К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ВЕКОВОГО УРАВНЕНИЯ

Я. С. Гольдбаум

(Ленинград)

Основываясь на соображениях из теории интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений, А. Н. Крылов [1] нашел способ приведения определителя $|A-\lambda E|$ к такому виду, где λ входит лишь в элементы одной строки. Алгебраическому анализу преобразования А. Н. Крылова посвящен ряд работ [2,3,4]. В настоящей заметке предлагается новый, совершенно элементарный способ такого преобразования. Не требуя знания вспомогательного материала, этот способ, на наш взгляд, является наиболее алгебраичным из известных.

1. Пусть A — вещественная матрица n-го порядка, x — вещественный столбцевой вектор (с n компонентами). Предположим, что столбцевые векторы

$$x,\ Ax,\ A^2x, \ldots, A^{n-1}x \tag{1}$$

линейно независимы. Тогда матрица

$$X = \| x,\ Ax,\ A^2x,\ \ldots,\ A^{n-1}x \| \tag{2}$$

неособенная.

Составим произведение матриц

$$(A-\lambda E)\,X = \| Ax-\lambda x,\quad A^2x-\lambda Ax, \ldots, A^nx-\lambda A^{n-1}x \| \tag{3}$$

Переходя к определителям, мы можем получить путем «окаймления»

$$|A-\lambda E|\;|X| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & Ax-\lambda x & A^2x-\lambda Ax & \ldots & A^nx-\lambda A^{n-1}x \end{vmatrix} \tag{4}$$

Преобразуем полученный определитель следующим образом. Первый столбец умножим на λ и прибавим ко второму; полученный второй столбец умножим на λ и прибавим к третьему; полученный третий столбец умножим на λ и прибавим к четвертому и т. д. В результате найдем

$$|A-\lambda E|\;|X| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \ldots \lambda^n \\ x & Ax & A^2x \ldots A^nx \end{vmatrix} \tag{5}$$

Так как $|X| \neq 0$, то

$$|A-\lambda E| = \frac{1}{|X|}\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \ldots \lambda^n \\ x & Ax & A^2x \ldots A^nx \end{vmatrix} \tag{6}$$

В полученном определителе λ входит лишь в элементы первой строки. В этом и состоит преобразование А. Н. Крылова в так называемом «регулярном» случае [5].

2. Вектор A^nx можно представить как линейную комбинацию векторов (1):

$$A^nx = p_1A^{n-1}x + p_2A^{n-2}x + \ldots + p_{n-1}Ax + p_nx \tag{7}$$

Обозначим

$$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n = f(\lambda)$$

Умножая в определителе (6) первый столбец на $-p_n$, второй на $-p_{n-1}$, третий на $-p_{n-2}, \ldots$, n-й на $-p_1$ и прибавляя их к последнему столбцу, получим

$$|A-\lambda E| = \frac{1}{|X|}\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} & f(\lambda) \\ x & Ax & A^2x & \ldots & A^{n-1} x & 0 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Отсюда

$$|A-\lambda E| = (-1)^n f(\lambda) \tag{9}$$

Таким образом, для разложения определителя $|A-\lambda E|$ по элементам первой строки достаточно найти коэффициенты соотношения (7). Как известно [5], это можно сделать, не прибегая к вычислению определителей.

3. Рассмотрим так называемый «особый» случай, когда векторы (1) линейно зависимы при всяком выборе x.

Предположим, что векторы

$$x,\ Ax,\ A^2x, \ldots, A^{s-1}x \qquad (s < n) \tag{10}$$

линейно независимы, но

$$A^s x = q_1 A^{s-1} x + q_2 A^{s-2} x + \ldots + q_{s-1} A x + q_s x \tag{11}$$

Покажем, что многочлен

$$\psi(\lambda) = \lambda^s - q_1 \lambda^{s-1} - q_2 \lambda^{s-2} - \ldots - q_{s-1}\lambda - q_s \tag{12}$$

является делителем $|A - \lambda E|$.

Пусть в матрице

$$\| x, Ax, A^2x, \ldots A^{s-1}x \| \tag{13}$$

ранг которой равен s, строки с индексами $m_1, \ldots, m_s$ линейно независимы. Обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_{n-s}$ индексы остальных строк. Пусть E_k — k-й столбец единичной матрицы E.

Составим неособенную матрицу

$$X = \| x, Ax, A^2x, \ldots, A^{s-1}x, E_{v_1}, E_{v_2}, \ldots, E_{v_{n-s}} \| \tag{14}$$

и рассмотрим произведение

$$(A - \lambda E) X = \| Ax - \lambda x, A^2x - \lambda Ax, \ldots, A^s x - \lambda A^{s-1}x, z_{v_1}, z_{v_2}, \ldots, z_{v_{n-s}} \| \tag{15}$$

Переходя к определителям и «окаймляя», получим после уже известных элементарных преобразований со столбцами

$$|A - \lambda E|\ |X| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \ldots \lambda^{s-1} & \lambda^s & 0 & 0 \ldots 0 \\ x & Ax & A^2x \ldots A^{s-1}x & A^s x & z_{v_1} & z_{v_2} \ldots z_{v_{n-s}} \end{vmatrix} \tag{16}$$

Посредством элементарных преобразований над последними n строками этот определитель можно привести к виду

$$\left| \begin{array}{c:c} 1\ \lambda\ \lambda^2 \ldots \lambda^s & 0\ 0 \ldots 0 \\ \hdashline X_{s, s+1} & X_{s, n-s} \\ 0_{n-s, s+1} & X_{n-s, n-s} \end{array} \right| \tag{17}$$

где все элементы блока $0_{n-s, s+1}$ — нули.

Так как $|X| \neq 0$, то из (16) получаем

$$|A - \lambda E| = \frac{|X_{n-s, n-s}|}{|X|} \Delta, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1\ \lambda\ \lambda^2 \ldots \lambda^s \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_{s, s+1} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Отсюда, из первого равенства, видно, что определитель Δ является делителем $|A - \lambda E|$.

Заметим теперь, что столбцы блока $X_{s, s+1}$ связаны тем же линейным соотношением, что и столбцы матрицы (13), а потому определитель Δ приводится при помощи элементарных преобразований со столбцами к виду

$$\left| \begin{array}{c:c} 1\ \lambda\ \lambda^2 \ldots \lambda^{s-1} & \psi(\lambda) \\ \hdashline X_{s,s} & 0 \end{array} \right| \tag{19}$$

Таким образом,

$$|A - \lambda E| = (-1)^s \frac{|X_{n-s, n-s}|\ |X_{ss}|}{|X|} \psi(\lambda) \tag{20}$$

Отсюда видно, что $\psi(\lambda)$ является делителем $|A - \lambda E|$.

Как уже упомянуто, коэффициенты многочлена $\psi(\lambda)$ [т. е. соотношения (11)] можно найти без вычисления определителей.

4. В качестве вектора x возьмем E_k ($k = 1, \ldots, n$) и найдем соответствующие им делители $\psi_k(\lambda)$. Легко видеть, что их общее наименьшее кратное $\Phi(\lambda)$ либо совпадает с минимальным многочленом матрицы A, либо делится на него без остатка.

В самом деле, пусть

$$\Phi(\lambda) = g_k(\lambda)\,\psi_k(\lambda) \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{21}$$

Так как согласно (11) имеем $\psi_k(A)E_k=0$, то

$$\Phi(A)E_k=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{22}$$

или

$$\Phi(A)\|E_1,\ldots,E_n\|=\Phi(A)E=\Phi(A)=0 \tag{23}$$

что и доказывает наше утверждение.

Все различные корни уравнения $|A-\lambda E|=0$ являются корнями минимального многочлена матрицы A, поэтому среди корней многочленов $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda),\ldots\psi_n(\lambda)$ найдутся все различные корни векового уравнения.

Поступила 3 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем. Изд. АН СССР, 1931,Серия физ.-мат., стр. 491—539.
2. Лузин Н. Н. О методе акад. А. Н. Крылова составления векового уравнения. Изд. АН СССР, Серия физ.-мат., 1931, стр. 903—958.
3. Хлодовский И. Н. К теории общего случая преобразования векового уравнения методом акад. А. Н. Крылова. Изд. АН СССР, Серия физ.-мат., 1933, стр. 1077—1102.
4. Гантмахер Ф. Р. К алгебраическому анализу метода акад. А. Н. Крылова преобразования векового уравнения. Труды Всесоюзного математического съезда, т. II, стр. 45—58, 1934.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1953, стр. 167—177.

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ФОРМ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

А. С. Кондратьев

(Куйбышев)

1. Рассмотрим стержень переменной жесткости, сжатый осевой нагрузкой $Pf(x)$; функция $f(x)$ предполагается кусочно-непрерывной положительной.

В 1923 г. Трефц [1] показал, что прогибы $y(x)$ этого стержня удовлетворяют однородному интегральному уравнению

$$y'(x)=P\int_0^l K_{11}(x,s)\,y'(s)\,d\sigma(s), \qquad (d\sigma(s)=f(s)\,ds) \tag{1.1}$$

в котором $K(x,s)$ — функция влияния стержня, l — длина стержня и $K_{11}(x,s)$ — смешанная производная от функции влияния.

Известно, что ядро уравнения (1.1) является положительно определенным [2]. Следовательно, собственные значения его все положительны. Эти значения P_k суть «критические силы» стержня, а собственные функции $y_k'(x)=z_k(x)$ определяют возможные формы равновесия, соответствующие этим «критическим силам».

В случаях, когда: а) один конец стержня жестко закреплен, а другой свободен и б) один конец жестко защемлен, а другой жестко закреплен, функция $K_{11}(x,s)$ является функцией Грина системы Штурма-Лиувилля и поэтому она оказывается осцилляционной. Следовательно, при таких граничных условиях для функций $z_k(x)$ имеет место комплекс осцилляционных теорем.

Другие виды граничных условий требуют особого рассмотрения.

2. Возьмем случай, когда оба конца стержня шарнирно закреплены.

В этом случае $K_{11}(x,s)$ будет удовлетворять всем условиям обобщенной функции Грина краевой задачи

$$(EIz')'=-Pf(x)\,z, \qquad z'(0)=z'(l)=0 \tag{2.1}$$