

Получим следующее уравнение для определения z_0 :

$$-\frac{1}{z_0^2} P\left(\frac{2h-2z_0}{c}\right) + \frac{1}{(2h-z_0)^2} P(0) = 2\pi\sigma_p$$

Если $P(t)$ изменяется во времени по треугольному закону

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P(0)(1-t/\varepsilon) & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

то уравнение для определения z_0 упрощается и принимает вид:

$$-\frac{1}{z_0^2} \left(1 - \frac{2(h-z_0)}{\varepsilon c}\right) + \frac{1}{(2h-z_0)^2} = \frac{2\pi}{P(0)} \sigma_p$$

Полученное нами решение отлично от решения [1]. Это объясняется тем, что в работе [1] подыскивается такое решение волновых уравнений, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям, граничным условиям на плоскости $z=0$ (кроме точки $r=0$) и содержит произвольную постоянную в виде множителя, определяемую из условия, что предел равнодействующей напряжений по поверхности полусферы с центром в точке $r=0$, $z=0$ при стремлении радиуса полусферы к нулю равен $P(t)$. Последнее условие является лишь необходимым и не обеспечивает правильного выбора решения.

В результате оказывается, что решение не удовлетворяет другому необходимому условию: равенству нулю предела равнодействующей сил инерции в направлении оси z для полусферы с центром в начале координат при стремлении радиуса полусферы к нулю. Кроме того, получается, что равнодействующая сил инерции в радиальном направлении для части полусферы, вырезанной двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии, оказывается бесконечно большой для любого конечного радиуса.

Поступила 25 II 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е н с к и й В. С. Акустический вариант теории откола. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
2. О г у р ц о в К. И., П е т р а ш е н ь Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, вып. 24, № 149, 1951.
3. П е т р а ш е н ь Г. И. О рациональном методе решения задач динамической теории упругости в случае слоисто-изотропных областей с плоско-параллельными границами раздела. Уч. зап. ЛГУ, № 208, вып. 30, 1956.

КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО БРУСА С ДВУМЯ ВРЕЗАМИ

Е. А. Ширяев

(Ленинград)

Рассматривается однородный изотропный круглый брус с двумя врезами (трещинами) по диаметру. Решение осуществляется на основе конформного отображения [1].

1. **Отображающая функция.** Конформное отображение круга $|\zeta| \leq 1$ на круг единичного радиуса с двумя разрезами по диаметру от точки $+1$ до точки α_1 и от точки -1 до точки α_2 (фиг. 1) осуществляется функцией

$$z = \sqrt{\frac{d}{a} \frac{1 + 2a\zeta + \zeta^2 - b\sqrt{1 + 2c\zeta^2 + \zeta^4}}{1 + 2d\zeta + \zeta^2}} \quad (1.1)$$

где

$$a = \cos \beta \cos \delta, \quad b = \sin \delta, \quad c = -\cos 2\beta, \quad d = \frac{\cos \beta}{\cos \delta} \quad (1.2)$$

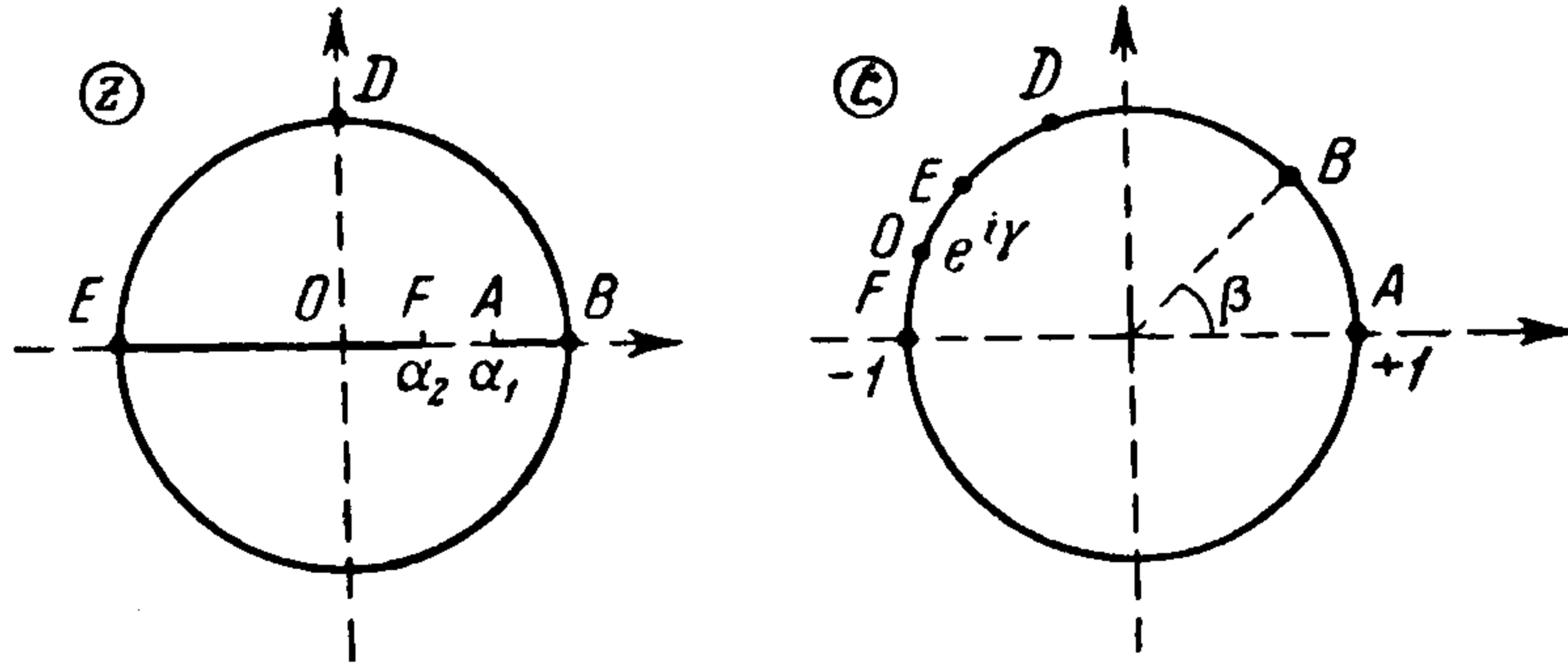
$$\cos \beta = \frac{2m}{1+m^2}, \quad \sin \beta = \frac{1-m^2}{1+m^2}, \quad \cos \delta = \frac{2n}{1+n^2}, \quad \sin \delta = \frac{1-n^2}{1+n^2}$$

$$m = \frac{1 - \alpha_1\alpha_2 - \sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad n = \frac{1 + \alpha_1\alpha_2 - \sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (1.3)$$

Примем $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_1 \geq |\alpha_2|$, т. е. будем считать глубину «левого» вреза больше глубины «правого» вреза, тогда $0 < m < 1$, $0 \leq n < 1$ (фиг. 1).

При $n = 0$ имеем случай двух врезов равной глубины.

Корни знаменателя в выражении (1.1) обозначим через ζ_1 и ζ_2 . Если $n > m$, то ζ_1 и ζ_2 — комплексные сопряженные, $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$. При $n = m$ имеем $\zeta_1 = \zeta_2 = -1$. Если $n < m$, то корни ζ_1 и ζ_2 вещественны и различны, $|\zeta_1| < 1$, $|\zeta_2| > 1$.



Фиг. 1

При $\zeta = \zeta_1$ числитель выражения (1.1) должен обращаться в нуль, что является условием для выбора ветви корня, входящего в (1.1). Нули подкоренного выражения в (1.1) будем обозначать через z_1, z_2, z_3, z_4 .

2. Комплексная функция кручения. 1. Пусть $n > m$, тогда $\alpha_2 > 0$. Введем параметр γ :

$$\cos \gamma = -\frac{(1+n^2)m}{(1+m^2)n}, \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{(n^2-m^2)(1-n^2m^2)}}{(1+m^2)n} \quad (2.1)$$

Имеем

$$d = -\cos \gamma, \quad \zeta_1 = e^{i\gamma}, \quad z_1 = e^{i\beta}, \quad z_2 = \bar{z}_1, \quad z_3 = -\bar{z}_1, \quad z_4 = -z_1 \quad (2.2)$$

Для комплексной функции кручения, поступая аналогично тому, как это делалось в прежней работе [3], мы найдем выражение

$$f(\zeta) = \frac{b^2 di}{\pi a (1 + 2d\zeta + \zeta^2)^2} \left[P + Q\zeta + R\zeta^2 + S\zeta^3 - \frac{\pi}{b} (1 + 2a\zeta + \zeta^2) \sqrt{1 + 2c\zeta^2 + \zeta^4} + \right. \\ \left. + i(1 + 2c\zeta^2 + \zeta^4) \log \frac{1 - z_1^2 \zeta^2}{1 - z_2^2 \zeta^2} \right] + \text{const} \quad (2.3)$$

где

$$P = 2 \left[\text{ctg } \gamma \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} \right) \log \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} - \frac{\sin 2\beta}{\sin^2 \gamma} \right] \quad (2.4)$$

$$Q = 2 \left[\left(2 \sin \gamma - \frac{3}{\sin \gamma} - \frac{3 \sin^2 \beta}{\sin^3 \gamma} + \frac{4 \sin^2 \beta}{\sin \gamma} \right) \log \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} + 4\beta \cos \gamma + 3 \cos \gamma \frac{\sin 2\beta}{\sin^2 \gamma} \right]$$

$$R = (1 + 2 \cos^2 \gamma) P - 8\beta (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma), \quad S = 16\beta \cos \gamma - Q - 4P \cos \gamma$$

а под логарифмом следует понимать ветвь, определяемую рядом

$$\log \frac{1 - z_1^2 \zeta^2}{1 - z_2^2 \zeta^2} = -2i \left(\sin 2\beta \zeta^2 + \frac{\sin 4\beta}{2} \zeta^4 + \frac{\sin 6\beta}{3} \zeta^6 + \dots \right) \quad (2.5)$$

2. Пусть $n = m$, тогда $\alpha_2 = 0$, $\gamma = \pi$, $\delta = \beta$. Выражение для комплексной функции кручения найдем, положив в (2.3) $d = 1$ и заменив P, Q, R, S их пределами при $\gamma \rightarrow \pi$. Заметим, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow \pi} P = \frac{16}{3} \text{ctg } \beta - \frac{2}{3} \sin 2\beta, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \pi} R = 16 \text{ctg } \beta - 2 \sin 2\beta - 8\beta (1 + \cos^2 \beta)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \pi} Q = 16 \text{ctg } \beta - 4 \sin 2\beta - 8\beta, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \pi} S = \frac{16}{3} \text{ctg } \beta + \frac{4}{3} \sin 2\beta - 8\beta \quad (2.6)$$

3. Пусть теперь $n < m$, тогда $\alpha_2 < 0$. Выполним в (1.1) дополнительное преобразование плоскости ζ :

$$\zeta^* = \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta_1 \zeta} \quad (2.7)$$

В результате найдем (вместо ζ^* снова пишем ζ)

$$z = \frac{b_1}{\zeta} (1 - 2a_1 \zeta + \zeta^2 - \sqrt{1 - 4a_1 \zeta + 2c_1 \zeta^2 - 4a_1 \zeta^3 + \zeta^4}) \quad (2.8)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2), \quad b_1 = \frac{1}{\cos \beta_1 - \cos \beta_2}, \quad c_1 = 1 + 2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \quad (2.9)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{n(1+m^2)^2 + 2m^2(1+n^2)}{m(1+m^2)(1+n)^2}; \quad \sin \beta_1 = \frac{(1-m^2)\sqrt{(m^2-n^2)(1-m^2n^2)}}{m(1+m^2)(1+n)^2}$$

$$\cos \beta_2 = \frac{n(1+m^2)^2 - 2m^2(1+n^2)}{m(1+m^2)(1-n)^2}; \quad \sin \beta_2 = \frac{(1-m^2)\sqrt{(m^2-n^2)(1-m^2n^2)}}{m(1+m^2)(1-n)^2} \quad (2.10)$$

Нули подкоренного выражения в (2.8) будут

$$z_1 = e^{i\beta_1}, \quad z_2 = \bar{z}_1, \quad z_3 = e^{i\beta_2}, \quad z_4 = \bar{z}_3$$

Для комплексной функции кручения получаем следующее выражение:

$$f(\zeta) = ib_1^2 \left[\frac{1}{\zeta^2} + \frac{p}{\zeta} + q\zeta + r\zeta^2 - \left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{2a_1}{\zeta} + 1 \right) \sqrt{1 - 4a_1 \zeta + 2c_1 \zeta^2 - 4a_1 \zeta^3 + \zeta^4} + \right. \\ \left. + \frac{i}{\pi \zeta^2} \left(1 - 4a_1 \zeta + 2c_1 \zeta^2 - 4a_1 \zeta^3 + \zeta^4 \right) \log \frac{(1 - z_1 \zeta)(1 - z_4 \zeta)}{(1 - z_2 \zeta)(1 - z_3 \zeta)} \right] + \text{const} \quad (2.11)$$

где

$$p = \frac{2}{\pi} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) - 4a_1 \quad q = \frac{8}{\pi} a_1 (\beta_2 - \beta_1) - \frac{2}{\pi} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) - 4a_1 \quad (2.12) \\ r = 1 - \frac{2}{\pi} (\beta_2 - \beta_1)$$

4. Два равных вреза. Пусть $n = 0$, тогда $\alpha_1 = -\alpha_2 = m$. Замечая, что $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \pi - \beta$, из (2.11) находим

$$f(\zeta) = \frac{i}{4 \cos^2 \beta} \left[\frac{1}{\zeta^2} + \left(1 - \frac{8}{\pi} \text{arc tg } m \right) \zeta^2 - \left(1 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \sqrt{1 + 2c \zeta^2 + \zeta^4} + \right. \\ \left. + i \frac{1 + 2c \zeta^2 + \zeta^4}{\pi \zeta^2} \log \frac{1 - z_1^2 \zeta^2}{1 - z_2^2 \zeta^2} \right] + \text{const} \quad (2.13)$$

3. Напряжения на круговой части контура. Для касательных напряжений на круговой части контура поперечного сечения бруса в случае $n > m$ получается следующее выражение:

$$T_{\vartheta} = \frac{2\mu\tau \sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \beta}}{(\cos \vartheta - \cos \gamma)^2} \left[\text{tg}^2 \delta \sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \beta} - \frac{\sin \beta \text{tg } \delta \cos \vartheta - \cos \gamma}{\pi \sin \vartheta} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \delta}{\pi \cos^2 \delta} (\cos \vartheta + \cos \beta \cos \delta) \log \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\sin(\vartheta - \beta)} - \frac{\text{tg } \delta}{2\pi \cos \beta} \frac{M \cos 2\vartheta + N \cos \vartheta + K}{\sin \vartheta} \right] \\ \pi - \beta > \vartheta > \beta \quad (3.1)$$

где τ — степень закручивания, μ — коэффициент Ламе,

$$M = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^3 \gamma} - 2 \sin \gamma + \frac{1}{\sin \gamma} \right) \log \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} - \frac{\sin 2\beta}{\sin \gamma} \text{ctg } \gamma \right] \\ N = \left[\sin 2\beta + 2 \sin 2\beta \text{ctg}^2 \gamma - 2 (\text{ctg } \gamma + \sin^2 \beta \text{ctg}^3 \gamma) \log \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} \right] \quad (3.2) \\ K = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^3 \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{2 \sin^2 \beta}{\sin \gamma} \right) \log \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} - \cos \gamma \frac{\sin 2\beta}{\sin^2 \gamma} \right]$$

Найдем напряжение в точке D (фиг. 1), для которой $z = i$; на плоскости ζ ей соответствует точка $\sigma_1 = \cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1$, причем $\cos \vartheta_1 = -\cos \beta \cos \delta$, $\sin \vartheta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \delta}$. Положим в (3.1) $\vartheta = \vartheta_1$; найдем

$$\frac{1}{\mu\tau} T_{\vartheta_1} = 2 - \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \delta}} \left[2 \sin \beta \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \delta \cos^2 \beta}{\sin^2 \delta \sin^2 \gamma} \right) + \frac{\cos^2 \gamma \sin^4 \delta}{\sin^3 \gamma \cos \delta} \log \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} \right] \quad (3.3)$$

Значению $m = 0$ ($\beta = 1/2 \pi$, $\gamma = 1/2 \pi$) соответствует предельный случай, когда врезы сходятся в точке $z = n$ и мы получаем два бруса полукруглого сечения. Положим в (3.3) $m = 0$; получим

$$T_{\vartheta_1} = \left(2 - \frac{4}{\pi} \right) \mu\tau$$

что и должно быть для полукруглого сечения.

Напряжения на круговой части контура для случая $n = m$ легко найдем, положив в (3.1) $\gamma = \pi$ и заменив M, N, K их пределами при $\gamma \rightarrow \pi$.

Исходя из (2.11), можно получить выражение для касательных напряжений на круговой части контура для случая $n < m$.

В случае двух равных врезов ($n = 0$), исходя из (2.13), получаем

$$T_{\vartheta} = \frac{\mu\tau}{\cos^2 \beta} \sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \beta} \left[\left(1 - \frac{2\beta}{\pi} \right) \frac{\cos 2\vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{\sin 2\beta}{\pi \sin \vartheta} + \frac{2}{\pi} \cos \vartheta \log \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\sin(\vartheta - \beta)} + 2 \sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \beta} \right], \quad \pi - \beta > \vartheta > \beta \quad (3.4)$$

Максимальное напряжение в случае двух равных врезов достигается в точке D при $\vartheta = 1/2 \pi$

$$\frac{1}{\mu\tau} T_{\max} = 2 - \frac{2}{\pi} \frac{1 - m^2}{1 + m^2} - \frac{2}{\pi} \frac{1 + m^2}{m} \operatorname{arc} \operatorname{tg} m \quad (3.5)$$

4. Напряжения на краях врезов. В случае $n > m$ для касательных напряжений $T_{\vartheta}^{(1)}$ на краях врезов получается следующее выражение:

$$T_{\vartheta}^{(1)} = \frac{\mu\tau \sin \delta}{\pi \cos \beta} \frac{\sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \vartheta}}{\cos \beta \cos \delta + \cos \vartheta - \sin \delta \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \vartheta}} \times \left[\frac{2(\cos^2 \beta - \cos \gamma \cos \vartheta)}{\cos \vartheta - \cos \gamma} \log \frac{\sin(\beta + \vartheta)}{\sin(\beta - \vartheta)} - \frac{\sin 2\beta}{\sin \vartheta} - \frac{M \cos 2\vartheta + N \cos \vartheta + K}{\sin \vartheta (\cos \vartheta - \cos \gamma)} \right] \quad (4.1)$$

$\beta > \vartheta > 0$ или $\pi > \vartheta > \pi - \beta$

Определим напряжение в точке O (фиг. 1), $z = 0$. На плоскости ζ ей соответствует точка $\zeta = e^{i\gamma}$. Полагая в (4.1) $\vartheta = \gamma$ (раскрывая неопределенность), находим

$$T_{\gamma}^{(1)} = \frac{2\mu\tau}{3\pi} \sin^2 \beta \left[\frac{4 \sin \beta}{\sin^3 \gamma} + \frac{3 \cos \gamma \sin^2 \delta \sin 2\beta}{\cos^3 \delta \sin^5 \gamma} - \frac{3 \sin^4 \delta \cos^2 \gamma}{\cos^3 \delta \sin^6 \gamma} \log \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} \right] \quad (4.2)$$

Положив в последней формуле $m = 0$ (врезы сойдутся), получим

$$T_{\gamma}^{(1)} = \frac{8}{3\pi} \mu\tau$$

что и должно быть для полукруглого сечения. Напряжения на краях врезов для случая $n = m$ легко получить из (4.1), положив $\gamma = \pi$.

В случае двух равных врезов, исходя из (2.13), получаем

$$T_{\vartheta}^{(1)} = \frac{\mu\tau}{\pi \cos \beta} \frac{\sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta - \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \vartheta}} \left[(\pi - 2\beta) \frac{\cos 2\vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{\sin 2\beta}{\sin \vartheta} + 2 \cos \vartheta \log \frac{\sin(\beta + \vartheta)}{\sin(\beta - \vartheta)} \right] \quad (4.3)$$

$\beta > \vartheta > 0$ или $\pi > \vartheta > \pi - \beta$

5. **Жесткость при кручении.** Для жесткости при кручении в случае двух равных врезов получается следующее выражение:

$$\frac{1}{\mu} C = \pi - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cos^4 \beta} [(\pi - 2\beta)^2 + (\pi - 2\beta) \sin 4\beta + \sin^2 2\beta] \quad (5.1)$$

Положив в (5.1) $\beta = 1/4\pi (m = \sqrt{2} - 1)$, найдем $C = 1/2\pi - 2/\pi$. В предельном случае $m = 0$ ($\beta = 1/2\pi$) получаем $C = (\pi - 8/\pi) \mu$, равное удвоенному значению жесткости при кручении бруса полукруглого сечения, что и должно быть. При $m = 1$ ($\beta = 0$) получаем $C = 1/2\pi\mu$, т. е. жесткость круглого бруса без врезов.

Задача о кручении круглого бруса с двумя равными врезами была решена другим способом в работе Шеферда [2]. Жесткость при кручении была вычислена в двух случаях: для $1 - m = 0,1591$ и $1 - m = 0,2929$.

Поступила 18 III 1957 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. S h e r p h e r d. The torsion and flexure of shafting with keyways or cracks. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 138, 1938.
3. Ш и р я е в Е. А. О кручении круглого бруса с трещиной по дуге окружности или по радиусу. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.

ПЕРЕХОД ОТ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ПРИ ПОМОЩИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В. В. К а р а м ы ш к и н

(Москва)

Пусть дано однородное линейное уравнение

$$p_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + p_n(t) y = 0 \quad (1)$$

где $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$ — для простоты полиномы степени не выше второй.

По теореме дифференцирования изображения

$$t^m y(t) \leftrightarrow (-1)^m p \frac{d^m}{dp^m} \left[\frac{Y(p)}{p} \right]$$

и после операционного преобразования уравнению (1) соответствует дифференциальное уравнение второго порядка

$$pP(p) \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{Y(p)}{p} \right] + pQ(p) \frac{d}{dp} \left[\frac{Y(p)}{p} \right] + R(p) Y(p) = pS(p) \quad (2)$$

где $P(p), Q(p), R(p)$ — полиномы степени $\leq n$, а $S(p)$ — полином, содержащий начальные значения.

Пусть, например, $R(p)$ — полином степени не меньшей, чем степени полиномов $P(p)$ и $Q(p)$, тогда из (2)

$$Y(p) = \frac{pS(p)}{R(p)} - \frac{Q(p)}{R(p)} p \frac{d}{dp} \left[\frac{Y(p)}{p} \right] - \frac{P(p)}{R(p)} p \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{Y(p)}{p} \right] \quad (3)$$

Найдем оригиналы отдельных членов соотношения (3). Пусть для простоты корни $R(p)$ простые. Тогда

$$Y(p) \rightarrow \div y(t), \frac{pS(p)}{R(p)} = \sum_r k_r \frac{p}{p - p_r} \rightarrow \sum_r k_r e^{p_r t} \quad (4)$$