При выполнении условий (17) выражение (15) принимает вид: (18)

$$y_s(t_1) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau)\, y_k^*(t_1 - \vartheta_1\tau) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\vartheta_1} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau)\, x_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau - \tau)$$

Интересующее нас выражение (12), определяющее при $|x_k(t)| \leqslant L_k$ наибольшее возможное отклонение по некоторой координате y_s в момент времени $t = t_1$, принимает теперь вид:

$$|y_s(t_1)| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau)\, y_k^*(t_1 - \vartheta_1\tau) \right| + \sum_{k=1}^{n} L_k \sum_{j=1}^{\vartheta_1} |Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau)| \qquad (19)$$

где $Y_k(t)$ — решения системы разностных уравнений (13), удовлетворяющие условиям (17). Из указанного вытекает также и метод определения величин $|y_s(t_1)|$ при помощи электронных моделирующих устройств.

Поступила 9 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарднер М. Ф., Бернс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. ГИТТЛ, М., 1949, стр. 327.
2. Булгаков Б. В. Колебания, т. I. ГИТТЛ, М., 1949, стр. 172.
3. Цыпкин Я. З. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, ГЭИ, М., 1951.
4. Ragazzini J. R. and Zadeh L. A. The Analysis of Sampled-data Systems. Transactions of AIEE, vol. 71, pt. II, p. 225, 1952.

НЕЛИНЕЙНОЕ ГАШЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

В. В. Ларичева
(Москва)

Рассматривается нелинейное гашение собственных колебаний систем порядка $2n$.

Линейное гашение собственных колебаний системы второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \delta \qquad (1)$$

заключается в том, что при наличии гасителя $\delta = -2|h|\dot{x}$ имеем линейное уравнение с затухающими решениями

$$\ddot{x} + 2|h|\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Рассмотрим гашение собственных колебаний системы (1) нелинейным (не зависящим от величины $\dot{x}$) гасителем δ.

Пусть система (1) с нелинейным гасителем описывается уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2(1 - k^2)\, x = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = 0$ при $x\dot{x} > 0$, $0 < k^2 < 1$ при $x\dot{x} < 0$. Тогда в моменты времени, соответствующие $\dot{x} = 0$ $(x = x_{\max_n})$, энергия системы (2) уменьшается на конечную величину $^1/_2 k^2\omega^2 x^2_{\max_n}$, и решение x уравнения (2) будет затухающим.

Время затухания x до значения, не превышающего $0{,}05\, x_{\max}$, при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \omega x_{\max}$ определяется формулой

$$t \leqslant \frac{\pi}{2\omega}\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt[m]{0.05}}\right) m + 1\right]$$

Здесь m — число колебаний до затухания, $x_{\max}$ — максимальное по модулю значение x. Описанный способ нелинейного гашения применим для гашения собственных колебаний систем порядка $2n$ без привлечения величин обобщенных скоростей.

Рассмотрим уравнения собственных колебаний системы с двумя степенями свободы без трения в общем случае:

$$\beta_{11}\ddot{x}_1 + \beta_{12}\ddot{x}_2 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0, \beta_{12}\ddot{x} + \beta_{22}\ddot{x}_2 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 = 0 \qquad (3)$$

где

$$\alpha_{11} > 0, \qquad \alpha_{22} > 0, \qquad \alpha_{11}\alpha_{22} > \alpha_{12}^2 \qquad (4)$$

$$\beta_{11} > 0, \qquad \beta_{22} > 0, \qquad \beta_{11}\beta_{22} > \beta_{12}^2 \qquad (5)$$

Неравенства (4) — условия положительности потенциальной энергии системы (3), так как собственные колебания — движение около устойчивого положения равновесия $x_1 = x_2 = 0$. Кинетическая энергия всегда положительна, откуда следуют неравенства (5).

Решение системы (3) имеет вид:

$$x_1 = \xi + \eta, \qquad x_2 = k_1\xi + k_2\eta \tag{6}$$

где

$$\xi = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad \eta = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Здесь A_1, A_2, φ_1, φ_2 определяются начальными условиями, ω_1, ω_2 определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega^2\beta_{11} & \alpha_{12} - \omega^2\beta_{12} \\ \alpha_{12} - \omega^2\beta_{12} & \alpha_{22} - \omega^2\beta_{22} \end{vmatrix} = 0$$

корни которого действительны в силу неравенств (4), (5). Коэффициенты распределения амплитуд

$$k_1 = -\frac{\alpha_{11} - \omega_1^2\beta_{11}}{\alpha_{12} - \omega_1^2\beta_{12}} = -\frac{\alpha_{12} - \omega_1^2\beta_{12}}{\alpha_{22} - \omega_1^2\beta_{22}}, \quad k_2 = -\frac{\alpha_{11} - \omega_2^2\beta_{11}}{\alpha_{12} - \omega_2^2\beta_{12}} = -\frac{\alpha_{12} - \omega_2^2\beta_{12}}{\alpha_{22} - \omega_2^2\beta_{22}} \tag{7}$$

Пусть в уравнениях с двумя гасителями δ_1, δ_2

$$\beta_{11}\ddot{x}_1 + \beta_{12}\ddot{x}_2 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \delta_1, \quad \beta_{12}\ddot{x}_1 + \beta_{22}\ddot{x}_2 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \delta_2 \tag{8}$$

переменные x_1, x_2 связаны с ξ, η формулами (6), но ξ, η удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\xi} + \omega_1^2(1 - k_\xi^2)\,\xi = 0, \qquad \ddot{\eta} + \omega_2^2(1 - k_\eta^2)\,\eta = 0 \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} &k_\xi^2 = 0 \quad \text{при } \xi\dot{\xi} > 0, \qquad 0 < k_\xi^2 < 1 \quad \text{при } \xi\dot{\xi} < 0 \\ &k_\eta^2 = 0 \quad \text{при } \eta\dot{\eta} > 0, \qquad 0 < k_\eta^2 < 1 \text{ при } \eta\dot{\eta} < 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ кусочно-непрерывны и равны

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{\xi} + \ddot{\eta} = -\omega_1^2(1 - k_\xi^2)\,\xi - \omega_2^2(1 - k_\eta^2)\,\eta \\ \ddot{x}_2 &= k_1\ddot{\xi} + k_2\ddot{\eta} = -k_1\omega_1^2(1 - k_\xi^2)\,\xi - k_2\omega_2^2(1 - k_\eta^2)\,\eta \end{aligned} \tag{11}$$

После подстановки выражений (6), (11) в уравнения (8) и использования формул (7) получим

$$\delta_1 \equiv (\beta_{11} + k_1\beta_{12})\,\omega_1^2 k_\xi^2 \xi + (\beta_{11} + k_2\beta_{12})\,\omega_2^2 k_\eta^2 \eta$$

$$\delta_2 \equiv (\beta_{12} + k_1\beta_{22})\,\omega_1^2 k_\xi^2 \xi + (\beta_{12} + k_2\beta_{22})\,\omega_2^2 k_\eta^2 \eta$$

В результате решение уравнений (8) будет устойчивым в конечной области (10). Так как из (6) следует

$$\xi = \frac{k_2x_1 - x_2}{k_2 - k_1}, \qquad \eta = \frac{x_2 - k_1x_1}{k_2 - k_1} \tag{12}$$

то

$$\delta_1 \equiv (\beta_{11} + k_1\beta_{12})\,\omega_1^2 k_\xi^2 \frac{k_2x_1 - x_2}{k_2 - k_1} + (\beta_{11} + k_2\beta_{12})\,\omega_2^2 k_\eta^2 \frac{x_2 - k_1x_1}{k_2 - k_1}$$

$$\delta_2 \equiv (\beta_{12} + k_1\beta_{22})\,\omega_1^2 k_\xi^2 \frac{k_2x_1 - x_2}{k_2 - k_1} + (\beta_{12} + k_2\beta_{22})\,\omega_2^2 k_\eta^2 \frac{x_2 - k_1x_1}{k_2 - k_1}$$

где k_ξ^2, k_η^2 зависят соответственно от $\operatorname{sign}(k_2x_1 - x_2)d/dt(k_2x_1 - x_2)$, $\operatorname{sign}(x_2 - k_1x_1)d/dt(x_2 - k_1x_1)$. Таким образом, δ_1, δ_2 — кусочно-непрерывные функции x_1, x_2, не зависящие от величин производных $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$.

Так же решается задача гашения собственных колебаний системы с n степенями свободы без трения в общем случае

$$\sum_{s=1}^{n} (\beta_{sl}\ddot{x}_s + \alpha_{sl}x_s) = \delta_l \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

при помощи n гасителей δ_l, не зависящих от величин производных $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$. Здесь α_{sl}, β_{sl} таковы, что решение уравнений (13) при $\delta_l = 0$ представимо в виде

$$x_s = \sum_{p=1}^{n} A_{1p}k_{sp} \cos(\omega_p t + \varphi_p) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Постоянные $A_{11}, \ldots, A_{1n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ определяются начальными условиями, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — собственные частоты системы (13) при $\delta_l = 0$, k_{sp} определяются системой уравнений

$$\sum_{s=2}^{n} (\alpha_{sl} - \omega_p^2 \beta_{sl}) k_{sp} = \beta_{1l} \omega_p^2 - \alpha_{1l} \qquad (l = 1, \ldots, n-1)$$

Наличие трения в системе не мешает действию нелинейных гасителей, уравнения которых найдены из рассмотрения консервативных систем (3), (13). Если в системы (8), (13) добавить отрицательное трение настолько малое, что решения соответствующих уравнений без гасителей колебательно неустойчивы, то в силу конечности области устойчивости (10) решений уравнений (8), (13) с гасителями можно обеспечить преобладание демпфирующего эффекта нелинейных гасителей над раскачиванием. Иными словами, требуем, чтобы в промежутке между двумя нулями функции времени ξ (или η) расход энергии системы (8) в момент ($\dot\xi = 0$ или $\dot\eta = 0$) включения гасителей δ_1, δ_2 превышал приращение энергии за счет отрицательного трения.

Пусть в уравнениях (8) $\delta_1 = 0$, тогда x_1 удовлетворяет уравнению вида

$$x_1^{(4)} + 2a\ddot{x}_1 + bx_1 = c\delta_2 + d\ddot{\delta}_2 \qquad (a > 0,\ b > 0,\ a^2 > b) \tag{14}$$

Из уравнений (9), (11) получим кусочно-непрерывную функцию времени:

$$x_1^{(4)} = \xi^{(4)} + \eta^{(4)} = \omega_1^4 (1 - k_\xi^2)^2 \xi + \omega_2^4 (1 - k_\eta^2)^2 \eta \tag{15}$$

В силу (6), (11), (15) и $\omega^4 - 2a\omega^2 + b = 0$ имеем

$$c\delta_2 + d\ddot{\delta}_2 = f_1 (k_\xi^2)\xi + f_2(k_\eta^2)\eta \qquad \begin{pmatrix} f_1 (k_\xi^2) = \omega_1^4 (k_\xi^4 - 4k_\xi^2) - bk_\xi^2 \\ f_2 (k_\eta^2) = \omega_2^4 (k_\eta^4 - 4k_\eta^2) - bk_\eta^2 \end{pmatrix}$$

Пусть $\delta_2 = n_1 (k_\xi^2)\,\xi + n_2 (k_\eta^2)\,\eta$, где $n_1 (k_\xi^2)$, $n_2 (k_\eta^2)$ — некоторые комбинации чисел k_ξ^2, k_η^2, тогда

$$\ddot{\delta}_2 = -n_1 (k_\xi^2)\, \omega_1^2 (1 - k_\xi^2)\, \xi - n_2 (k_\eta^2)\, \omega_2^2 (1 - k_\eta^2)\, \eta$$

$$n_1 (k_\xi^2) = \frac{f_1 (k_\xi^2)}{-d\omega_1^2(1 - k_\xi^2) + c}, \qquad n_2 (k_\eta^2) = \frac{f_2 (k_\eta^2)}{-d\omega_2^2(1 - k_\eta^2) + c}$$

Из уравнений (6), (11) следует, что ξ, η выражаются через x_1 и $\ddot{x}_1$

$$\xi = \frac{\ddot{x}_1 + \omega_2^2 (1 - k_\eta^2)\, x_1}{\omega_2^2 (1 - k_\eta^2) - \omega_1^2 (1 - k_\xi^2)}, \qquad \eta = \frac{\ddot{x}_1 + \omega_1^2 (1 - k_\xi^2)\, x_1}{\omega_1^2 (1 - k_\eta^2) - \omega_2^2 (1 + k_\xi^2)} \tag{16}$$

Здесь k_ξ^2, k_η^2 зависят соответственно от

$$\operatorname{sign} [\ddot{x}_1 + \omega_2^2 (1 - k_\eta^2)\, x_1] \frac{d}{dt} [\ddot{x}_1 + \omega_2^2 (1 - k_\eta^2)\, x_1]$$

$$\operatorname{sign} [\ddot{x}_1 + \omega_1^2 (1 - k_\xi^2)\, x_1] \frac{d}{dt} [\ddot{x}_1 + \omega_1^2 (1 - k_\xi^2)\, x_1]$$

Следовательно, уравнение нелинейного гасителя запишется

$$\delta_2 = n_1 (k_\xi^2) \frac{\ddot{x}_1 + \omega_2^2 (1 - k_\eta^2)\, x_1}{\omega_2^2 (1 - k_\eta^2) - \omega_1^2 (1 - k_\xi^2)} + n_2 (k_\eta^2) \frac{\ddot{x}_1 + \omega_1^2 (1 - k_\xi^2)\, x_1}{\omega_1^2(1 - k_\eta^2) - \omega_2^2 (1 - k_\xi^2)}$$

тогда как линейный гаситель собственных колебаний системы (14) зависит также от величин производных $\dot{x}_1$, $\dddot{x}_1$.

Вместо формул (16) для ξ, η можно использовать эквивалентные (12), тогда

$$\delta_2 = n_1 (k_\xi^2) \frac{k_2 x_1 - x_2}{k_2 - k_1} + n_2 (k_\eta^2) \frac{x_2 - k_1 x_1}{k_2 - k_1}$$

где k_ξ^2, k_η^2 зависят от знаков $(k_2 x_1 - x_2) d/dt\, (k_2 x_1 - x_2)$, $(x_2 - k_1 x_1) d/dt\, (x_2 - k_1 x_1)$ соответственно.

Аналогично решается задача нелинейного гашения собственных колебаний системы (13) одним гасителем, не зависящим от величин $\dot{x}_i$ $(i=1, \ldots, n)$.

Поступила 22 VII 1957