

## ОБ УПРОЧНЕНИИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Хуан Кэ-чжи

(Москва — Пекин)

В работе Прагера [1] был предложен закон упрочнения жестко-пластического материала. По этому закону поверхность текучести поступательно передвигается в пространстве напряжений. Будианский [2] заметил, что этот закон для двухмерного напряженного состояния противоречит предположению о первоначальной изотропии материала. В данной заметке закон деформации для плоского напряженного состояния трактуется как частный случай закона для трехмерного напряженного состояния.

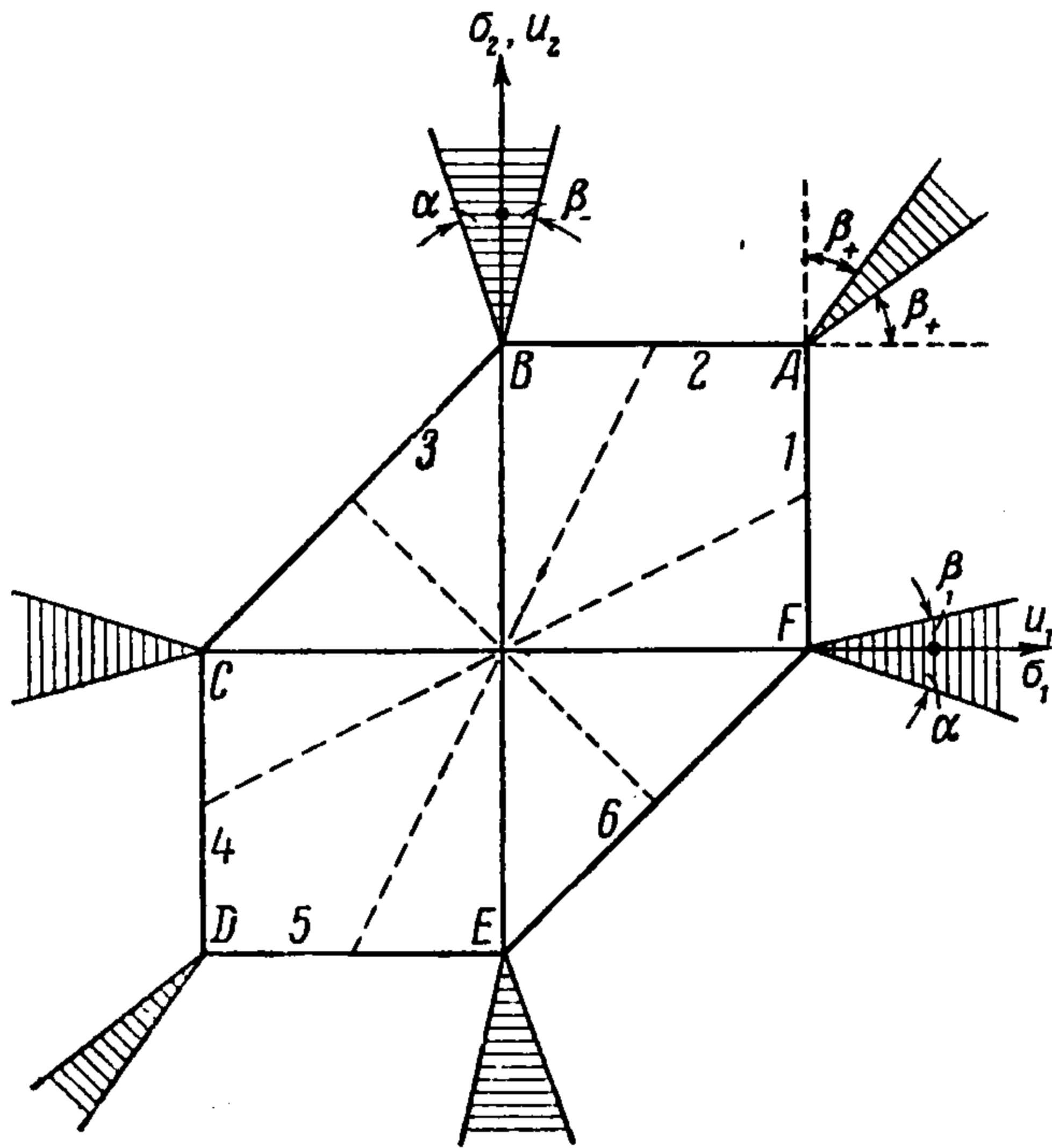
Обозначим через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  компоненты напряжения, через  $e_1, e_2, e_3$  — компоненты деформации. Условие первоначальной текучести Треска изображается шестиугольной призмой в пространстве напряжений и записывается в виде

$$Q = \max_{1 \leq i \leq 6} f_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f_{i^*}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Здесь

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3, \quad f_2 = \sigma_2 - \sigma_3, \quad f_3 = \sigma_2 - \sigma_1, \\ f_4 = \sigma_3 - \sigma_1, \quad f_5 = \sigma_3 - \sigma_2, \quad f_6 = \sigma_1 - \sigma_2$$

Величина  $Q$  характеризует размер призмы, а  $i^*$  указывает, на какой плоскости находится точка напряжения. В процессе упрочнения, которое предполагается линейным, шестиугольная призма изменяется подобным образом с подвижной осью подобия. Пусть  $c'$  — модуль линейного упрочнения по Прагеру,  $c''$  — модуль линейного изотропного упрочнения. Тогда компоненты перемещения оси призмы будут  $c'e_1, c'e_2, c'e_3$ .



Закон деформации имеет вид (точкой обозначаем производную по времени)

$$(a) \quad c'' \dot{e}_\alpha = \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_\alpha} \dot{Q} \quad (\alpha=1, 2, 3)$$

$$Q = f_i(\sigma_1 - c'e_1, \sigma_2 - c'e_2, \sigma_3 - c'e_3) \quad (1)$$

если точка напряжения остается на плоскости  $i$ , или

$$(b) \quad c'' \dot{e}_\alpha = \left( \mu \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_\alpha} + \nu \frac{\partial f_j}{\partial \sigma_\alpha} \right) \dot{Q} \quad (\alpha=1, 2, 3, \mu+\nu=1) \quad (2)$$

$$Q = f_i(\sigma_1 - c'e_1, \sigma_2 - c'e_2, \sigma_3 - c'e_3) = f_j(\sigma_1 - c'e_1, \sigma_2 - c'e_2, \sigma_3 - c'e_3)$$

если точка напряжения находится на ребре, представляющем собой пересечение плоскостей  $i$  и  $j$ . Из уравнений (1) и (2) получим

$$(a) \quad \dot{e}_\alpha = \frac{1}{d} \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_\alpha} \dot{f}_i \quad (\alpha=1, 2, 3), \quad \dot{Q} = \lambda \dot{f}_i \quad (3)$$

$$(b) \quad \dot{e}'_\alpha = \frac{4}{d(1-\lambda)(3+\lambda)} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_\alpha} \dot{f}_i + \frac{\partial f_j}{\partial \sigma_\alpha} \dot{f}_j - \frac{1+\lambda}{2} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_\alpha} \dot{f}_j + \frac{\partial f_j}{\partial \sigma_\alpha} \dot{f}_i \right) \right] \\ \dot{Q} = \frac{2\lambda}{3+\lambda} [\dot{f}_i + \dot{f}_j] \quad (4)$$

где

$$\dot{f}_i = \dot{f}_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad d = 2c' + c'', \quad \lambda = \frac{c''}{d} \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

Случай  $\lambda = 0$  соответствует упрочнению по Прагеру, а случай  $\lambda = 1$  соответствует изотропному упрочнению.

Если в какой-либо момент точка напряжения находится на ребре шестиугольной призмы, то она и далее останется на этом ребре при условии

$$\frac{2\lambda}{3+\lambda} (\dot{f}_i + \dot{f}_j) > \lambda \dot{f}_i, \quad \frac{2\lambda}{3+\lambda} (\dot{f}_i + \dot{f}_j) > \lambda \dot{f}_j$$

или перейдет на плоскость  $i$  (или  $j$ ), когда

$$\lambda \dot{f}_i \text{ (или } \lambda \dot{f}_j) > \frac{2\lambda}{3+\lambda} (\dot{f}_i + \dot{f}_j), \quad \lambda \dot{f}_i \text{ (или } \lambda \dot{f}_j) > \lambda \dot{f}_j \text{ (или } \lambda \dot{f}_i)$$

Рассмотрим плоское напряженное состояние ( $\sigma_3 = 0$ ). Условие текучести Треска на плоскости ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) может быть представлено шестиугольником  $ABCDEF$ , как это изображено на фигуре, где

$$\alpha = \arctg \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad \beta_+ = \arctg \frac{1+\lambda}{2}, \quad \beta_- = \arctg \frac{1-\lambda}{2}$$

На основе уравнений (3) и (4) можно найти закон деформации для плоского напряженного состояния в виде, указанном в таблице.

Режим	Закон деформации	Скорость выпучивания шестиугольника
$F$	$\dot{e}_1 = \frac{4}{d(3+\lambda)} [\dot{\sigma}_1 - \frac{1}{2} \dot{\sigma}_2]$ $\dot{e}_2 = \frac{4}{d(1-\lambda)(3+\lambda)} [\dot{\sigma}_2 - \frac{1-\lambda}{2} \dot{\sigma}_1]$ $\dot{\sigma}_1 = d [\dot{e}_1 + \frac{1-\lambda}{2} \dot{e}_2]$ $\dot{\sigma}_2 = d(1-\lambda) [\dot{e}_2 + \frac{1}{2} \dot{e}_1]$	$\dot{Q} = \frac{2\lambda}{3+\lambda} (2\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2)$
$FA$	$\dot{e}_1 = \dot{\sigma}_1/d, \quad \dot{e}_2 = 0; \quad \dot{\sigma}_1 = d\dot{e}_1$	$\dot{Q} = \lambda \dot{\sigma}_1$
$A$	$\dot{e}_1 = \frac{4}{d(1-\lambda)(3+\lambda)} [\dot{\sigma}_1 - \frac{1+\lambda}{2} \dot{\sigma}_2]$ $\dot{e}_2 = \frac{4}{d(1-\lambda)(3+\lambda)} [\dot{\sigma}_2 - \frac{1+\lambda}{2} \dot{\sigma}_1]$ $\dot{\sigma}_1 = d [\dot{e}_1 + \frac{1+\lambda}{2} \dot{e}_2]$ $\dot{\sigma}_2 = d [\dot{e}_2 + \frac{1+\lambda}{2} \dot{e}_1]$	$\dot{Q} = \frac{2\lambda}{3+\lambda} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2)$
$AB$	$\dot{e}_1 = 0, \quad \dot{e}_2 = \frac{\dot{\sigma}_2}{d}; \quad \dot{\sigma}_2 = d\dot{e}_2$	$\dot{Q} = \lambda \dot{\sigma}_2$
$B$	$\dot{e}_1 = \frac{4}{d(1-\lambda)(3+\lambda)} [\dot{\sigma}_1 - \frac{1-\lambda}{2} \dot{\sigma}_2]$ $\dot{e}_2 = \frac{4}{d(3+\lambda)} [\dot{\sigma}_2 - \frac{1}{2} \dot{\sigma}_1]$ $\dot{\sigma}_1 = d(1-\lambda) [\dot{e}_1 + \frac{1}{2} \dot{e}_2]$ $\dot{\sigma}_2 = d [\dot{e}_2 + \frac{1-\lambda}{2} \dot{e}_1]$	$\dot{Q} = \frac{2\lambda}{3+\lambda} (2\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1)$
$BC$	$\dot{e}_1 = \frac{\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2}{d}, \quad \dot{e}_2 = \frac{\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1}{d}$ $\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1 = d\dot{e}_2 = -d\dot{e}_1$	$\dot{Q} = \lambda (\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1)$

Компоненты перемещения центра шестиугольника  $u_1, u_2$  в плоскости  $\sigma_1, \sigma_2$  связаны с компонентами перемещения] оси призмы  $c'e_1, c'e_2, c'e_3$  в пространстве ( $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ )

$$u_1 = c' (2e_1 + e_2) = d(1-\lambda) (e_1 + \frac{1}{2} e_2), \quad u_2 = c' (2e_2 + e_1) = d(1-\lambda) (e_2 + \frac{1}{2} e_1) \quad (5)$$

Отсюда вытекает, что если точка напряжения находится на стороне шестиугольника, то при упрочнении центр шестиугольника будет двигаться по направлению линии, соединяющей центр и срединную точку стороны. Точка напряжения будет посто-

янно находиться на ребре, если вектор приращения напряжения лежит в области в виде клина, указанного на фигуре. Приведем простейшие примеры.

*Пример 1.* Простое растяжение  $\sigma_1 = \varphi(t)$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  ( $\dot{\varphi} > 0$ ). Деформация будет:

$$e_1 = \frac{4}{d(3+\lambda)}(\varphi - \sigma_0), \quad e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2} \quad (\text{режим } F) \quad (6)$$

где  $\sigma_0$  — первоначальный предел текучести.

*Пример 2.* Двухмерное сжатие  $\sigma_1 = \sigma_2 = -\varphi(t)$ ,  $\sigma_3 = 0$  ( $\dot{\varphi} > 0$ ). Деформация будет

$$e_3 = \frac{4}{d(3+\lambda)}(\varphi - \sigma_0), \quad e_1 = e_2 = -\frac{e_3}{2} \quad (\text{режим } D) \quad (7)$$

Сопоставляя выражения (6) и (7), видим, что указанного Будянским<sup>[2]</sup> противоречия здесь не будет.

*Пример 3.* Круглая пластинка под действием равномерного давления  $p$  с опертым краем. Приведем результаты только для случаев  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$ . В случае изотропного упрочнения ( $\lambda = 1$ ) решение совпадает с результатом Ходжа<sup>[3]</sup>, у которого параметр  $\lambda$  обозначен через  $\alpha$ . В случае упрочнения по Прагеру ( $\lambda = 0$ ) решение будет

$$\begin{aligned} \frac{cw}{M_0 R^2} &= -\frac{3}{32} P (1 + 3\rho_1^4 - \rho_2^4 - 8\rho_1^3\rho_2 + 6\rho_1^2\rho_2^2 - \rho^4) \\ &\quad - K_1 (1 - \rho_2^2) + \left(K_2 - \frac{1}{4}\rho_2^2\right) \ln \rho_2 \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ &= -\frac{3}{32} P (1 - \rho_2^4 - 8\rho_1^3\rho_2 + 8\rho_1^3\rho) - K_1 (1 - \rho_2^2) + \\ &\quad + \left(K_2 - \frac{1}{4}\rho_2^2\right) \ln \rho_2 \quad \text{при } \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ &= -\frac{3}{32} P (1 - \rho^4) - \frac{1}{4}\rho^2 \ln \rho - K_1 (1 - \rho^2) + K_2 \ln \rho \quad \text{при } \rho_2 \leq \rho \leq 1 \\ \frac{M_r}{M_0} &= 1 + \frac{3}{16} P (9\rho_1^2 - 7\rho^2) \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ &= 1 + \frac{1}{8} P \rho^{-1} (11\rho_1^3 - 8\rho^3) + \frac{3}{4} P \rho_1^3 \rho^{-1} \ln \frac{\rho}{\rho_1} \quad \text{при } \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ &= \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \ln \rho - \frac{21}{16} P \rho^2 - 3K_1 + \frac{1}{2} K_2 \rho^{-2} \quad \text{при } \rho_2 \leq \rho \leq 1 \\ \frac{M_\theta}{M_0} &= 1 + \frac{3}{16} P (9\rho_1^2 - 5\rho^2) \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ &= 1 + \frac{3}{4} P \rho_1^3 \rho^{-1} \quad \text{при } \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ &= \frac{13}{8} + \frac{3}{4} \ln \rho - \frac{15}{16} P \rho^2 - 3K_1 - \frac{1}{2} K_2 \rho^{-2} \quad \text{при } \rho_2 \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$c = \frac{dh^3}{12}, \quad M_0 = \frac{\sigma_0 h^2}{4}, \quad P = \frac{p}{p_0} = \frac{pR^2}{6M_0}, \quad \rho = \frac{r}{R}$$

$R$  — радиус пластинки,  $h$  — толщина,  $w$  — прогиб,  $M_r$ ,  $M_\theta$  — изгибающие моменты,

$$K_1 = -[6\rho_2^2 - 14 + 4\rho_2^2 \ln \rho_2 + 3P(7 - 3\rho_2^4)] / 16(3 - \rho_2^2)$$

$$K_2 = \rho_2^2 [3P(9\rho_2^2 - 7) - 4(1 + 3 \ln \rho_2)] / 8(3 - \rho_2^2)$$

и  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  определяются из уравнений

$$3P\rho_1^3(3\rho_2^{-1} - \rho_2) = 3P(7 + \rho_2^2)(1 - \rho_2^2) - 2(1 - \rho_2^2) + 12 \ln \rho_2$$

$$P\rho_1^3 \left(11 + 6 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) (3\rho_2^{-1} - \rho_2) = P(21 + 6\rho_2^2 - 11\rho_2^4) - 26 + 10\rho_2^2 + 12 \ln \rho_2$$

В начале текучести ( $P = 1$ )  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 1$ ; при  $P \rightarrow \infty$   $\rho_1$ ,  $\rho_2$  стремятся к пределу  $\sqrt{7}/3$ . При  $P = 1.5$  имеем  $\rho_1 = 0.5708$ ,  $\rho_2 = 0.9670$  и решение (8) очень близко к результату Ходжа<sup>[3]</sup> для промежуточного случая  $\alpha = 0.5$ .

Поступила 9 IV 1958

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Prager H. A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids. Journal of Applied Mechanics, vol. 23, No. 4, 1956.
2. Budiansky B. Discussion on the Prager's paper. Journal of Applied Mechanics, vol. 24, No. 3, 1957.
3. Hodge P. G. Jr. Discussion on the Prager's paper. Journal of Applied Mechanics, vol. 24, No. 3, 1957.