5. **Жесткость при кручении.** Для жесткости при кручении в случае двух равных врезов получается следующее выражение:

$$\frac{1}{\mu} C = \pi - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cos^4 \beta} [(\pi - 2\beta)^2 + (\pi - 2\beta) \sin 4\beta + \sin^2 2\beta] \tag{5.1}$$

Положив в (5.1) $\beta = {}^1/_4\pi \,(m = \sqrt{2} - 1)$, найдем $C = {}^1/_2\pi - 2/\pi$. В предельном случае $m = 0$ $(\beta = {}^1/_2\pi)$ получаем $C = (\pi - 8/\pi)\,\mu$, равное удвоенному значению жесткости при кручении бруса полукруглого сечения, что и должно быть. При $m = 1$ $(\beta = 0)$ получаем $C = {}^1/_2\pi\mu$, т. е. жесткость круглого бруса без врезов.

Задача о кручении круглого бруса с двумя равными врезами была решена другим способом в работе Шеферда [2]. Жесткость при кручении была вычислена в двух случаях: для $1 - m = 0{,}1591$ и $1 - m = 0.2929$.

Поступила 18 III 1957 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. Shepherd. The torsion and flexure of shafting with keyways or cracks. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 138, 1938.
3. Ширяев Е. А. О кручении круглого бруса с трещиной по дуге окружности или по радиусу. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.

ПЕРЕХОД ОТ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ПРИ ПОМОЩИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В. В. Карамышкин

(Москва)

Пусть дано однородное линейное уравнение

$$p_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n(t)y = 0 \tag{1}$$

где $p_0(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_n(t)$ — для простоты полиномы степени не выше второй.

По теореме дифференцирования изображения

$$t^m y(t) \leftarrow\!\!\div (-1)^m p \frac{d^m}{dp^m}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]$$

и после операционного преобразования уравнению (1) соответствует дифференциальное уравнение второго порядка

$$pP(p)\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{Y(p)}{p}\right] + pQ(p)\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right] + R(p)\,Y(p) = pS(p) \tag{2}$$

где $P(p)$, $Q(p)$, $R(p)$ — полиномы степени $\leqslant n$, а $S(p)$ — полином, содержащий начальные значения.

Пусть, например, $R(p)$—полином степени не меньшей, чем степени полиномов $P(p)$ и $Q(p)$, тогда из (2)

$$Y(p) = \frac{pS(p)}{R(p)} - \frac{Q(p)}{R(p)}\,p\,\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right] - \frac{P(p)}{R(p)}p\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{Y(p)}{p}\right] \tag{3}$$

Найдем оригиналы отдельных членов соотношения (3). Пусть для простоты корни $R(p)$ простые. Тогда

$$Y(p) \to\!\div\, y(t), \quad \frac{pS(p)}{R(p)} = \sum_r k_r \frac{p}{p - p_r} \div\!\!\to \sum_r k_r e^{p_r t} \tag{4}$$

$$Y(p)=p\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt,\ p\frac{d}{dp}\frac{Y(p)}{p}=p\int_0^\infty(-t)\,y(t)\,e^{-pt}\,dt$$

Воспользуемся разложением $\frac{Q(p)}{R(p)}$ на простые дроби:

$$\frac{Q(p)}{R(p)}=A_0+\sum_r\frac{A_r}{p-p_r}$$

Тогда

$$\frac{Q(p)}{R(p)}p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]=\left(A_0+\sum_r\frac{A_r}{p-p_r}\right)p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]\equiv A_0p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]+$$
$$+\sum_r\frac{1}{p}\frac{p}{p-p_r}\left\{p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]\right\}$$

Но

$$A_0p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]\div\!\!\rightarrow -A_0y(t) \tag{5}$$

а по теореме свертки

$$\sum_r\frac{1}{p}\frac{p}{p-p_r}\left\{p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]\right\}\div\!\!\rightarrow -\sum_r\int_0^t\tau y(\tau)e^{p_r(t-\tau)}\,d\tau \tag{6}$$

Точно так же, если

$$\frac{P(p)}{R(p)}=B_0+\sum_r\frac{B_r}{p-p_r} \tag{7}$$

то

$$\frac{P(p)}{R(p)}p\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]\div\!\!\rightarrow B_0t^2y(t)+\sum_r\int_0^t\tau^2y(\tau)e^{p_r(t-\tau)}d\tau \tag{8}$$

Учитывая (4), (5) — (8), получаем

$$y(t)(1-A_0t+B_0t^2)=\sum_rA_r\int_0^t\tau y(\tau)e^{p_r(t-\tau)}dt-\sum_rB_r\int_0^t\tau^2y(\tau)e^{p_r(t-\tau)}dt+\sum_rK_re^{p_rt}$$

Это интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода с вырожденным ядром, содержащим экспоненциальные члены.

Все сказанное без труда распространяется на случай, когда $R(p)$ имеет кратные корни.

Пример. Уравнение Лагерра

$$t\ddot{y}+(1-t)\,\dot{y}+ny=0$$

После операционного преобразования имеем

$$(p-p^2)\,p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]-pY(p)+(n+1)\,Y(p)=0$$

Отсюда

$$p\frac{d}{dp}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]=-\frac{p-n-1}{p^2-p}Y(p)$$

Но

$$\frac{p-n-1}{p(p-1)}=\frac{n+1}{p}-\frac{n}{p-1}$$

и, значит, имеем интегральное уравнение

$$ty(t)=(n+1)\int_0^t y(\tau)\,d\tau-n\int_0^t y(\tau)\,e^{(t-\tau)}dt$$

или

$$ty(t)=(n+1)\int_0^t y(\tau)\,d\tau-n\,e\int_0^t y(\tau)\,e^{-\tau}\,dt$$

Поступила 11 XII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Doetsch G. Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. II. Basel und Stuttgart, 1955.