ОБ АКУСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТКОЛА

М. И. Гусейн-Заде

(Москва)

Возможность решения задачи об отколе в акустическом приближении указана В. С. Ленским [1]. Ниже строится решение указанной задачи при помощи метода неполного разделения переменных [1,2] и операционного исчисления.

Пусть в некоторой точке поверхности плиты $z = 0$ в момент времени $t = 0$ приложена сила $P(t)$, а нижняя поверхность плиты свободна от напряжений.

Построим сначала решение для единичной включенной силы

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geqslant 0) \end{cases}$$

от которого легко перейти к произвольному изменению силы во времени.

В самом деле, если $\sigma^*(r, z, t)$ дает распределение напряжений при действии единичной включенной силы, то производная $\sigma_t^*(r, z, t)$ будет соответствовать напряжениям от единичного импульса. Напряжения от силы $P(t)$ ($P(t) \neq 0$ при $0 \leqslant t < \varepsilon$ $P(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $t > \varepsilon$) будут определяться по формуле

$$\sigma(r, z, t) = \int_0^\varepsilon P(\tau)\, \sigma_t^*(r, z, t-\tau)\, d\tau$$

Интегрируя по частям и заменяя переменную интегрирования, представим последнюю формулу в виде

$$\sigma(r, z, t) = P(0)\, \sigma^*(r, z, t) + \int_{t-\varepsilon}^{t} P'(t - t_1)\, \sigma^*(r, z, t_1)\, dt_1 \tag{1}$$

Аналогичная формула имеет место и для смещений.

Предположим сначала, что по верхней поверхности плиты действует распределенное по радиусу давление

$$\sigma(r, 0, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{n^2}{(1 + n^2R^2)^{3/2}}\, \delta(t)$$

В пределе при $n \to \infty$ получим единичную включенную силу.

Решение волнового уравнения (c — скорость звука) для потенциала смещений φ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

при нулевых начальных данных и указанных граничных условиях построим, полагая

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^\infty \Phi(k, z, t)\, I_0(kr)\, dk, \qquad \overline{\Phi}(r, z, s) = \int_0^\infty \Phi(k, z, t)\, e^{-st}\, dt$$

Для функции $\overline{\Phi}(k, z, s)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид:

$$\overline{\Phi}(k, z, s) = \frac{c^2}{2\pi\lambda} k e^{-k/n} \frac{\overline{\delta}(s)}{s^2} \left[-\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\theta_m(k, z, s)} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\vartheta_m(k, z, s)} \right]$$

$$\theta_m(k, z, s) = (2mh + z)\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{c^2}}, \qquad \vartheta_m(k, z, s) = (2mh - z)\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{c^2}}$$

где h — толщина слоя, λ — постоянная Ламе, а $\overline{\delta}(s) = 1/s$.

Применяя теорему обращения, представим потенциал смещений в виде

$$\varphi(r, z, t) = \frac{c^2}{2\pi\lambda}\left\{ -\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty k e^{-k/n} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\overline{\delta}(s)}{s^2} e^{-\theta_m(k, z, s)+st}\, ds \right] I_0(kr)\, dk + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty k e^{-k/n} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\overline{\delta}(s)}{s^2} e^{-\vartheta_m(k, z, s)+st}\, ds \right] I_0(kr)\, dk \right\}$$

Из операционного исчисления известно, что каждый член указанных рядов становится отличным от нуля лишь с того времени, как начинают выполняться неравенства

$$-2mh - z + t \geqslant 0, \qquad \text{или} \qquad -2mh + z + t \geqslant 0$$

Прямая волна и волны, отраженные от верхней поверхности, входят в первую сумму; волны, отраженные от нижней поверхности, входят во вторую сумму.

После перехода в контурных интегралах к новой переменной интегрирования $\zeta = s/k$ напряжение σ^* (r, z, t) можно представить следующим образом:

$$\sigma^*(r, z, t) = \frac{\lambda}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{-\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} k^2 e^{-k/n}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{\delta}(k\zeta)\, e^{-\theta_m(k, z, k\zeta)+k\zeta t}\, d\zeta\right] I_0(kr)\, dk + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty} k^2 e^{-k/n}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{\delta}(k\zeta)\, e^{-\vartheta_m(k, z, k\zeta)+k\zeta t}\, d\xi\right] I_0(kr)\, dk\right.$$

Для решения задачи об отколе представляет интерес определить напряжения вдоль оси $(r = 0)$ для двух волн: прямой и отраженной от нижней плоскости плиты.

От прямой, параллельной мнимой оси плоскости ξ, вдоль которой берутся контурные интегралы, путем непрерывной деформации без пересечения особых точек подынтегральных функций можно перейти к таким контурам l, на которых возможно переставлять порядки интегрирования и выполнять интегрирование по переменной k [3]. Выполняя указанные операции и полагая $n = \infty$, получим для прямой волны

$$\sigma_I^*(0, z, t) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{\xi\left[z\sqrt{1+\frac{\xi^2}{c^2}} - \xi t\right]^2}\, d\xi$$

для отраженной волны

$$\sigma_{II}^*(0, z, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{\xi\left[z(2h - z)\sqrt{1+\frac{\xi^2}{c^2}} - \xi t\right]^2}\, d\xi$$

Подынтегральные выражения в последних соотношениях имеют справа от контура интегрирования по одному действительному полюсу. Применяя теорему о вычетах, получим

$$\sigma_I^*(0, z, t) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{z^2}\,\delta\left(t - \frac{z}{c}\right), \qquad \sigma_{II}(0, z, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(2h - z)^2}\,\delta\left(t - \frac{2h - z}{c}\right)$$

При помощи формулы (1) найдем напряжения от действия силы $P(t)$ $(P(t) \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$; $P(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $t > \varepsilon)$

$$\sigma_I(0, z, t) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{z^2}\,P\left(t - \frac{z}{c}\right), \qquad \sigma_{II}(0, z, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(2h - z)^2}\,P\left(t - \frac{2h - z}{c}\right)$$

В голове фронта прямой волны в отличие от результата, даваемого формулой (3) статьи [1], при любом z всегда получаются сжимающие напряжения:

$$\sigma_{II}^{\text{фр}} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{z^2}\,P(0)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае лицевой откол не может возникнуть. Что касается тыльного откола, то он может быть объяснен появлением растягивающих напряжений при отражении от нижней поверхности плиты.

При произвольном законе изменения силы $P(t)$ растягивающие напряжения необязательно будут впервые достигать разрушающих значений на фронте отраженной волны. Это будет иметь место, например, тогда, когда $P(0)$ является наибольшим значением. В этом случае для определения глубины z_0 тыльного откола приравняем напряжения в голове фронта отраженной волны величине разрушающего напряжения σ_p.

Получим следующее уравнение для определения z_0:

$$-\frac{1}{z_0^2}P\left(\frac{2h-2z_0}{c}\right)+\frac{1}{(2h-z_0)^2}P(0)=2\pi\sigma_p$$

Если $P(t)$ изменяется во времени по треугольному закону

$$P(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ P(0)(1-t/\varepsilon) & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0 & t>\varepsilon\end{cases}$$

то уравнение для определения z_0 упрощается и принимает вид:

$$-\frac{1}{z_0^2}\left(1-\frac{2(h-z_0)}{\varepsilon c}\right)+\frac{1}{(2h-z_0)^2}=\frac{2\pi}{P(0)}\sigma_p$$

Полученное нами решение отлично от решения [1]. Это объясняется тем, что в работе [1] подыскивается такое решение волновых уравнений, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям, граничным условиям на плоскости $z=0$ (кроме точки $r=0$) и содержит произвольную постоянную в виде множителя, определяемую из условия, что предел равнодействующей напряжений по поверхности полусферы с центром в точке $r=0$, $z=0$ при стремлении радиуса полусферы к нулю равен $P(t)$. Последнее условие является лишь необходимым и не обеспечивает правильного выбора решения.

В результате оказывается, что решение не удовлетворяет другому необходимому условию: равенству нулю предела равнодействующей сил инерции в направлении оси z для полусферы с центром в начале координат при стремлении радиуса полусферы к нулю. Кроме того, получается, что равнодействующая сил инерции в радиальном направлении для части полусферы, вырезанной двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии, оказывается бесконечно большой для любого конечного радиуса.

Поступила 25 II 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленский В. С. Акустический вариант теории откола. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
2. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, вып. 24, № 149, 1951.
3. Петрашень Г. И. О рациональном методе решения задач динамической теории упругости в случае слоисто-изотропных областей с плоско-параллельными границами раздела. Уч. зап. ЛГУ, № 208, вып. 30, 1956.

КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО БРУСА С ДВУМЯ ВРЕЗАМИ

Е. А. Ширяев

(Ленинград)

Рассматривается однородный изотропный круглый брус с двумя врезами (трещинами) по диаметру. Решение осуществляется на основе конформного отображения [1].

1. Отображающая функция. Конформное отображение круга $|\zeta|\leqslant 1$ на круг единичного радиуса с двумя разрезами по диаметру от точки $+1$ до точки α_1 и от точки -1 до точки α_2 (фиг. 1) осуществляется функцией

$$z=\sqrt{\frac{d}{a}}\,\frac{1+2a\zeta+\zeta^2-b\sqrt{1+2c\zeta^2+\zeta^4}}{1+2d\zeta+\zeta^2}\tag{1.1}$$

где

$$a=\cos\beta\cos\delta,\qquad b=\sin\delta,\qquad c=-\cos 2\beta,\qquad d=\frac{\cos\beta}{\cos\delta}\tag{1.2}$$

$$\cos\beta=\frac{2m}{1+m^2},\quad \sin\beta=\frac{1-m^2}{1+m^2},\quad \cos\delta=\frac{2n}{1+n^2},\quad \sin\delta=\frac{1-n^2}{1+n^2}$$

$$m=\frac{1-\alpha_1\alpha_2-\sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}{\alpha_1-\alpha_2},\qquad n=\frac{1+\alpha_1\alpha_2-\sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}{\alpha_1+\alpha_2}\tag{1.3}$$