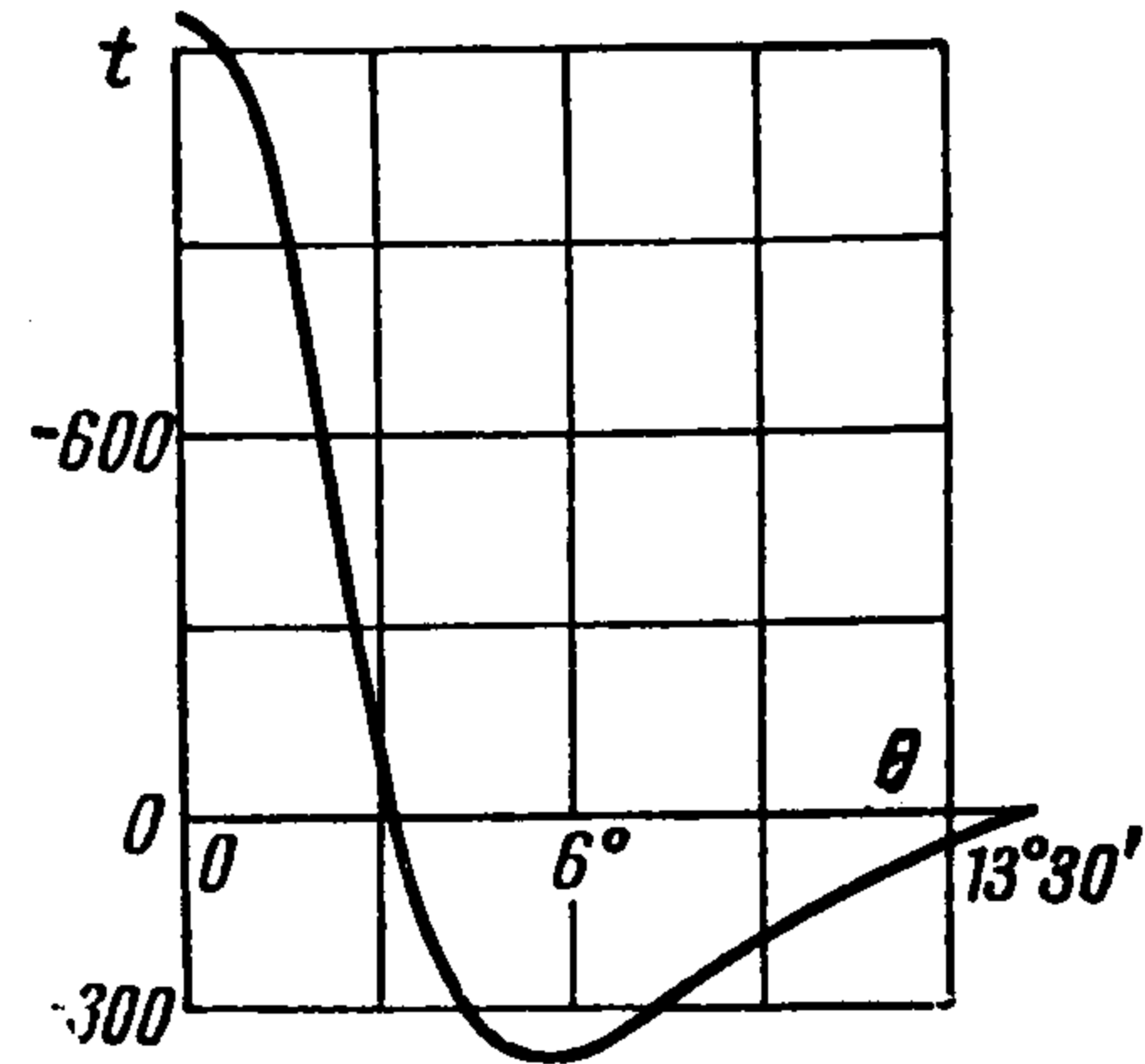
$$T_2(\alpha) = T_2(\eta_2) = 2\omega_1 \lambda \left[E/K - \frac{1}{3}(2 - k^2) \right] - T_2(\eta_1)$$

$T_2(\eta_1)$ уже подсчитано из случая, когда $\alpha = \eta_1$.

На фиг. 5 и 6 приведены профили скорости и температуры, подсчитанные в этом случае ($\alpha = \eta_2 = 2\omega_1 - \eta_1$) для $k^2 = 0.8$, $\lambda = 196$ ($\alpha = 0.2346 \approx 13^\circ 30'$, $N_{Re} = 10,82$).



Фиг. 5



Фиг. 6

При $\alpha = \eta_3 = 2\omega_1 + \eta_1$ центральный расходящийся поток будет обрамлен симметрично с обеих сторон областями втекания и вытекания. Соответственно усложнится и профиль температуры.

Второй вариант: $\theta_0 = \omega_2$. Решение для скорости и температуры будет

$$v^\circ = -[3\wp(\theta - \omega_2) + 1] = - \left[3\lambda k^2 \frac{\text{cn}^2(\theta \sqrt{\lambda})}{\text{dn}^2(\theta \sqrt{\lambda})} - (1 + k^2)\lambda + 1 \right] \quad (2.16)$$

$$t(\theta) = S_3(\theta) \left\{ \frac{1}{16} T_3(\theta) + B\theta + CP_3(\theta) + CR_3(\theta) + GQ_3(\theta) - c_3 [a^2 P_3(\theta) + b^2 R_3(\theta) + c^2 Q_3(\theta) + \gamma_2 \theta] \right\}, \quad t(0) = -2\lambda^2 k^2 (1 - k^2) (D - c_3 b^2) \quad (2.17)$$

где

$$P_3(\theta) = T_2(\theta), \quad R_3(\theta) = Q_2(\theta), \quad Q_3(\theta) = R_3(\theta), \quad T_3(\theta) = P_2(\theta)$$

$$S_3(\theta) = -2\lambda^2 k^2 (1 - k^2) \frac{\text{sn}(\theta \sqrt{\lambda}) \text{cn}(\theta \sqrt{\lambda})}{\text{dn}^3(\theta \sqrt{\lambda})}$$

Выражение для постоянной c_3 получается из формулы (2.13), если вместо функций с индексом 2 поставить функции с индексом 3. Выражение для коэффициентов a^2 , b^2 , c^2 и C , D , G , B останутся теми же, что и в первом варианте.

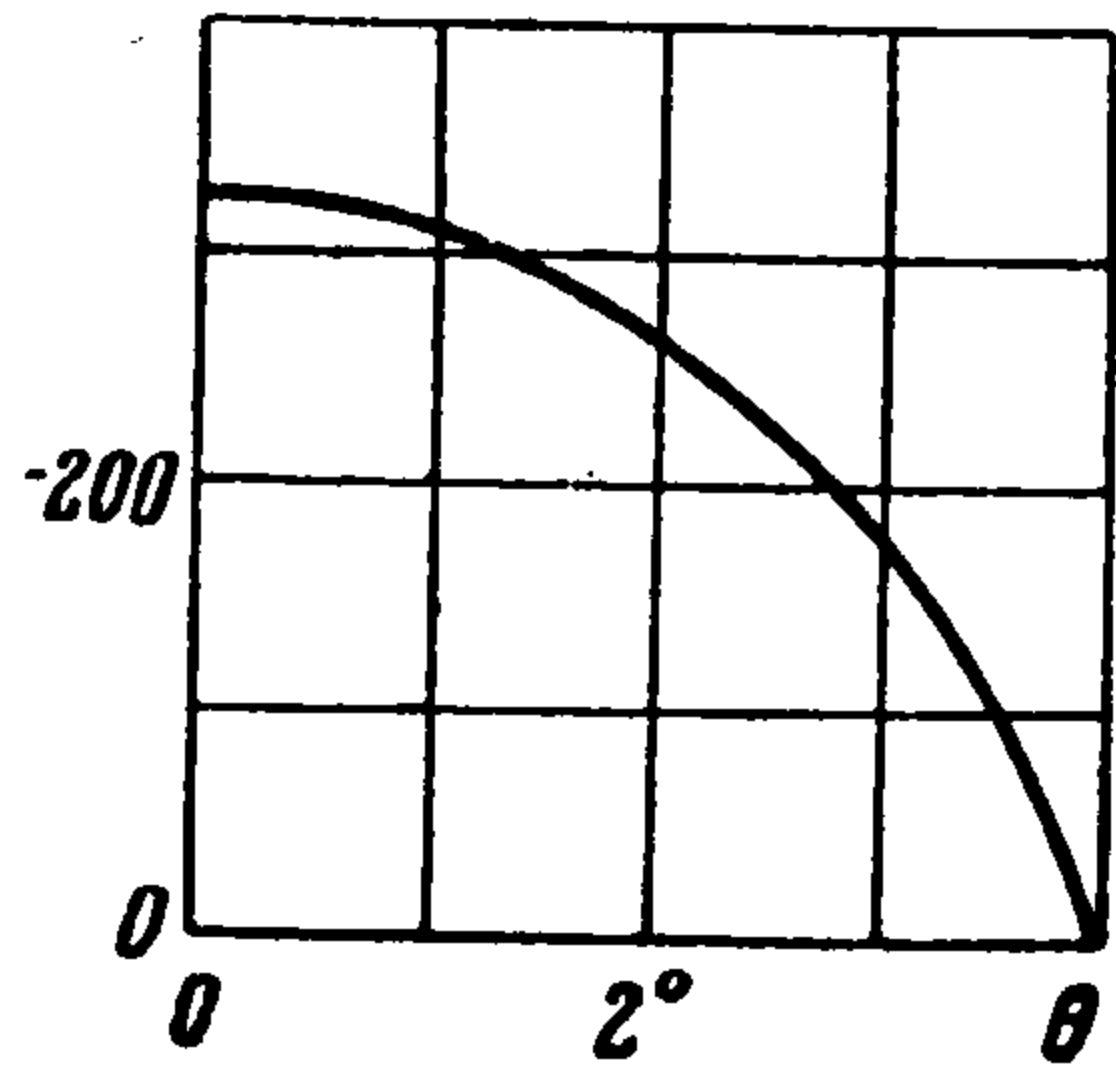
Здесь α может принимать следующую систему значений [4]: $\alpha = \omega_1 - \eta_1$, $\alpha = \omega_1 + \eta_1$, $\alpha = \omega_1 + \eta_2$, $\alpha = \omega_1 + \eta_3$ и т. д., $\alpha = n\omega_1$ (n — положительное целое число). Если $\alpha = \omega_1 - \eta_1$, то поток будет чисто сходящимся и температура внутри потока будет выше температуры стенок (фиг. 7 и 8), $k^2 = 0,9$, $\lambda = 400$, $\alpha = 4^\circ$, $N_{Re} = 31,9$. Если $\alpha = \omega_1 + \eta_1$, то центральный сходящийся поток будет обрамлен симметрично областями вытекания и температура в области сходящегося потока будет выше температуры стенок и в области расходящегося потока — ниже температуры стенок (фиг. 9 и 10), $k^2 = 0,8$, $\lambda = 400$, $\alpha = 10^\circ$, $Re = 33$. При $\alpha = \omega_1 + \eta_2$ центральный сходящийся поток будет обрамлен симметрично с обеих сторон областями вытекания и втекания. При $\alpha = n\omega_1$ решение для профиля скорости имеет вид [4]:

$$v_r = -\frac{2v}{r} [3\wp(\theta - \alpha_0 - \omega_3) + 1]$$

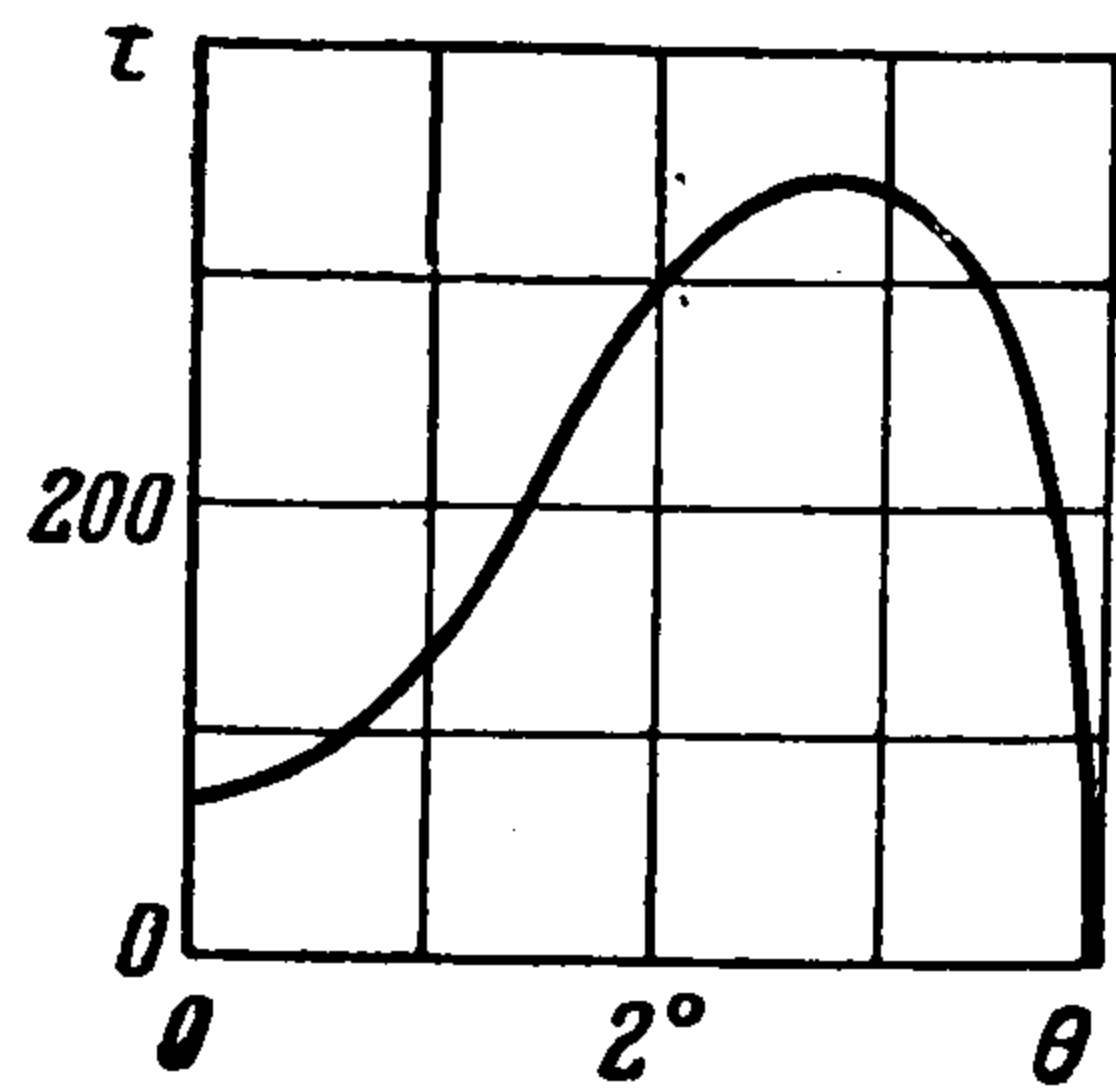
причем $\alpha_0 = \pm(\omega_1 - \eta_1)$ при $\alpha_1 = \omega_1$ и $\alpha_0 = \pm\eta_1$ при $\alpha_2 = 2\omega_1$ и т. д. В этом случае поток не симметричен относительно оси, так как

$$\wp(-\theta - \alpha_0 - \omega_3) = \wp(\theta + \alpha_0 + \omega_3) = \wp(\theta + \alpha_0 - \omega_3) \neq \wp(\theta - \alpha_0 - \omega_3)$$

Легко показать, что в этом случае профиль температуры будет также несимметричным.



Фиг. 7

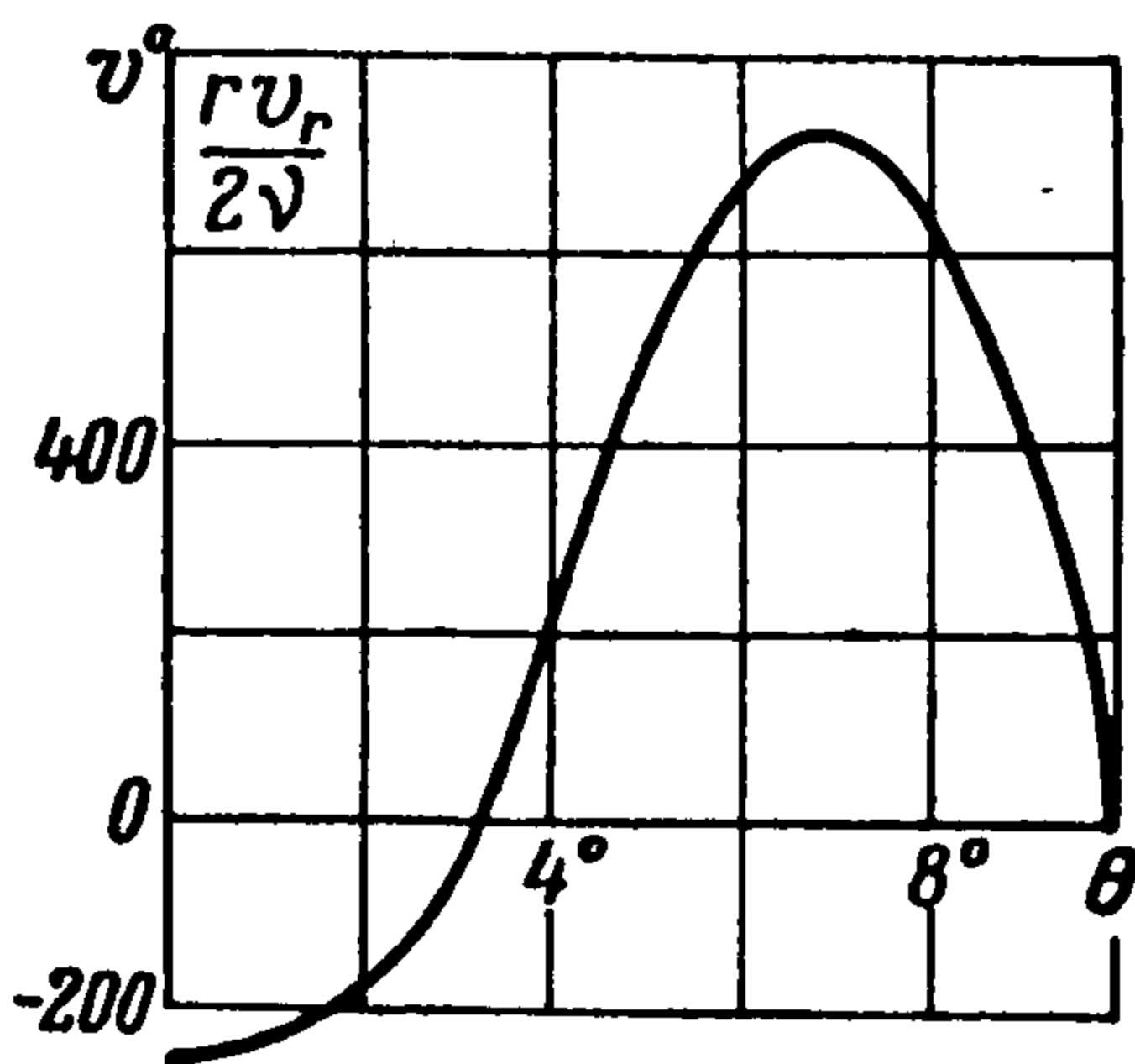


Фиг. 8

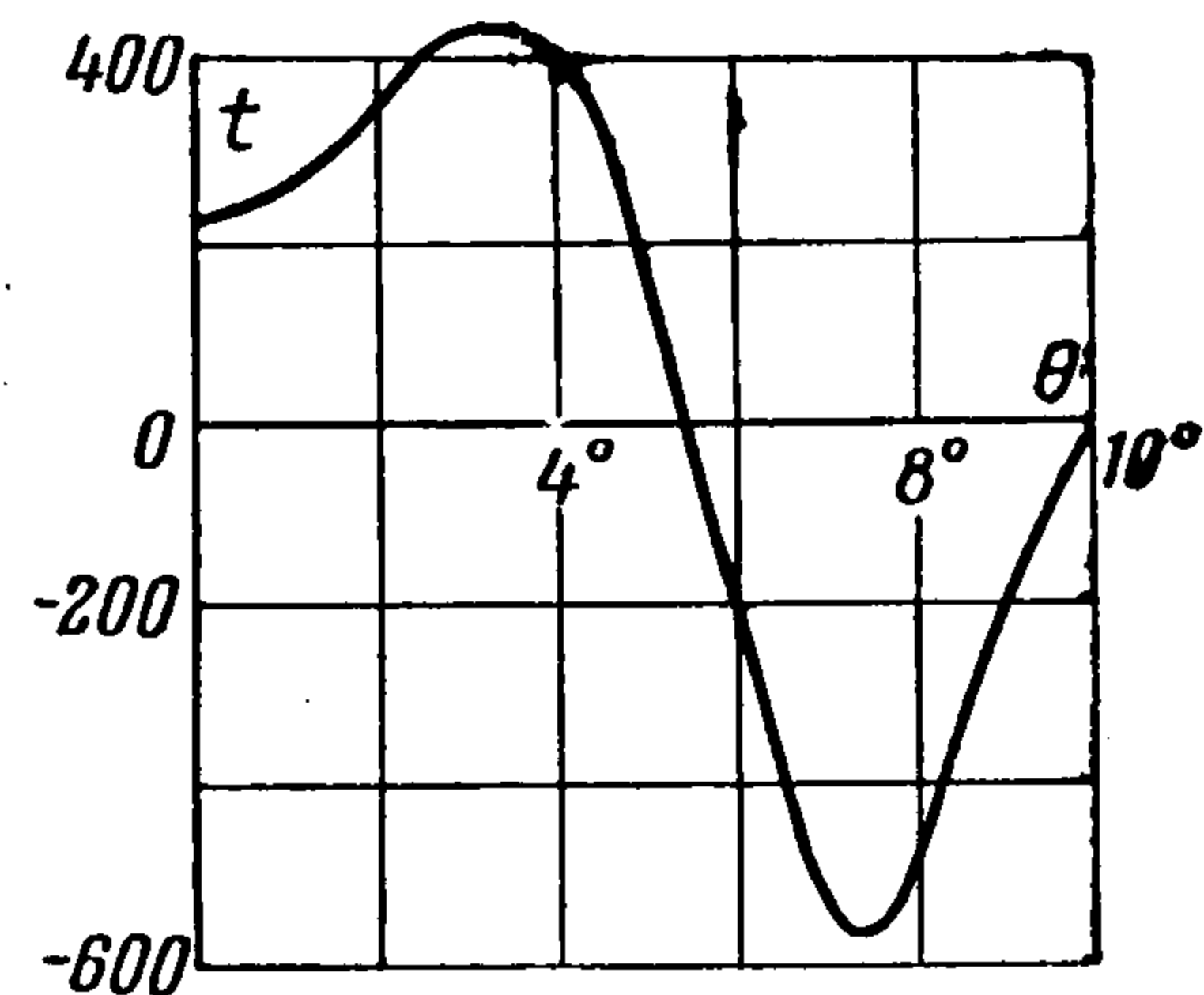
3°. *Случай* $\Delta = 0$. Исследование этого предельного случая показывает, что здесь возможен единственный тип профиля — это параболический. Распределение температуры будет изображаться параболой четвертой степени.

Из полученного выше точного решения для профиля температуры следует, что симметричному распределению профиля скорости соответствует симметричное распределение температуры.

Несимметричному профилю скорости соответствует несимметричный профиль температуры. При больших числах N_{Re} наблюдается локальное повышение



Фиг. 9



Фиг. 10

температуры в местах с наибольшим градиентом скорости за счет диссипации. Во всех случаях течения профиль температуры направлен противоположно профилю скорости.

Замечание. При числе Прандтля $\sigma \neq 1$ уравнение (1.4) в замкнутом виде не интегрируется. Однако, если $12\sigma = n(n+1)$ (n — целое число), общее решение однородного уравнения (1.4) получается через функции Вейерштрасса $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$. Частное же решение неоднородного уравнения (1.4) выражается в квадратурах через неберущиеся интегралы, и поэтому общее решение неоднородного уравнения (1.4) получается громоздким для исследования.

При $n = 6, 8, 10, \dots$, что соответствует $\sigma = 3, 5, 6, 9, 16$, частное решение уравнения (1.4) может быть найдено в виде

$$t_0 = A_1 \wp^{\frac{n}{2}}(u) + A_2 \wp^{\frac{n-1}{2}}(u) + \dots$$

и общее решение уравнения (1.4) получается тогда в замкнутом виде. Однако ввиду его сложности мы не останавливаемся на его исследовании.

Поступила 4 IX 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, vol. 25, p. 34, 1916.
2. Milne-Thomson L. M. Jacobian elliptic function tables. Dover, New-York, 1950.
3. Millsaps K. and Pohlhausen K. Thermal distributions in Jeffery-Hamel flows between nonparallel plane walls. Journ. of the Aeron. Sci., vol. 20, № 3, 1955.
4. Rosenhead L. The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined walls. Proc. Roy. Soc. London, vol. 175, p. 436, 1940.
5. Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, изд. АН СССР, 1941.