Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, У КОТОРЫХ ЧИСТО МНИМЫЕ КОРНИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИМЕЮТ НЕПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

М. Я. Кушуль
(Москва)

В статье рассматриваются квазигармонические уравнения (1.1), коэффициенты которых аналитически зависят от малого параметра μ и при $\mu = 0$ превращаются в систему с постоянными коэффициентами. Предполагается, что среди корней фундаментального уравнения $|a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda| = 0$ имеются чисто мнимые и нулевые корни, как кратные, так и отличающиеся друг от друга на величины вида $2\pi pi/\omega$ (ω — период коэффициентов квазигармонической системы, p — целые числа), и что не все элементарные делители, соответствующие этим корням, простые.

Главное внимание в настоящей работе уделяется тем особенностям, которые возникают при исследовании квазигармонических систем в связи с наличием непростых элементарных делителей матрицы $\| a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda \|$.

При помощи метода «многоугольника Ньютона» устанавливается зависимость между структурой матрицы $\| a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda \|$ и теми величинами $\mu^{1/\gamma}$, по целым степеням которых разлагаются характеристические корни (и показатели).

Для практического вычисления характеристических показателей, используя подстановку (2.1), выводятся алгебраические уравнения, из которых определяются в первом приближении характеристические показатели при наличии элементарных делителей произвольной степени матрицы $\| a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda \|$.

Полученные результаты применяются к исследованию устойчивости периодических решений квазилинейных систем со многими степенями свободы в тех особых случаях, когда фундаментальное уравнение порождающей системы имеет чисто мнимые и нулевые корни, кратность которых не равна числу групп решений, им соответствующих.

§ 1. Рассматривается квазигармоническая система

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} [a_{s\beta} + \mu f_{s\beta}(t, \mu)]\, x_\beta \tag{1.1}$$

где функции $f_{s\beta}(t, \mu)$ периодичны относительно t с периодом ω и аналитичны по малому параметру μ:

$$f_{s\beta}(t, \mu) = f_{s\beta}^{(0)} + \mu f_{s\beta}^{(1)} + \cdots$$

При $\mu = 0$ система (1.1) переходит в систему

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta} x_\beta^{(0)} \qquad (a_{s\beta} = \text{const}) \tag{1.2}$$

Допустим, что среди корней фундаментального уравнения

$$|a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda| = 0 \qquad (\delta_{ss} = 1, \ \delta_{s\beta} = 0 \ \text{при} \ s \neq \beta) \tag{1.3}$$

системы (1.2) имеются корни с нулевыми вещественными частями; такого рода корни будем называть критическими. Предположим, что среди критических корней встречаются как кратные корни, так и корни, отличающиеся друг от друга на величины вида $2\pi p_u i/\omega$, где p_u — целые числа, а число групп решений системы (1.2), соответствующих критическим корням, не равно их кратности.

Рассмотрим вначале резонансный случай, когда среди критических корней λ фундаментального уравнения (1.3) имеются нули и чисто мнимые корни:

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_u = \pm \frac{2\pi}{\omega} p_u i \qquad (u = 1, \ldots, r) \tag{1.4}$$

Пусть q_0 — наивысшая степень элементарных делителей матрицы $\|a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda\|$, отвечающих нулевому корню. Обозначим $e_{0\gamma}$ число элементарных делителей λ^γ, где γ пробегает значения $\gamma = 1, \ldots, q_0$ (если для какого-либо значения γ из этого ряда элементарных делителей нет, то полагаем $e_{0\gamma} = 0$). Кратность нулевого корня k_0 и число групп решений m_0, ему соответствующих, будут равны:

$$k_0 = \sum_{\gamma=1}^{q_0} \gamma e_{0\gamma}, \qquad m_0 = \sum_{\gamma=1}^{q_0} e_{0\gamma} \tag{1.5}$$

Аналогично обозначим q_u наивысшую степень элементарных делителей, отвечающих каждому корню из пары $\lambda_u = \pm 2\pi p_u i/\omega$ и $e_{u\gamma}$ — число элементарных делителей $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$, где γ пробегает значения $\gamma = 1, \ldots, q_u$. Кратность k_u корня λ_u и число групп решений m_u, ему соответствующих, будут равны:

$$k_u = \sum_{\gamma=1}^{q_u} \gamma e_{u\gamma}, \qquad m_u = \sum_{\gamma=1}^{q_u} e_{u\gamma} \tag{1.6}$$

Обозначим через $x_{s1}(t) \ldots x_{sn}(t)$ фундаментальную систему решений (1.1), определяемую начальными условиями

$$x_{jj}(0, \mu) = 1, \qquad x_{sj}(0, \mu) = 0 \qquad (s \neq j)$$

Отыскивая эти решения в виде рядов

$$x_{sj}(t) = x_{sj}^{(0)}(t) + \mu x_{sj}^{(1)}(t) + \cdots$$

в которых функции $x_{sj}^{(l)}(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$x_{jj}^{(0)}(0) = 1, \quad x_{sj}^{(0)}(0) = 0 \quad (s \neq j)$$

$$x_{sj}^{(1)}(0) = x_{sj}^{(2)}(0) = \ldots = 0 \quad (s \neq j \quad s = j)$$

получим

$$x_{sj}^{(l)}(t) = \int_0^t \sum_{\beta=1}^n x_{s\beta}(t-\tau) X_{\beta j}^{(l)}(\tau)\, d\tau \qquad \left(X_{sj}^{(l)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{n} f_{s\beta}^{(i)} x_{\beta j}^{(l-i)}\right)$$

Ограничиваясь первым приближением, запишем характеристическое уравнение системы (1.1) в виде

$$D(\rho, \mu) = | x_{s\beta}^{(0)}(\omega) + \mu x_{s\beta}^{(1)}(\omega) - \delta_{s\beta}\rho | = 0 \tag{1.7}$$

Пусть ρ_0 — корни уравнения (1.7) при $\mu = 0$:

$$D(\rho, 0) = | x_{s\beta}^{(0)}(\omega) - \delta_{s\beta}\rho_0 | = 0 \tag{1.8}$$

Каждому корню λ_0, λ_u фундаментального уравнения (1.3) из ряда (1.4) соответствует равный единице корень уравнения (1.8), следовательно, кратность корня $\rho_0 = 1$ уравнения (1.8) равна $k = k_0 + 2k_1 + \ldots + 2k_r$ и точка $\mu = 0$, $\rho = 1$ будет критической.

Как известно, при μ достаточно малом уравнение (1.7) имеет k корней $\rho(\mu)$, для которых $\rho(0) = 1$, и эти корни будут разлагаться в ряды по целым степеням величины $\mu^{1/v}$, где $1 \leqslant v \leqslant k$.

Обозначим через q наивысшую степень элементарных делителей. соответствующих корням (1.4), т. е. наибольшее из чисел $q_0, q_1, \ldots, q_r$, Выведем условия, при соблюдении которых все k корней $\rho(\mu)$, обращающихся при $\mu = 0$ в единицу, будут разлагаться только по целым степеням величин $\mu, \mu^{1/2}, \ldots, \mu^{1/q}$. Заметим, что каждому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$ матрицы $\| a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda \|$ будут соответствовать элементарный делитель $(\rho_0 - 1)^\gamma$ матрицы $\| x_{s\beta}^{(0)}(\omega) - \delta_{s\beta}\rho_0 \|$ и поэтому число элементарных делителей $(\rho_0 - 1)^\gamma$ равно

$$e_\gamma = e_{0\gamma} + 2e_{1\gamma} + \ldots + 2e_{r\gamma} \qquad (\gamma = 1, \ldots, q) \tag{1.9}$$

Кратность k корня ρ_0 характеристического уравнения (1.8) и число групп решений, ему отвечающих, будут

$$k = \sum_{\gamma=1}^{q} \gamma e_\gamma, \qquad m = \sum_{\gamma=1}^{q} e_\gamma \tag{1.10}$$

Введем вместо ρ переменную σ, равную

$$\sigma = \rho - 1 \tag{1.11}$$

Характеристическое уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$D(\sigma, \mu) = | x_{s\beta}^{(0)}(\omega) + \mu x_{s\beta}^{(1)}(\omega) - \delta_{s\beta}(1 + \sigma) | = 0 \tag{1.12}$$

Из (1.9) и (1.10) следует, что матрица

$$\| x_{s\beta}^{(0)}(\omega) - \delta_{s\beta}(1 + \sigma) \| \tag{1.13}$$

элементарными преобразованиями может быть приведена к следующей диагональной матрице:

$$\{ C_1 \ldots C_i \ldots C_n \} \tag{1.14}$$

у которой диагональные члены C_i равны:

$$\begin{array}{ll}
C_i = E_i(\sigma) & \text{при } i = 1, \ldots, n - m \\
C_i = \sigma E_i(\sigma) & \text{при } i = n - m + 1, \ldots, n - m + e_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_i = \sigma^\gamma E_i(\sigma) & \text{при } i = n - m + \varkappa_\gamma + 1, \ldots, n - m + \varkappa_\gamma + e_\gamma \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_n = \sigma^q E_n(\sigma) &
\end{array}$$

где $E_i(\sigma)$ — полиномы, не обращающиеся в нуль при $\sigma = 0$, а числа $\varkappa$ равны:

$$\varkappa_\gamma = e_1 + e_2 + \cdots + e_{\gamma-1} \tag{1.15}$$

Развернув характеристический определитель (1.12), представим функцию $D(\sigma, \mu)$ в виде ряда

$$D(\sigma, \mu) = \sum_\nu \mu^\nu a_\nu(\sigma) \tag{1.16}$$

где $a_\nu(\sigma)$ — полиномы относительно σ с постоянными коэффициентами

$$a_\nu(\sigma) = b_\nu \sigma^{\varepsilon_\nu} + b_{\nu 1}\sigma^{\varepsilon_\nu + 1} + \cdots \tag{1.17}$$

и ε_ν — наименьший показатель степени при σ в полиноме $a_\nu(\sigma)$.

Каждый столбец характеристического определителя $D(\sigma, \mu)$ будем рассматривать как сумму двух. Первые столбцы имеют своими элементами члены $x_{s\beta}^{(0)}(\omega) - \delta_{s\beta}(1+\sigma)$, вторые — члены $\mu x_{s\beta}^{(1)}(\omega)$. Тогда любой член ряда (1.16) $\mu^\nu a_\nu(\sigma)$ будет равен сумме определителей n-го порядка, в каждый из которых войдут ν вторых столбцов и $n-\nu$ первых, а число определителей равно C_n^ν — числу сочетаний из n элементов по ν. Условно это сумму определителей обозначим символом

$$\mu^\nu a_\nu(\sigma) = \sum_1^\chi (\nu), \qquad \chi = C_n^\nu \tag{1.18}$$

где цифра в скобках после знака суммы указывает, сколько вторых столбцов входит в каждый из суммируемых определителей.

При исследовании неявной функции $D(\sigma, \mu) = 0$ в окрестности критической точки $\mu = 0$, $\sigma = 0$ применим метод «многоугольника Ньютона», для чего достаточно определить наименьшие показатели степеней ε_ν при σ в полиномах $a_\nu(\sigma)$.

Начнем с полинома $a_0(\sigma)$, который лишь постоянным множителем отличается от выражения $\sigma^k E_1(\sigma) \ldots E_n(\sigma)$. Так как $E_i(0) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, то среди членов ряда (1.16), не содержащих μ, наименьший показатель степени при σ будет равен k.

Далее определим наименьший возможный показатель ν_1 при μ в членах ряда, не содержащих σ. Очевидно, что показатель $\nu_1 \geqslant m$. Действительно, при $\nu_1 < m$ каждый определитель n-го порядка из суммы (1.18) содержал бы миноры матрицы (1.13), порядок которых был бы больше $n - m$. Но, как это следует из (1.14), в общий наибольший делитель таких миноров в качестве одного из сомножителей войдет σ в степени, равной или большей единицы. Допустим, что ν_1 принимает наименьшее возможное значение $\nu_1 = m$, тогда для построения многоугольника Ньютона достаточно определить низшие показатели степеней в полиномах $a_\nu(\sigma)$ для $\nu = 1, \ldots, m-1$.

При $\nu = m - 1$ в каждый определитель из суммы (1.18) войдут миноры матрицы (1.13) порядка $n - m + 1$. Общий наибольший делитель этих миноров, как видно из (1.14), будет равен произведению σ на множитель, не обращающийся в нуль при $\sigma = 0$. Поэтому низшая возможная степень σ в полиноме $a_{m-1}(\sigma)$ будет $\varepsilon_{m-1} \geqslant 1$. Таким же образом легко показать, что для любого полинома $a_{m-i}(\sigma)$ при $i \leqslant e_1$ низшие возможные степени при σ будут $\varepsilon_{m-i} \geqslant i$.

Переходя к общему случаю, предположим, что показатель $\nu = m - \varkappa_\gamma - h$, где $\varkappa_\gamma$ определяется по формуле (1.15), а h и γ принимают значения $h = 1, \ldots, e_\gamma$, $\gamma = 1, \ldots, q$. Порядок миноров матрицы (1.13), входящих в каждый определитель из суммы (1.18), при этом изменяется от $n - m + \varkappa_\gamma + 1$ до $n - m + \varkappa_\gamma + e_\gamma$. С возрастанием порядка миноров на единицу в пределах изменения $e_\gamma \geqslant h \geqslant 1$, как видно из (1.14), общий наибольший делитель миноров приобретает множитель $\sigma^\gamma E_i(\sigma)$, где $E_i(0) \neq 0$. Поэтому младший член полинома $a_i(\sigma)$ с индексом $i = m - \varkappa_\gamma - h$ будет содержать σ в степени

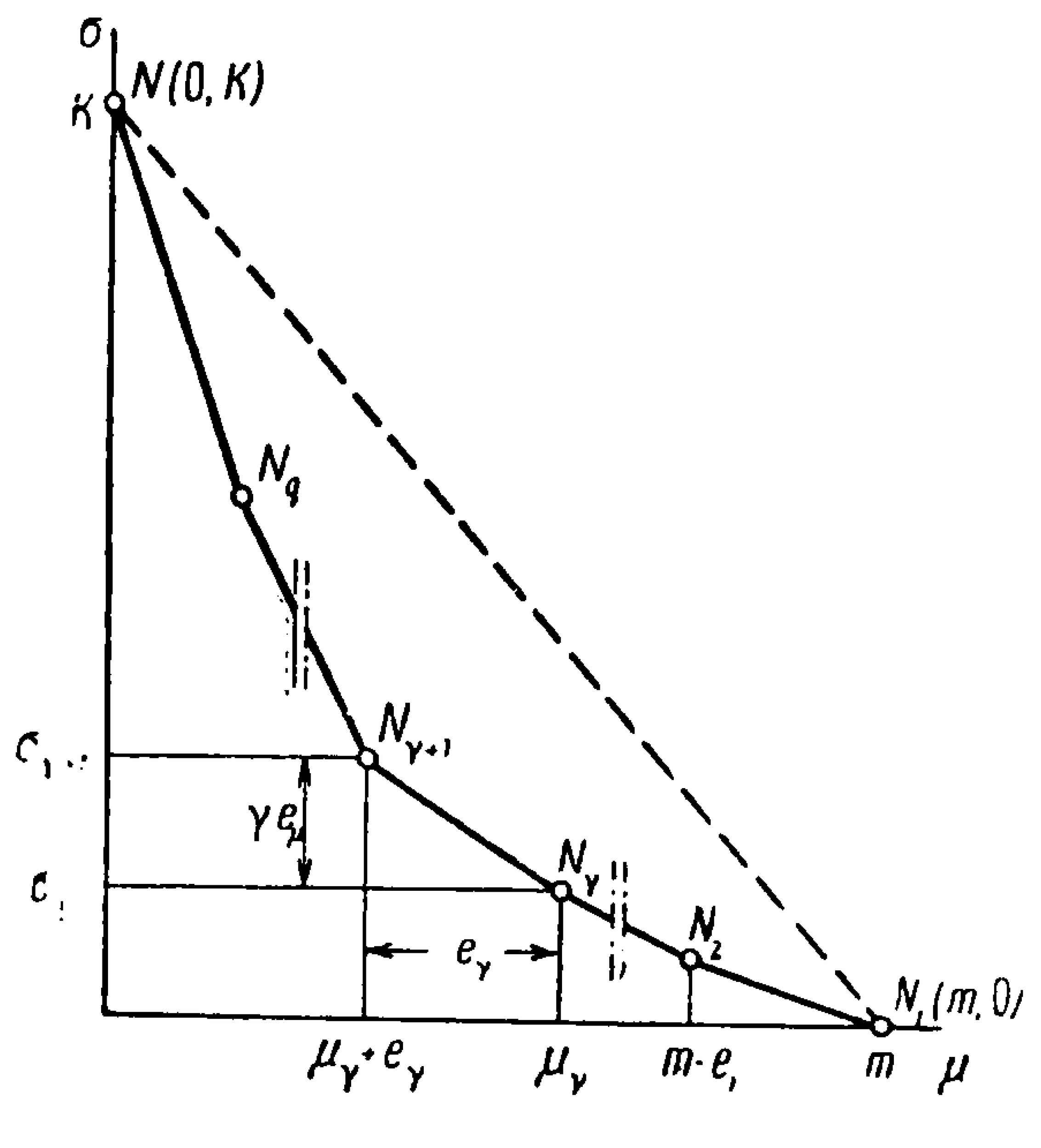
$$\varepsilon_{m-\varkappa_\gamma-h} \geqslant \theta(h, \gamma) = e_1 + 2e_2 + \ldots + (\gamma - 1)\, e_{\gamma-1} + \gamma h \qquad (h = 1, \ldots e_\gamma,\ \gamma = 1, \ldots, q)$$

Если младшие члены ни в одном полиноме $a_\nu(\sigma)$ не исчезают, то функция $D(\sigma, \mu)$ будет равна:

$$D(\sigma, \mu) = \sigma^k + b_m \mu^m + \sum_{h,\,\gamma}\sum b_{m-\varkappa_\gamma-h}\, \mu^{m-\varkappa_\gamma-h} \sigma^{\theta(h,\gamma)} + H \qquad (1.19)$$

где H — совокупность членов, не существенных для построения многоугольника Ньютона.

Многоугольник Ньютона для функции $D(\sigma, \mu)$ изображен на фиг. 1. По осям координат отложены точки $N(0, k)$ и $N_1(m, 0)$ и через них проведена пунктирная прямая NN_1. Каждый член ряда (1.19) изображается точкой, абсцисса которой равна показателю степени при μ, а ордината — показателю степени при σ. Многоугольник Ньютона будет состоять из q отрезков: $N_1N_2 \ldots N_\gamma N_{\gamma+1} \ldots N_q N$.



$\mu_\gamma = m - \varkappa_\gamma$

Фиг. 1

Как известно, каждому отрезку многоугольника соответствует столько решений $\sigma(\mu)$, обращающихся в нуль вместе с μ, какова разность ординат крайних точек отрезка. В дальнейшем предполагается, что коэффициенты при первых членах в рядах для $\sigma(\mu)$, отвечающих каждому отрезку, все различны: тогда дробная степень аргумента, по степеням которой происходит разложение, для каждого отрезка равна тангенсу острого угла его наклона к вертикали.

Как видно из фиг. 1, тангенс угла наклона отрезка $N_\gamma N_{\gamma+1}$ к вертикали равен $1/\gamma$. Поэтому функция $\sigma(\mu)$ в окрестности точки $\sigma = \mu = 0$ будет разлагаться по степеням величин μ (отрезок N_1N_2), $\mu^{1/2}$ (отрезок N_2N_3)... ...$\mu^{1/q}$ (отрезок N_qN). Число разложений, соответствующих отрезку $N_\gamma N_{\gamma+1}$, равно γe_γ, а общее число разложений для функции $\sigma(\mu)$ в окрестности нуля, как и должно быть, будет равно k.

При построении многоугольника Ньютона для функции $D(\sigma, \mu)$ предполагалось, что младшие члены ни в одном полиноме $a_\nu(\sigma)$ не исчезают. Однако многоугольник Ньютона функции $D(\sigma, \mu)$ останется таким же, как представлено на фиг. 1, если не обращаются в нуль только q коэффициентов при младших членах, которым соответствуют угловые точки $N_1, \ldots, N_q$ многоугольника, т. е. имеют место q неравенств:

$$b_{m-\varkappa_\gamma} \neq 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots, q), \qquad (1.20)$$

где $\varkappa_\gamma$ определяется по (1.15). В ином виде условия (1.20) будут получены ниже. Таким образом, приходим к следующему предложению.

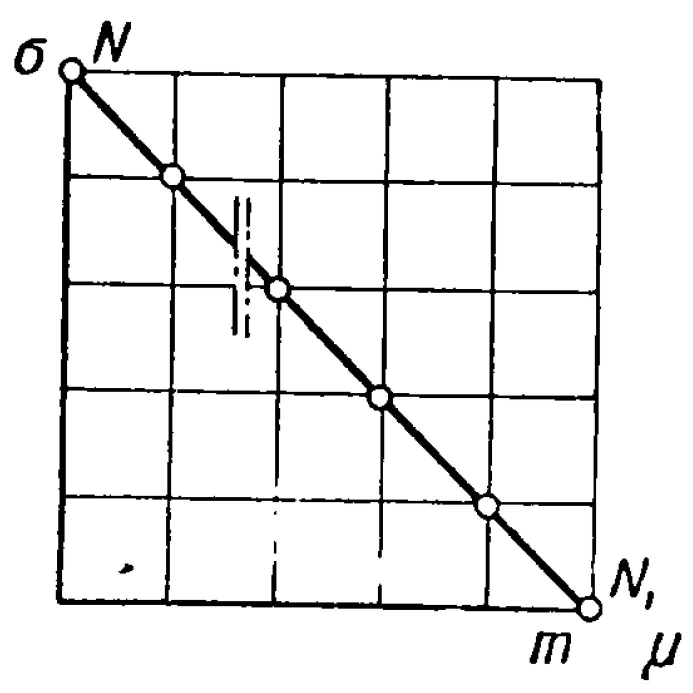
Допустим, что для квазигармонической системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} [a_{s\beta} + \mu f_{s\beta}(t, \mu)] x_\beta \tag{1.1}$$

1) фундаментальное уравнении $|a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda| = 0$ имеет среди своих корней нулевые корни $\lambda_0 = 0$ и чисто мнимые $\lambda_u = \pm 2\pi p_u i / \omega$, , где p_u — целые числа ($u = 1, \ldots, r$), ω — период функций $f_{s\beta}(t, \mu)$ и сумма кратностей корней λ_0, λ_u равна k;

2) элементарные делители матрицы $\|a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda\|$, соответствующие корням λ_0, λ_u, не все простые, и наивысшая степень этих делителей равна q.

Тогда, чтобы k характеристических корней $\rho(\mu)$ системы (1.1), для которых $\rho(0) = 1$, разлагались в ряд по целым степеням только величин $\mu, \mu^{1/2}, \ldots, \mu^{1/q}$, достаточно соблюдения следующих условий:



Фиг. 2

а) первые приближения для группы корней $\rho_i(\mu) = 1 + a_i\mu^{1/\gamma} + \ldots$, разлагающихся по целым степеням $\mu^{1/\gamma}$, для каждого γ все различны;

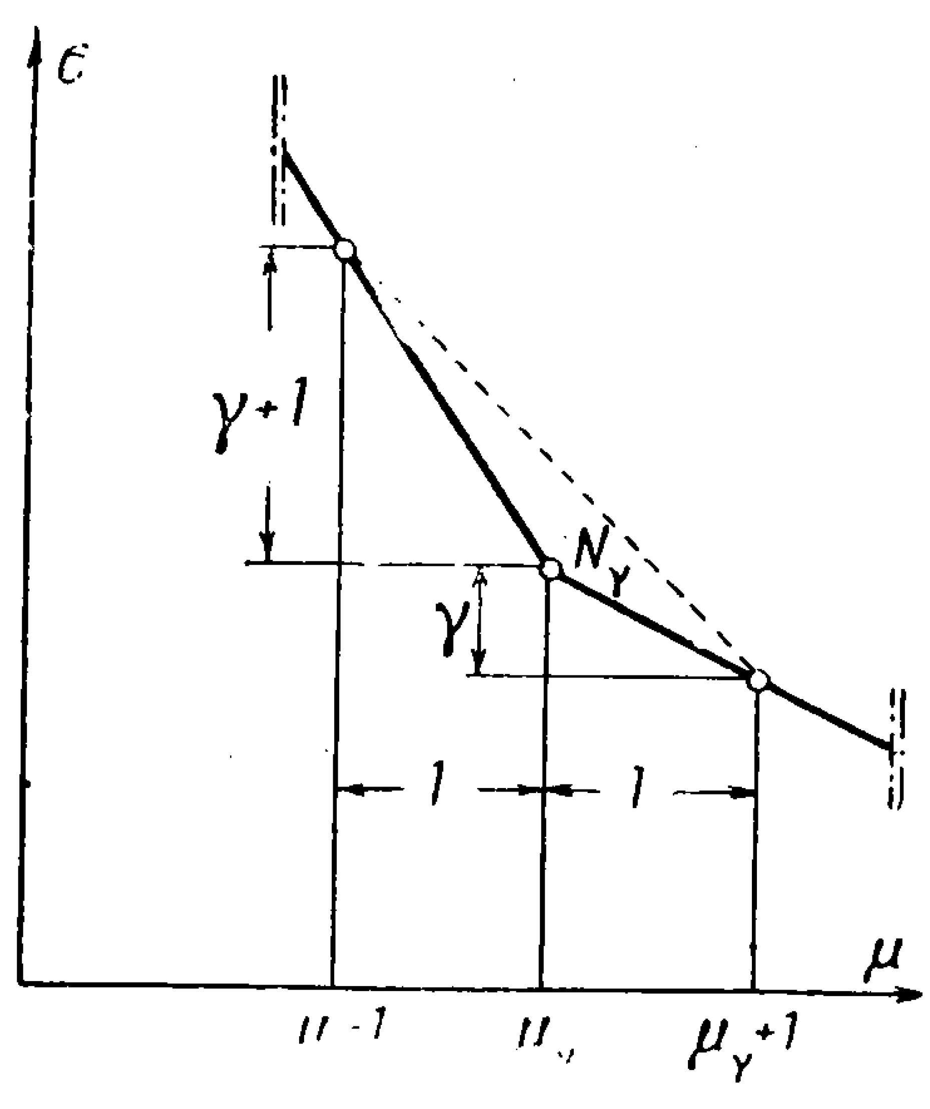
б) выполняется q неравенств (1.20).

Число корней $\rho(\mu)$ из общего числа k, разлагающихся в ряд по целым степеням $\mu^{1/\gamma}$, равно γe_γ, где e_γ — сумма чисел элементарных делителей λ^γ, $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$ степени γ.

Будем называть невырожденным случай, при котором условия а) и б) выполняются.

Примечание 1. Из указанного предложения следует, что если корни λ_0, λ_u имеют только простые элементарные делители ($\gamma = 1$) и все k характеристических корней, для которых $\rho(0) = 1$, уже в первом приближении различны, а коэффициент $b_m \neq 0$, то эти характеристические корни будут аналитическими функциями малого параметра μ. На эту особенность указал С. Н. Шиманов. Многоугольник Ньютона для этого случая превращается в прямую NN_1 (фиг. 2)

Примечание 2. Если одно из условий (1.20) не выполняется и при каком-либо фиксированном γ коэффициент b_i нумера $i = m - \varkappa_\gamma$ равен нулю, но коэффициенты b_{i-1} и b_{i+1}, т. е. нумеров $m - \varkappa_\gamma - 1$ и $m - \varkappa_\gamma + 1$, отличны от нуля, то в дополнение к величинам $\mu, \mu^{1/2}, \ldots, \mu^{1/q}$, по целым степеням которых разлагаются характеристические корни в невырожденном случае, $2\gamma + 1$ корней будут разлагаться по целым степеням величины $\mu^{2/(2\gamma+1)}$ (фиг. 3).



Фиг. 3

До сих пор рассматривались разложения характеристических корней по дробным степеням малого параметра в резонансном случае. Если среди критических корней фундаментального уравнения (1.3) имеются чисто мнимые корни $\lambda = \pm i\beta$, $\lambda_u = \pm(2\pi p_u / \omega + \beta) i$, $u = 1, \ldots, r$, где β — вещественное число, не равное нулю и не кратное $2\pi / \omega$, то, применив вместо (1.1) подстановку $\sigma = \rho - e^{i\beta\omega}$, легко показать, что полученные результаты будут справедливы и в этом, так называемом нерезонансном, случае.

§ 2. Для практического вычисления характеристических показателей квазигармонических систем (1.1) Н. А. Артемьев [3] применил подстановку

$$x_s = e^{\alpha t} y_s(t) \tag{2.1}$$

где α — искомый характеристический показатель, $y_s(t)$ — периодические функции периода ω. При этом предполагалось, что фундаментальное уравнение (1.3) не имело ни кратных корней, ни корней, отличающихся один от другого на величины $2\pi p_u i/\omega$ (p_u — целые числа). С. Н. Шиманов рассмотрел более общий случай, допустив, что среди корней уравнения (1.3) могут быть как кратные корни, так и корни, отличающиеся на величины $\pm 2\pi p_u i/\omega$, но кратность корней принималась равной числу групп решений системы (1.2), отвечающих этим корням.

Попытаемся устранить это последнее ограничение и воспользуемся подстановкой (2.1) в рассматриваемом случае, когда критические корни фундаментального уравнения (1.3) имеют элементарные делители, не все простые. Излагаемый ниже способ определения характеристических показателей во многом опирается на работу И. Г. Малкина [2].

Итак, предположим, что всем критическим корням (1.4) фундаментального уравнения (1.3), сумма кратностей которых равна k, отвечает m групп решений, а общее число элементарных делителей λ^γ, $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$ $(u = 1, \ldots, r$ степени γ равно e_γ $(\gamma = 1, \ldots, q)$.

Однородная система дифференциальных уравнений (1.2) имеет m и только m периодических решений периода ω, которые мы обозначим через φ_{si}, где $i = 1, \ldots, m$. Условимся, что периодические решения $\varphi_{s1}, \varphi_{s2}, \ldots, \varphi_{se_1}$, для которых $e_1 \geqslant i \geqslant 1$, отвечают совокупности простых элементарных делителей λ, $\lambda - \lambda_u$, периодические решения $\varphi_{s, e_1+1}, \ldots, \varphi_{s, e_1+e_2}$ — совокупности элементарных делителей второй степени λ^2, $(\lambda - \lambda_u)^2$ и вообще периодические решения φ_{si}, для которых индекс i изменяется в пределах $\varkappa_{\gamma+1} \geqslant i > \varkappa_\gamma$, где $\varkappa_\gamma$ определяется по (1.15), отвечают совокупности элементарных делителей λ^γ, $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$ степени γ. Кроме m периодических решений φ_{si}, критическим корням λ_0, λ_u будут отвечать $k - m$ независимых частных решений системы (1.2) следующего вида:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}\varphi_{si} + \dfrac{t^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!}\varphi_{si}^{(1)} + \ldots + \varphi_{si}^{(\gamma-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t\varphi_{si} + \varphi_{si}^{(1)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{при } \varkappa_{\gamma+1} \geqslant i > \varkappa_\gamma \\ (\gamma = 2, \ldots, q) \end{array} \tag{2.2}$$

где функции $\varphi_{si}^{(p)}$ периодические с периодом ω и удовлетворяют рекуррентной зависимости

$$\frac{d\varphi_{si}^{(p)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta}\varphi_{\beta i}^{(p)} - \varphi_{si}^{(p-1)}, \quad \varkappa_{\gamma+1} \geqslant i > \varkappa_\gamma \quad (p = 1, \ldots, \gamma - 1) \tag{2.3}$$

Наиболее простой способ определения решений (2.2) указан Н. Г. Четаевым [4].

Обозначим периодические решения системы

$$\frac{dx_s}{dt} + \sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta s} x_\beta = 0 \tag{2.4}$$

сопряженной с (1.2), через ψ_{si}, где $i = 1, \ldots, m$, причем, как и в предыдущем случае, условимся, что те из периодических решений ψ_{si}, для которых индекс i изменяется в пределах $\varkappa_{\gamma+1} \geqslant i > \varkappa_\gamma$, отвечают совокупности элементарных делителей λ^γ, $(\lambda + \lambda_u)^\gamma$ степени γ матрицы $\| - a_{\beta s} - \delta_{\beta s}\lambda \|$. Кроме m периодических решений ψ_{si}, критическим корням λ_0, λ_u будут отвечать $k - m$ независимых частных решений системы (2.4) того же вида, как и (2.2), т. е. решения

$$\frac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}\psi_{si} + \frac{t^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!}\psi_{si}{}^{(1)} + \ldots + \psi_{si}{}^{(\gamma-1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{при } \varkappa_{\gamma+1} \geqslant i > \varkappa_\gamma$$

$$t\psi_{si} + \psi_{si}{}^{(1)}$$

где функции $\psi_{si}{}^{(p)}$ периодичны периода ω и удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\frac{d\psi_{si}{}^{(p)}}{dt} + \sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta s}\psi_{\beta i}{}^{(p)} + \psi_{si}{}^{(p-1)} = 0 \qquad (p = 1, \ldots, \gamma - 1) \tag{2.5}$$

Условия существования периодических решений неоднородной системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta}x_\beta + f_s(t) \tag{2.6}$$

при резонансе, когда все функции $f_s(t)$ периодичны периода ω, как известно, могут быть записаны в таком виде [2]:

$$\int_0^\omega \sum_{s=1}^{n} f_s\psi_{sj}\, dt = 0 \tag{2.7}$$

Из зависимостей (2.3) следует, что функции $\varphi_{si}{}^{(p)}$ являются периодическими решениями неоднородной системы (2.6), для которой $f_s(t) = -\varphi_{si}{}^{(p-1)}$ поэтому, используя зависимости (2.7), получим, что в интервале значений индекса i $\varkappa_{\gamma+1} \geqslant i > \varkappa_\gamma$ должны соблюдаться условия ортогональности

$$A_{ji}{}^{(p-1)} = \int_0^\omega \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}{}^{(p-1)}\psi_{sj}\, dt = \omega \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}{}^{(p-1)}\psi_{sj} = 0 \qquad \begin{pmatrix} p = 1, \ldots, \gamma - 1 \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

но при $p = \gamma$ в том же интервале значений i отличен от нуля по крайней мере один из интегралов, т. е.

$$A_{ji}{}^{(\gamma-1)} = \int_0^\omega \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}{}^{(\gamma-1)}\psi_{sj}dt \neq 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ \gamma = 1, \ldots, q) \tag{2.9}$$

в частности, при любом $i \leqslant e_1$ одна из сумм

$$A_{ji} = \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}\psi_{sj} \neq 0 \tag{2.10}$$

Аналогично из зависимостей (2.5) и (2.7) получим, что для любого фиксированного j из интервала $\varkappa_{\gamma+1} \geqslant j > \varkappa_\gamma$ равны нулю величины

$$\int_0^\omega \sum_{s=1}^{n} \psi_{sj}{}^{(p-1)}\varphi_{si}\, dt = \omega \sum_{s=1}^{n} \psi_{sj}{}^{(p-1)}\varphi_{si} = 0 \qquad (p = 1, \ldots, \gamma - 1) \tag{2.11}$$

но отлична от нуля по крайней мере одна из сумм

$$\sum_{s=1}^{n} \psi_{sj}{}^{(\gamma-1)}\varphi_{si} \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \gamma = 1, \ldots, q)$$

Используя свойства решений сопряженных дифференциальных уравнений (1.2) и (2.4), легко показать, что

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}^{(p)}\psi_{sj} = (-1)^p \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}\psi_{sj}^{(p)}$$

Имея, кроме того, в виду (2.11), найдем, что для любого фиксированного значения j из интервала $\varkappa_{\gamma+1} \geqslant j > \varkappa_\gamma$ будут соблюдаться условия ортогональности

$$A_{ji}^{(p-1)} = \omega \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}^{(p-1)}\psi_{sj} = \omega \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}\psi_{sj}^{(p-1)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} p=1,\ldots,\gamma-1 \\ i=1,\ldots,m \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Из равенств (2.8) и (2.12) следует, что $A_{ji} = 0$, если хотя бы один из двух индексов i или j более e_1; $A_{ji}^{(1)} = 0$, если хотя бы один из двух индексов более $e_1 + e_2$, и вообще $A_{ji}^{(\gamma-2)} = 0$, если $i, j > \varkappa_\gamma$. Кроме того, очевидно, что величины $A_{ji}^{(\gamma-2)} \equiv 0$, если $i, j < \varkappa_{\gamma-1}$, так как при этом тождественно равны нулю функции $\varphi_{si}^{(\gamma-2)}$ и $\psi_{sj}^{(\gamma-2)}$.

Таким образом, величины $A_{ji}^{(\gamma-2)}$ могут быть отличны от нуля только для тех значений индексов i, j, которые удовлетворяют неравенству $\varkappa_\gamma \geqslant i, j > \varkappa_{\gamma-1}$.

Установив это свойство величин $A_{ji}^{(\gamma-2)}$, перейдем к определению характеристических показателей квазигармонической системы (1.1). Подставляя (2.1) и (1.1), получим систему уравнений:

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} [a_{s\beta} + \mu f_{s\beta}^{(1)}(t) + \mu^2 f_{s\beta}^{(2)}(t) + \ldots] y_\beta - \alpha y_s \tag{2.13}$$

В невырожденном случае, как было показано, характеристические показатели α будут разлагаться по целым степеням величин $\mu^{1/\gamma}$, где $\gamma = 1, \ldots, q$ и при любом γ число разложений по степеням $\mu^{1/\gamma}$ равно γe_γ. Поэтому характеристические показатели α и периодические функции y_s будем искать в виде рядов

$$\alpha = a_1\mu^{1/\gamma} + a_2\mu^{2/\gamma} + \ldots, \qquad y_s = y_s^{(0)} + \mu^{1/\gamma} y_s^{(1)} + \mu^{2/\gamma} y_s^{(2)} + \ldots \tag{2.14}$$

Начнем с определения тех характеристических показателей, которые разлагаются по целым степеням μ. Подставляя ряды

$$\alpha = \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \ldots, \qquad y_s = y_s^{(0)} + \mu y_s^{(1)} + \mu^2 y_s^{(2)} + \ldots \tag{2.15}$$

в (2.13), получим системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_s^{(0)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta} y_\beta^{(0)} \tag{2.16}$$

$$\frac{dy_s^{(1)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta} y_\beta^{(1)} + \sum_{\beta=1}^{n} f_{s\beta}^{(1)} y_\beta^{(0)} - a_1 y_s^{(0)} \tag{2.17}$$

$$\frac{dy_s^{(2)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta} y_\beta^{(2)} + \sum_{\beta=1}^{n} (f_{s\beta}^{(1)} y_\beta^{(1)} + f_{s\beta}^{(2)} y_\beta^{(0)}) - a_1 y_s^{(1)} - a_2 y_s^{(0)} \text{ и т. д.}$$

Порождающая система (2.16) имеет семейство периодическах решений

$$y_s^{(0)} = M_1^\circ\varphi_{s1} + \ldots + M_m^\circ\varphi_{sm} \tag{2.19}$$

где M_i° — произвольные постоянные. Из условия периодичности функций $y_s^{(1)}$ получим

$$P_j = (B_{j1} - a_1 A_{j1}) M_1^\circ + \ldots + (B_{jm} - a_1 A_{jm}) M_m^\circ = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.20}$$

где положено

$$B_{ji} = \int_0^\omega \sum_{s,\ \beta}\sum f_{s\beta}^{(1)}\varphi_{\beta i}\psi_{sj}\, dt, \qquad A_{ji} = \int_0^\omega \sum_{s=1}^n \varphi_{si}\psi_{sj}\, dt \tag{2.21}$$

По доказанному $A_{ji} = 0$ при $i,\ j > e_1$, поэтому система уравнений (2.20) может быть записана в таком виде:

$$\begin{gathered}(B_{j1} - a_1 A_{j1}) M_1^\circ + \ldots + (B_{je_1} - a_1 A_{je_1}) M_{e_1}^\circ + B_{j,e_1+1} M_{e_1+1}^\circ + \ldots + \\ + B_{jm} M_m^\circ = 0 \qquad (j = 1, \ldots, e_1) \\ B_{j1} M_1^\circ + \ldots + B_{jm} M_m^\circ = 0 \qquad (j = e_1 + 1, \ldots, m)\end{gathered} \tag{2.22}$$

и, следовательно, коэффициент a_1 должен быть корнем алгебраического уравнения

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_{11} - a_1 A_{11} \ldots B_{1e_1} - a_1 A_{1e_1} & B_{1,e_1+1} \ldots B_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ B_{e_1 1} - a_1 A_{e_1 1} \ldots B_{e_1 e_1} - a_1 A_{e_1 e_1} & B_{e_1, e_1+1} \ldots B_{e_1 m} \\ B_{e_1+1, 1} \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots B_{e_1+1, m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ B_{m1} \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots B_{mm} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.23}$$

степень которого равна e_1. Полученное уравнение не будет удовлетворяться тождественно, если последние $m - e_1$ строк (и столбцов) определителя Δ_1, не содержащие a_1, будут линейно независимы. Таким образом, мы получим в ином виде, чем (1.20), условие существования e_1 разложений характеристического показателя по целым степеням μ.

В невырожденном случае условие линейной независимости $m - e_1$ последних строк (и столбцов) определителя Δ_1 соблюдается и, кроме того, все e_1 корней a_1 простые. Примем в качестве a_1 один из этих корней. Тогда среди миноров $m - 1$ порядка определителя Δ_1 по крайней мере один не равен нулю и из системы уравнений (2.22) можно будет найти величины M_i°, из которых одна, пусть M_m°, может быть выбрана произвольно. Величины $M_1^\circ, \ldots, M_{m-1}^\circ$, a_1 являются простыми решениями системы (2.22), и для них определитель

$$\frac{\partial (P_1, \ldots, P_m)}{\partial (M_1^\circ, \ldots, M_{m-1}^\circ, a_1)} \neq 0 \tag{2.24}$$

При не равном нулю определителе (2.24) можно формально построить ряды (2.15) со сколь угодно большим числом членов.

Действительно периодическое решение для $y_s^{(1)}$ будет иметь вид:

$$y_s^{(1)} = M_1^{(1)}\varphi_{s1} + \ldots + M_{m-1}^{(1)}\varphi_{s,m-1} + M_m^{\circ}\varphi_{sm} + y_s^{(1)*} \tag{2.25}$$

где $M_1^{(1)},\ldots, M_{m-1}^{(1)}$ — произвольные постоянные, а $y_s^{(1)*}$ — какое-нибудь частное периодическое решение системы (2.17). Подставив (2.19) и (2.25) в (2.18), получим из условий периодичности функций $y_s^{(2)}$

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{e_1} (B_{ji} - a_1 A_{ji}) M_i^{(1)} + \sum_{i=e_1+1}^{m-1} B_{ji} M_i^{(1)} - \\
- a_2 \sum_{i=1}^{e_1} A_{ji} M_i^{\circ} + C_j = 0 \qquad (j = 1,\ldots,e_1) \\
B_{j1} M_1^{(1)} + \ldots + B_{j,m-1} M_{m-1}^{(1)} + C_j = 0 \qquad (j = e_1 + 1,\ldots, m)
\end{gathered} \tag{2.26}$$

где C_j — известные постоянные. Из системы уравнений (2.26) могут быть найдены величины $M_1^{(1)},\ldots, M_{m-1}^{(1)}$, a_2, так как определитель этой системы совпадает с не равным нулю определителем (2.24).

Таким образом, последовательно определяются все коэффициенты a_1, $a_2,\ldots$ ряда (2.15). Приняв в качестве a_1 последовательно все e_1 корней уравнения (2.23), получим e_1 характеристических показателей системы (1.1), разлагающихся по целым степеням μ.

Перейдем теперь к определению тех характеристических показателей, которые разлагаются по целым степеням величин $\mu^{1/2}$; число таких показателей должно быть $2e_2$. Подставляя ряды

$$\alpha = \mu^{1/2} a_1 + \mu a_2 + \mu^{3/2} a_3 + ,\ldots, \quad y_s = y_s^0 + \mu^{1/2} y_s^{(1)} + \mu y_s^{(2)} + \ldots \tag{2.27}$$

в (2.13), получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{dy_s^{(0)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta} y_\beta^{(0)}, \qquad \frac{dy_s^{(1)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta} y_\beta^{(1)} - a_1 y_s^{(0)} \\
\frac{dy_s^{(2)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta} y_\beta^{(2)} + \sum_{\beta=1}^{n} f_{s\beta}^{(1)} y_\beta^{(0)} - a_1 y_s^{(1)} - a_2 y_s^{(0)} \text{ и т. д.}
\end{gathered} \tag{2.28}$$

Приняв за порождающее решение (2.19), получим условия периодичности для функций $y_s^{(1)}$:

$$a_1 (M_1^{\circ} A_{j1} + \ldots + M_m^{\circ} A_{jm}) = 0 \qquad (j = 1,\ldots, m) \tag{2.29}$$

Так как $A_{ji} = 0$ при i, $j > e_1$, то последние $m - e_1$ условия (2.29) тождественно удовлетворяются, а первые e_1 условия при $a_1 \neq 0$ принимают вид:

$$M_1^{\circ} A_{j1} + \ldots + M_{e_1} A_{je_1} = 0 \qquad (j = 1,\ldots, e_1) \tag{2.30}$$

Покажем, что определитель $|A_{ji}|$ системы (2.30) отличен от нуля. Действительно, в противном случае уравнения (2.30) допускали бы по крайней мере одно решение c_1, $c_2,\ldots, c_{e_1}$, отличное от тривиального $c_1 = c_2 = \ldots = c_{e_1} = 0$. Тогда, придав индексу i фиксированное значение p, равное одному из чисел ряда $1, \ldots, e_1$, заменим решение φ_{sp} системы (1.2) решением $\varphi_{sp}^* = c_1\varphi_{s1} + \ldots + c_{e_1}\varphi_{se_1}$, оставляя остальные решения φ_{si} при $i \neq p$ без изменений. Для новой системы фундаментальных функций $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{s,p-1}, \varphi_{sp}^*, \varphi_{s,p+1}, \ldots, \varphi_{sm}$ величины A_{jp}^* будут равны:

$$A_{jp}^* = \int_0^\omega \sum_{s=1}^n \varphi_{sp}^*\psi_{sj}\,dt = c_1A_{j1} + \ldots + c_{e_1}A_{je_1} = 0$$

$$(j = 1, \ldots, e_1)$$

кроме того, $A_{jp}^* = 0$ при $j > e_1$ и мы имели бы $A_{1p}^* = \ldots = A_{mp}^* = 0$, что противоречит условию (2.10) и доказывает неравенство нулю определителя $|A_{ji}|$. Таким образом, уравнения (2.30) могут иметь только тривиальное решение $M_1^\circ = \ldots = M_{e_1}^\circ = 0$ и, следовательно,

$$y_s^\circ = M_{e_1+1}^\circ\varphi_{s,e_1+1} + \ldots + M_m^\circ\varphi_{sm} \tag{2.31}$$

$$\frac{dy_s^{(1)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta}y_\beta^{(1)} - a_1\sum_{i=e_1+1}^m M_i^\circ\varphi_{si} \tag{2.32}$$

где постоянные $M_{e_1+1}^\circ, \ldots, M_m^\circ$ остаются пока неопределенными. Семейство периодических решений системы (2.32) будет (2.33)

$$y_s^{(1)} = M_1^{(1)}\varphi_{s1} + \ldots + M_m^{(1)}\varphi_{sm} + a_1\left(M_{e_1+1}^\circ\varphi_{s,e_1+1}^{(1)} + \ldots + M_m^\circ\varphi_{sm}^{(1)}\right)$$

где $M_1^{(1)}, \ldots, M_m^{(1)}$ — новые произвольные постоянные.

Так как $A_{ji} = 0$ при $i, j < e_1$ и $A_{ji}^{(1)} = 0$, при $i, j < e_1 + e_2$ условия периодичности для функций $y_s^{(2)}$ после небольших преобразований примут следующий вид:

$$P_j = \sum_{i=e_1+1}^{\varkappa_s}(B_{ji} - a_1^2A_{ji}^{(1)})M_i^\circ + \sum_{i=\varkappa_s+1}^m B_{ji}M_i^\circ = 0 \qquad (j = e_1 + 1, \ldots, e_1 + e_2)$$

$$P_j = B_{je_1+1}M_{e_1+1}^\circ + \ldots + B_{jm}M_m^\circ = 0 \qquad (j = \varkappa_3 + 1, \ldots, m) \tag{2.34}$$

$$P_j = B_{j,e_1+1}M_{e_1+1}^\circ + \ldots + B_{jm}M_m^\circ - a_1(A_{j1}M_1^{(1)} + \ldots + A_{je_1}M_{e_1}^{(1)})$$

$$(j = 1, \ldots, e_1) \tag{2.35}$$

Постоянные $M_{e_1+1}^\circ, \ldots, M_m^\circ, M_1^{(1)}, \ldots, M_{e_1}^{(1)}$ в уравнениях (2.34) и (2.35) не все равны нулю только для тех значений a_1, которые обращают в нуль определитель системы (2.34), т. е. являются корнями уравнения

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} B_{e_1+1,e_1+1} - a_1^2A^{(1)}_{e_1+1,e_1+1} \ldots B_{e_1+1,\varkappa_s} - a_1^2A^{(1)}_{e_1+1,\varkappa_s} B_{e_1+1,\varkappa_s+1} \ldots B_{e_1+1,m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{\varkappa_s,e_1+1} - a_1^2A^{(1)}_{\varkappa_s,e_1+1} \ldots B_{\varkappa_s\varkappa_s} - a_1^2A^{(1)}_{\varkappa_3\varkappa_s}{}^{(1)}B_{\varkappa_3,\varkappa_3+1} \ldots B_{\varkappa_s m} \\ B_{\varkappa_s+1,e_1+1} \ldots\ldots\ldots\ldots B_{\varkappa_s+1,m} \\ B_{m,e_1+1} \ldots\ldots\ldots\ldots B_{mm} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.36}$$

Действительно, если определитель $\Delta_2 \neq 0$, то из однородной системы уравнений (2.34) следует, что $M_{e_1+1}^\circ = \ldots = M_m^\circ = 0$, но тогда при

$a_1 \neq 0$ из системы (2.35) с определителем $|A_{ji}| \neq 0$ получим, что $M_1^{(1)} = \ldots = M_{e_1}^{(1)} = 0$.

Из уравнения (2.36) могут быть определены в первом приближении все $2e_2$ характеристических показателей, если последние $m - \varkappa_3$ строки (и столбцы) определителя Δ_2 линейно независимы. Если, кроме того, все корни простые, то, приняв в качестве a_1 один из них, найдем величины $M_{e_1+1}^\circ \ldots M_m^\circ$, одна из которых, пусть M_m°, может быть выбрана произвольно, причем

$$\frac{\partial (P_{e_1+1} \ldots P_m)}{\partial (M^\circ_{e_1+1} \ldots M_{m-1}^\circ, a_1)} \neq 0 \tag{2.37}$$

Найдя постоянные $M_{e_1+1}^\circ \ldots, M_m^\circ$ из системы уравнений (2.35), однозначно определим $M_1^{(1)}, \ldots, M_{e_1}^{(1)}$.

Точно так же, как и для случая $\gamma = 1$, легко показать, что при неравном нулю определителе (2.37) формально могут быть построены ряды (2.27) с любым числом членов.

Рассмотрим еще случай $\gamma = 3$. Подставляя ряды

$$\alpha = \mu^{1/3} a_1 + \mu^{2/3} a_2 + \ldots, \qquad y_s = y_s^{(0)} + \mu^{1/3} y_s^{(1)} + \mu^{2/3} y_s^{(2)} + \ldots \tag{2.38}$$

в (2.13), получим

$$\frac{dy_s^{(0)}}{dt} = \sum_\beta a_{s\beta} y_\beta^{(0)}, \qquad \frac{dy_s^{(1)}}{dt} = \sum_\beta a_{s\beta} y_\beta^{(1)} - a_1 y_s^{(0)}$$

$$\frac{dy_s^{(2)}}{dt} = \sum_\beta a_{s\beta} y_\beta^{(2)} - a_1 y_s^{(1)} - a_2 y_s^{(0)}$$

$$\frac{dy_s^{(3)}}{dt} = \sum_\beta a_{s\beta} y_\beta^{(3)} + \sum_\beta f_{s\beta}^{(1)} y_\beta^{(0)} - a_1 y_s^{(2)} - a_2 y_s^{(1)} - a_3 y_s^{(0)} \text{ и т. д.}$$

Из первых двух систем уравнений найдем, что для функций $y_s^{(0)}$ и $y_s^{(1)}$ остаются справедливыми формулы (2.31) и (2.33). Условия периодичности функций $y_s^{(2)}$ будут

$$a_1 \sum_{i=1}^m A_{ji} M_i^{(1)} + a_1^2 \sum_{i=e_1+1}^m M_i^{(0)} A_{ji}^{(1)} +$$

$$+ a_2 \sum_{i=e_1+1}^m M_i^\circ A_{ji} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Последние $m - \varkappa_3$ условия тождественно выполняются, а $\varkappa_3$ первых могут быть записаны в следующем виде:

$$a_1 (A_{j1} M_1^{(1)} + \ldots + A_{je_1} M_{e_1}^{(1)}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, e_1 \tag{2.39}$$

$$a_1^2 (A_{j,e_1+1}^{(1)} M_{e_1+1}^\circ + \ldots + A_{j\varkappa_3}^{(1)} M_{\varkappa_3}^\circ) = 0, \qquad j = e_1 + 1, \ldots, \varkappa_3 \tag{2.40}$$

Определитель системы уравнений (2.40) $|A_{ji}^{(1)}|$, как нетрудно показать, отличен от нуля, поэтому

$$M_{e_1+1}^\circ = \ldots = M_{e_1+e_2}^\circ = M_1^{(1)} = \ldots = M_{e_1}^{(1)} = 0$$

и функции $y_s^{(0)}$, $y_s^{(1)}$, $y_s^{(2)}$ будут равны:

$$y_s^{(0)} = \sum_{i=\varkappa_3+1}^m M_i^\circ \varphi_{si}, \qquad y_s^{(1)} = \sum_{i=e_1+1}^m M_i^{(1)} \varphi_{si} + a_1 \sum_{i=\varkappa_3+1}^m M_i^\circ \varphi_{si}^{(1)}$$

$$y_s^{(2)} = \sum_{i=1}^m M_i^{(2)} \varphi_{si} + a_1 \sum_{i=e_1+1}^m M_i^{(1)} \varphi_{si}^{(1)} + a_1^2 \sum_{i=\varkappa_3+1}^m M_i^0 \varphi_{si}^{(2)} + a_2 \sum_{\varkappa_3+1}^m M_i^\circ \varphi_{si}^{(1)}$$

Преобразовывая условия периодичности функций $y_s^{(3)}$, получим

$$\sum_{i=\varkappa_3+1}^{m} B_{ji}M_i^\circ - a_1 \sum_{i=1}^{e_1} M_i^{(2)}A_{ji} = 0 \quad (j = 1,\dots, e_1)$$

$$\sum_{i=\varkappa_3+1}^{m} B_{ji}M_i^\circ - a_1^2 \sum_{i=e_1+1}^{\varkappa_3} M_i^{(1)}A_{ji}^{(1)} = 0 \quad (j = e_1 + 1,\dots, \varkappa_3) \tag{2.41}$$

$$\sum_{i=\varkappa_3+1}^{m} B_{ji}M_i^\circ - a_1^3 \sum_{i=\varkappa_3+1}^{\varkappa_4} M_i^\circ A_{ji}^{(2)} = 0 \quad (j = \varkappa_3 + 1,\dots, \varkappa_4)$$

$$\sum_{i=\varkappa_3+1}^{m} B_{ji}M_i^\circ = 0 \quad (j = \varkappa_4 + 1,\dots, m) \tag{2.42}$$

Из системы уравнений (2.42) следует, что постоянные M_i° отличны от нуля только при тех значениях a_1, которые удовлетворяют уравнению

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} B_{\varkappa_3+1,\varkappa_3+1}-a_1{}^3A^{(2)}_{\varkappa_3+1.\varkappa_3+1} B_{\varkappa_3+1,\varkappa_4}-a_1{}^3A^{(2)}_{\varkappa_3+1,\varkappa_4} B_{\varkappa_3+1,\varkappa_4+1} \dots B_{\varkappa_3+1,m} \\ \cdot\;\cdot \\ B_{\varkappa_4,\varkappa_3+1} - a_1{}^3A^{(2)}_{\varkappa_1,\varkappa_3+1} B_{\varkappa_4,\varkappa_4}-a_1{}^3A^{(2)}_{\varkappa_4,\varkappa_4} \quad B_{\varkappa_4,\varkappa_4+1} \dots B_{\varkappa_4,\,m} \\ B_{\varkappa_4+1,\varkappa_3+1} \cdot\; B_{\varkappa_4+1,m} \\ B_{m,\varkappa_3+1} \cdot\; B_{mm} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.43}$$

где $\varkappa_3 = e_1 + e_2$ и $\varkappa_4 = e_1 + e_2 + e_3$. Если последние $m - \varkappa_4$ строки (и столбцы) определителя Δ_3 линейно независимы и все корни уравнения (2.43) простые, то ряды (2.38) могут быть построены с любым числом членов. При $\gamma > 3$ для первых членов a_1 рядов (2.14) получаются уравнения той же структуры, что при $\gamma = 1,\ 2,\ 3$. Доказательство этого предложения не приводится.

До сих пор рассматривалось определение характеристических показателей системы (1.1) в резонансном случае. Если среди корней фундаментального уравнения (1.3) встречаются чисто мнимые корни вида $\lambda = \pm i\beta$, $\lambda_u = \pm (2\pi p_u / \omega + \beta)\, i$, где β не обращается в нуль и не кратно величинам $2\pi/\omega$, то характеристические показатели, отвечающие этим корням, отыскиваются в виде рядов $a = i\beta + \mu^{1/\gamma}a_1 + \mu^{2/\gamma}a_2 + \dots$ описанным способом без существенных изменений.

Примечание. В проведенном исследовании использовались условия периодичности (2.7) для получения некоторых общих зависимостей. На практике условия существования периодических решений неоднородных систем линейных уравнений можно записать, не прибегая к предварительному проведению заданной системы к каноническому виду и не рассматривая сопряженной системы (на чем мы не останавливаемся).

§ 3. Воспользуемся полученными результатами для исследования устойчивости периодических решений квазилинейных систем частного вида:

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{s\beta}z_\beta + f_s(t) + \mu F_s(t,\ z) \tag{3.1}$$

где $a_{s\beta}$ — постоянные коэффициенты, функции f_s и F_s непрерывны и периодичны по времени t с периодом ω, кроме того, функции F_s аналитичны по переменным $z_1,\dots, z_n$. Относительно матрицы $\| a_{s\beta} - \delta_{s\beta}\lambda \|$ будем предполагать, что она имеет ту же структуру, что и аналогичная матрица для квазигармонических систем (1.1), рассмотренных выше. Мы ограничимся резонансным случаем, т. е. допустим, что среди корней фундаментального уравнения (1.3) имеются нулевые корни $\lambda_0 = 0$ и корни вида $\lambda_u = \pm 2\pi p_u i / \omega$ (p_u — целые числа), которым соответствуют непростые элементарные делители. Вещественные части всех остальных корней уравнения (1.3) отрицательны.

Отметим, что квазилинейные системы (3.1), у которых чисто мнимые корни λ_0, λ_u фундаментального уравнения имеют элементарные делители второй степени ($q = 2$), встречаются во многих практически важных задачах, когда частоты возмущающих сил значительно больше собственных частот системы. Такие задачи возникают, в частности, при исследовании динамики быстроходных машин и механизмов.

Пусть система (3.1) имеет периодическое решение $z_s = \varphi_s(t, \mu)$, аналитическое относительно малого параметра μ, устойчивость которого изучается. Составляя уравнения в вариациях для этого решения, получим

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum [a_{s\beta} + \mu f_{s\beta}(\mu, t)] x_\beta \qquad \left(f_{s\beta}(\mu, t) = \frac{\partial F_s(t, z, \mu)}{\partial z_\beta} \right) \tag{3.2}$$

т. е. квазигармоническую систему рассмотренного выше вида.

В невырожденном случае будут справедливы следующие предложения.

1. Если корни λ_0, λ_u имеют только простые элементарные делители, то для асимптотической устойчивости периодического решения достаточно, чтобы все корни уравнения (2.23) имели отрицательные вещественные части. В этом случае задача устойчивости решается применением критерия Раусса-Гурвица.

2. Если критические корни λ_0, λ_u имеют элементарные делители как первой, так и второй степени, то для устойчивости периодического решения $z_s = \varphi_s(\mu, t)$ необходимо, чтобы корни уравнения (2.23) не имели положительной вещественной части и квадраты корней уравнения (2.36) были все вещественными отрицательными величинами

Первое условие очевидно, необходимость второго следует из того, что в уравнение (2.36) искомое a_1 входит только в четных степенях.

Оба условия являются необходимыми, но недостаточными для устойчивости периодического решения при $q = 2$.

3. Если критические корни λ_0, λ_u имеют элементарные делители третьей степени, то периодическое решение $z_s = \varphi_s(t, \mu)$ неустойчиво.

Действительно, обозначим $a_1^3 = v$, тогда при любых значениях v, комплексных или вещественных, удовлетворяющих уравнению (2.43), коэффициент a_1 примет по крайней мере одно значение, вещественная часть которого положительна.

Поступила 27 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев Н. Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики. Исаак Ньютон. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. Изд. АН СССР, М.—Л., 1943.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
3. Артемьев Н. А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики. Известия АН СССР, серия матем., т. 8, № 2, 1944.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1955.