Так как согласно (11) имеем $\psi_k(A)E_k = 0$, то

$$\Phi(A)E_k = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

или

$$\Phi(A)\|E_1, \ldots, E_n\| = \Phi(A)E = \Phi(A) = 0 \tag{23}$$

что и доказывает наше утверждение.

Все различные корни уравнения $|A - \lambda E| = 0$ являются корнями минимального многочлена матрицы A, поэтому среди корней многочленов $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, ... $\psi_n(\lambda)$ найдутся все различные корни векового уравнения.

Поступила 3 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем. Изд. АН СССР, 1931, Серия физ.-мат., стр. 491—539.
2. Лузин Н. Н. О методе акад. А. Н. Крылова составления векового уравнения. Изд. АН СССР, Серия физ.-мат., 1931, стр. 903—958.
3. Хлодовский И. Н. К теории общего случая преобразования векового уравнения методом акад. А. Н. Крылова. Изд. АН СССР, Серия физ.-мат., 1933, стр. 1077—1102.
4. Гантмахер Ф. Р. К алгебраическому анализу метода акад. А. Н. Крылова преобразования векового уравнения. Труды Всесоюзного математического съезда, т. II, стр. 45—58, 1934.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1953, стр. 167—177.

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ФОРМ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

А. С. Кондратьев

(Куйбышев)

1. Рассмотрим стержень переменной жесткости, сжатый осевой нагрузкой $Pf(x)$; функция $f(x)$ предполагается кусочно-непрерывной положительной.

В 1923 г. Трефц [1] показал, что прогибы $y(x)$ этого стержня удовлетворяют однородному интегральному уравнению

$$y'(x) = P\int_0^l K_{11}(x, s)\, y'(s)\, d\sigma(s), \qquad (d\sigma(s) = f(s)\, ds) \tag{1.1}$$

в котором $K(x, s)$ — функция влияния стержня, l — длина стержня и $K_{11}(x, s)$ — смешанная производная от функции влияния.

Известно, что ядро уравнения (1.1) является положительно определенным [2]. Следовательно, собственные значения его все положительны. Эти значения P_k суть «критические силы» стержня, а собственные функции $y_k'(x) = z_k(x)$ определяют возможные формы равновесия, соответствующие этим «критическим силам».

В случаях, когда: а) один конец стержня жестко закреплен, а другой свободен и б) один конец жестко защемлен, а другой жестко закреплен, функция $K_{11}(x, s)$ является функцией Грина системы Штурма-Лиувилля и поэтому она оказывается осцилляционной. Следовательно, при таких граничных условиях для функций $z_k(x)$ имеет место комплекс осцилляционных теорем.

Другие виды граничных условий требуют особого рассмотрения.

2. Возьмем случай, когда оба конца стержня шарнирно закреплены.

В этом случае $K_{11}(x, s)$ будет удовлетворять всем условиям обобщенной функции Грина краевой задачи

$$(EIz')' = -Pf(x)\, z, \qquad z'(0) = z'(l) = 0 \tag{2.1}$$

Поэтому все собственные значения (2.1), кроме $z_0 = l^{-1/2}$, будут и собственными функциями уравнения (1.1).

Перепишем (2.1) в таком виде:

$$(EIz')' - \delta fz = - P^\circ fz, \qquad z'(0) = z'(l) = 0 \tag{2.2}$$

где выбрано $\delta < P_1$ и введено обозначение $P^\circ = P + \delta$. Теперь уже $P = 0$ не будет собственным значением для (2.2), в силу чего для нее может быть построена функция Грина $G(x, s)$ в обычном смысле. Ядро $G(x, s)$ является осцилляционным, так как оно положительно-определенно и является функцией Грина задачи Штурма—Лиувилля.

Построим теперь ядро

$$Q(x, s) = \sqrt{f(x) f(s)}\, K_{11}(x, s) + \frac{1}{\delta l \sqrt{f(x) f(s)}} \tag{2.3}$$

которое в силу того, что

$$\int_0^l K_{11}(x, s)\, ds = 0$$

будет обладать теми же собственными функциями, что и ядро $G(x, s)$. Они будут отличаться множителем $[f(x)]^{-1/2}$.

Таким образом, ясно, что хотя ядро $K_{11}(x, s)$ в случае шарнирных закреплений концов и не является осцилляционным, но если добавить к его собственным функциям в качестве первой $[lf(x)]^{-1/2} = z^\circ(x)$ и соответственно номер каждой функции увеличить на единицу, то полученная так система собственных функций будет обладать комплексом осцилляционных свойств.

Используя доказанное, мы покажем, что при достаточно малом δ ядро (2.3) окажется осцилляционным.

Действительно, в силу доказанного собственные функции $z^\circ(x)$, $z_2(x)$, ... ядра (2.3) образуют систему Чебышева, поэтому определитель

$$\Delta \begin{pmatrix} z^\circ(x) & z_2 \ldots z_n \\ x_1 & x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$$

должен отличаться от нуля при всевозможных $x_1 < \ldots < x_n$ из $(0, l)$. Пользуясь известным разложением [3] для положительно-определенных ядер, имеем

$$Q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ x_1 & x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_n} \frac{1}{P_{i_1} \ldots P_{i_n}} \Delta^2 \begin{pmatrix} z_{i_1} \ldots z_{i_n} \\ x_1 \ldots z_n \end{pmatrix} > 0 \tag{2.4}$$

Далее составим функцию

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k Q(x, s_k) = \sum_{k=1}^{n} F_k K_{11}(x, s_k) + \frac{\sigma}{l\delta \sqrt{f(x)}}, \qquad \sigma = \sum_{k=1} \frac{F_k}{\sqrt{f(s_k)}} \tag{2.5}$$

которая при достаточно малом δ и $\sigma \neq 0$ будет иметь не более чем $n-1$ знакоперемен, что и нужно.

Последнее будет иметь место и для всех других случаев граничных условий.

3. Возьмем случай, когда первый конец стержня жестко закреплен и другой шарнирно закреплен. Для такого стержня функцию влияния углов поворота $K_{11}^*(x, s)$ можно рассматривать как тангенс угла поворота сечения в точке x для стержня с шарнирно закрепленными концами, на который действует сосредоточенная в точке s единичная пара и пара сил с каким-то моментом, приложенным в точке l.

Это позволяет получить связь между $K_{11}^*(x, s)$ и $K_{11}(x, s)$:

$$K_{11}^*(x, s) = \frac{1}{K_{11}(l, l)} \begin{vmatrix} K_{11}(x, s) & K_{11}(x, l) \\ K_{11}(l, s) & K_{11}(l, l) \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

Как и в случае шарнирно закрепленных концов, покажем осцилляционность функции

$$Q(x, s) = \sqrt{f(x) f(s)}\, K_{11}^*(x, s) + \frac{1}{l\delta \sqrt{f(x) f(s)}} \tag{3.2}$$

Приняв во внимание (3.1), получим формулу

$$Q(l, l) = \frac{1}{K_{11}(x, s)} \begin{vmatrix} K_{11}(l, l) & \sqrt{f(s)}\, K_{11}(l, s) \\ \sqrt{f(x)}\, K_{11}(x, l) & R(x, s) \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

где

$$R(x, s) = \sqrt{f(x) f(s)}\, K_{11}(x, s) + \frac{1}{l\delta \sqrt{f(x) f(s)}}$$

Пользуясь тождеством Сильвестра для определителей, находим

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix},$$

$$+\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sqrt{f(x_j)}\, K_{11}(x_j, l) \begin{vmatrix} \sqrt{f} K_{11}(l, x_1) \ldots \sqrt{f} K_{11}(l, x_n) \\ R(x_1, x_1) \ldots R(x_1, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R(x_{j-1}, x_1) \ldots R(x_{j-1}, x_n) \\ R(x_{j+1}, x_1) \ldots R(x_{j+1}, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R(x_n, x_1) \ldots R(x_n, x_n) \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Относительно δ^{-1} определитель

$$R\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

представляет собой многочлен n степени, а остальное выражение в правой части (3.4) — многочлен $n-1$ степени. Вследствие этого при достаточно большом значении δ^{-1} знак определителя (3.4) должен совпадать со знаком (3.5). Но нам известно, что при достаточно большом δ^{-1} определитель (3.5) имеет положительный знак, следовательно, и (3.4) окажется положительным, что и нужно.

Если за $K_{11}(x, s)$ принять функцию влияния углов поворота для стержня с одним шарнирно закрепленным и другим жестко закрепленным концами, а за $K_{11}^*(x, s)$ функцию влияния углов поворота стержня с жестко закрепленными концами, то, повторив приведенные рассуждения, найдем, что и при жестко закрепленных концах и при достаточно больших δ^{-1} определитель (3.4) окажется положительным.

Таким образом, осцилляционность функции (2.3) для рассмотренных в этом разделе случаев закрепления доказана. Это имеет место и для случая жесткого закрепления и упругого защемления концов.

Следовательно, относительно «критических сил» и производных от функций, которыми определяются формы равновесия стержня, можно утверждать, что они обладают такими же осцилляционными свойствами, как и в случае стержня с шарнирно закрепленными концами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trefftz E. Z. f. ang. Math. u. Mech., 3, 272, 1923.
2. Нудельман Я. Л. Интегральные уравнения в теории продольного изгиба. ПММ, т. III, вып. 1, 1936.
3. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционые матрицы и ядра и малые колебания механических систем. ГИТЛ, 1950.
4. Меляховецкий А. С. Осцилляционные свойства колебаний сжатого стержня. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.