О НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

Я. Н. Ройтенберг

(Москва)

Теории импульсных систем посвящена за последние годы обширная литература, в том числе труды М. Ф. Гарднера и Дж. Л. Бернса [1], Б. В. Булгакова [2], Я. З. Цыпкина [3], Дж. Р. Рагаззини и Л. А. Заде [4] и ряда других авторов.

В настоящей работе изучается вопрос о накоплении возмущений в нестационарных линейных импульсных системах, находящихся под действием внешних сил, ограниченных по модулю.

Рассмотрим импульсную систему, описываемую разностными уравнениями

$$y_k(t+\tau)+\sum_{l=1}^{n} a_{kl}(t)\, y_l(t)=x_k(t) \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{1}$$

Система скалярных уравнений (1) эквивалентна матричному уравнению

$$y(t+\tau)+a(t)\,y(t)=x(t) \tag{2}$$

где $y(t)$, $a(t)$, $x(t)$ — следующие матрицы:

$$y(t)=\|y_k(t)\|, \qquad a(t)=\|a_{kl}(t)\|, \qquad x(t)=\|x_k(t)\| \tag{3}$$

Обозначая через $\Theta(t)$ квадратную матрицу, столбцы которой являются линейно-независимыми решениями однородного матричного уравнения

$$y(t+\tau)+a(t)\,y(t)=0 \tag{4}$$

можно представить решение уравнения (2) в таком виде:

$$y(t)=\Theta(t)\,\Theta^{-1}(t-\vartheta\tau)\,y^*(t-\vartheta\tau)+\sum_{j=1}^{\vartheta}\Theta(t)\,\Theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)\,x(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \tag{5}$$

Здесь через ϑ обозначена целая часть t/τ, а матрица $\Theta^{-1}(t)$ является обратной матрицей для матрицы $\Theta(t)$.Так как второе слагаемое в выражении (5) обращается в нуль на интервале $0<t<\tau$, то согласно (5)

$$y(t)=y^*(t) \qquad (0<t<\tau) \tag{6}$$

т. е. искомая матрица $y(t)$ совпадает с наперед заданной матрицей $y^*(t)$ в любой точке интервала $0<t<\tau$.

Элементы матрицы $y(t)$ согласно (5) будут иметь вид:

$$y_s(t)=\sum_{k=1}^{n}[\Theta(t)\,\Theta^{-1}(t-\vartheta\tau]_{sk}\,y_k^*(t-\vartheta\tau)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}[\Theta(t)\,\Theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)]_{sk}\,x_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{7}$$

Обозначая через $N(t,\ j\tau)$ матричную функцию веса

$$N(t,\ j\tau)=\Theta(t)\,\Theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau) \tag{8}$$

можно представить решение (5) в таком виде:

$$y(t)=N(t,\ 0)\,y^*(t-\vartheta\tau)+\sum_{j=1}^{\vartheta}N(t,\ j\tau)\,x(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \tag{9}$$

Соответственно, выражения (7) примут вид:

$$y_s(t)=\sum_{k=1}^{n}N_{sk}(t,\ 0)\,y_k^*(t-\vartheta\tau)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}N_{sk}(t,\ j\tau)\,x_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{10}$$

Положение системы в фиксированный момент времени $t=t_1$ определится выражениями(10) при $t=t_1$; при этом ϑ надо заменить на ϑ_1, т. е. на целую часть t_1/τ.

Полагая, что внешние силы $x_k(t)$ ограничены по модулю

$$|x_k(t)| \leqslant L_k \tag{11}$$

из выражения (10) при $t = t_1$ получим оценку наибольшего возможного отклонения по некоторой координате y_s в момент времени $t = t_1$:

$$|y_s(t_1)| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} N_{sk}(t_1, 0)\, y_k{}^*\,(t_1 - \vartheta_1\tau) \right| + \sum_{k=1}^{n} L_k \sum_{j=1}^{\vartheta_1} |N_{sk}(t_1, j\tau)| \tag{12}$$

Выражение (12) и дает решение поставленной задачи. Заметим, однако, что, как известно, определение фундаментальной матрицы $\theta(t)$, а следовательно, и матричной функции веса $N(t, j\tau)$ представляет значительные трудности и может быть выполнено эффективно лишь для частных видов матрицы коэффициентов $a(t)$. Представляет поэтому интерес указание алгорифма, позволяющего получить оценки (12) при помощи вычислительных устройств. С этой целью рассмотрим систему разностных уравнений

$$Y_k(t) + \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(t)\, Y_l(t+\tau) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

Матрица коэффициентов уравнений (13) является транспонированной матрицей для матрицы $a(t)$ исходной системы уравнений (1).

Система разностных уравнений (13) является сопряженной для исходной системы уравнений (1). Умножая k-е уравнение ($k = 1, \ldots, n$) системы (1) на $Y_k(t+\tau)$,а μ-е уравнение ($\mu = 1, \ldots, n$) системы (13) на—$y_\mu(t)$ и складывая соответственно левые и правые части всех вновь полученных уравнений, найдем следующее соотношение:

$$\Delta \sum_{k=1}^{n} Y_k(t)\, y_k(t) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(t+\tau) x_k(t) \tag{14}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k(t)\, y_k(t) = \sum_{k=1}^{n} Y_k{}^*(t - \vartheta\tau)\, y_k{}^*(t - \vartheta\tau) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\vartheta} Y_k(t - \vartheta\tau + j\tau)\, x_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \tag{15}$$

Учитывая соотношения (6), легко видеть, что входящие в выражение (15) $Y_k{}^*(t)$ суть наперед заданные функции, с которыми совпадают функции $Y_k(t)$ на интервале $0 < t < \tau$.

Для момента времени $t = t_1$ соотношение (15) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k(t_1)\, y_k(t_1) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau)\, y_k{}^*(t_1 - \vartheta_1\tau) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\vartheta_1} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau)\, x_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau - \tau) \tag{16}$$

В выражении (16), учитывая, что $0 < t_1 - \vartheta_1\tau < \tau$, звездочка у $Y_k{}^*(t_1 - \vartheta_1\tau)$ опущена. Для определения решения системы разностных уравнений (13) необходимо задать на интервале $0 < t < \tau$ функции $Y_k{}^*(t)$, с которыми на этом интервале совпадают искомые функции $Y_k(t)$.

Потребуем, чтобы искомые функции $Y_k(t)$ для любого момента времени t на интервале $\vartheta_1\tau < t < (\vartheta_1 + 1)\tau$ удовлетворяли условию

$$Y_s(t) = 1, \qquad Y_l(t) = 0 \qquad (l = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n) \tag{17}$$

Очевидно, что условия (17) вместе с уравнениями (13) уже однозначно определяют и функции $Y_k{}^*(t)$.

При выполнении условий (17) выражение (15) принимает вид: (18)

$$y_s(t_1) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau)\, y_k^*(t_1 - \vartheta_1\tau) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta_1} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau)\, x_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau - \tau)$$

Интересующее нас выражение (12), определяющее при $|x_k(t)| \leqslant L_k$ наибольшее возможное отклонение по некоторой координате y_s в момент времени $t = t_1$, принимает теперь вид:

$$|y_s(t_1)| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau)\, y_k^*(t_1 - \vartheta_1\tau) \right| + \sum_{k=1}^{n} L_k \sum_{j=1}^{\vartheta_1} |Y_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau)| \tag{19}$$

где $Y_k(t)$ — решения системы разностных уравнений (13), удовлетворяющие условиям (17). Из указанного вытекает также и метод определения величин $|y_s(t_1)|$ при помощи электронных моделирующих устройств.

Поступила 9 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарднер М. Ф., Бернс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. ГИТТЛ, М., 1949, стр. 327.
2. Булгаков Б. В. Колебания, т. I. ГИТТЛ, М., 1949, стр. 172.
3. Цыпкин Я. З. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, ГЭИ, М., 1951.
4. Ragazzini J. R. and Zadeh L. A. The Analysis of Sampled-data Systems. Transactions of AIEE, vol. 71, pt. II, p. 225, 1952.

НЕЛИНЕЙНОЕ ГАШЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

В. В. Ларичева
(Москва)

Рассматривается нелинейное гашение собственных колебаний систем порядка $2n$. Линейное гашение собственных колебаний системы второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \delta \tag{1}$$

заключается в том, что при наличии гасителя $\delta = -2|h|\dot{x}$ имеем линейное уравнение с затухающими решениями

$$\ddot{x} + 2|h|\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Рассмотрим гашение собственных колебаний системы (1) нелинейным (не зависящим от величины $\dot{x}$) гасителем δ.

Пусть система (1) с нелинейным гасителем описывается уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2(1 - k^2)x = 0 \tag{2}$$

где $k^2 = 0$ при $x\dot{x} > 0$, $0 < k^2 < 1$ при $x\dot{x} < 0$. Тогда в моменты времени, соответствующие $\dot{x} = 0$ ($x = x_{\max_n}$), энергия системы (2) уменьшается на конечную величину $^1/_2 k^2\omega^2 x^2_{\max_n}$, и решение x уравнения (2) будет затухающим.

Время затухания x до значения, не превышающего $0{,}05\, x_{\max}$, при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \omega x_{\max}$ определяется формулой

$$t \leqslant \frac{\pi}{2\omega}\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt[m]{0.05}}\right)m + 1\right]$$

Здесь m — число колебаний до затухания, $x_{\max}$ — максимальное по модулю значение x. Описанный способ нелинейного гашения применим для гашения собственных колебаний систем порядка $2n$ без привлечения величин обобщенных скоростей.

Рассмотрим уравнения собственных колебаний системы с двумя степенями свободы без трения в общем случае:

$$\beta_{11}\ddot{x}_1 + \beta_{12}\ddot{x}_2 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0, \beta_{12}\ddot{x} + \beta_{22}\ddot{x}_2 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 = 0 \tag{3}$$

где

$$\alpha_{11} > 0, \qquad \alpha_{22} > 0, \qquad \alpha_{11}\alpha_{22} > \alpha_{12}^2 \tag{4}$$

$$\beta_{11} > 0, \qquad \beta_{22} > 0, \qquad \beta_{11}\beta_{22} > \beta_{12}^2 \tag{5}$$