Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ ОСНОВНЫХ АМПЛИТУД

А. П. Проскуряков

(Москва)

Метод построения периодических решений автономных систем с одной степенью свободы разработан подробно для случая простых и не равных нулю корней уравнения основных амплитуд [1,2]. В настоящей работе рассмотрен общий случай, когда корни упомянутого уравнения, будучи вещественными неотрицательными числами, могут иметь любую кратность.

1. Рассмотрим нелинейную колебательную систему с одной степенью свободы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \mu f\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ \mu\right) \tag{1.1}$$

Функцию $f(x, dx/dt, \mu)$ будем считать аналитической от своих аргументов в области их изменения. Величина μ является малым параметром.

Введем новое независимое переменное $\tau = kt$. Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \frac{\mu}{k^2} f\left(x,\ k\frac{dx}{d\tau},\ \mu\right) \tag{1.2}$$

В дальнейшем производные по τ будем обозначать буквой со штрихом.

Так как система автономна, то без ограничения общности в качестве одного из начальных условий может быть принято

$$x'(0) = 0 \tag{1.3}$$

При этом условии решение порождающего уравнения ($\mu = 0$)

$$x_0''(\tau) + x_0(\tau) = 0$$

имеет вид $x_0(\tau) = A_0 \cos\tau$.

Будем искать периодические решения основного уравнения (1.2) по методу малого параметра. В качестве второго начального условия примем

$$x(0) = A_0 + \beta \tag{1.4}$$

где β — функция от μ, обращающаяся в нуль при $\mu = 0$. Таким образом, искомая функция x будет иметь вид $x = x(\tau, \beta, \mu)$.

Известно, что период колебаний автономной системы (1.2) зависит от параметра μ и может быть представлен в виде суммы $T = 2\pi + \alpha$, где 2π является периодом порождающего решения, а α — некоторая функция μ, обращающаяся в нуль при $\mu = 0$.

Определим структуру функции $x(\tau, \beta, \mu)$. Предполагая, что эта функция разлагается в ряд по целым степеням параметров β и μ, будем иметь

$$x(\tau, \beta, \mu) = x_0(\tau) + B_1(\tau)\beta + C_1(\tau)\mu + B_2(\tau)\beta^2 + D_1(\tau)\beta\mu + C_2(\tau)\mu^2 + \ldots$$

Функции $B_n(\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$B_n''(\tau) + B_n(\tau) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

при начальных условиях

$$B_1(0) = 1, \quad B_1'(0) = 0, \quad B_n(0) = 0, \quad B_n'(0) = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Следовательно,

$$B_1(\tau) = \cos\tau, \quad B_n(\tau) = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Учитывая это, функцию $x(\tau, \beta, \mu)$ можно представить в виде

$$x(\tau, \beta, \mu) = A_0 \cos\tau + \beta\cos\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n + \frac{\partial C_n}{\partial\beta}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial\beta^2}\beta^2 + \ldots\right)\mu^n \tag{1.5}$$

Необходимо помнить, что все $C_n(\tau)$ и их производные по β взяты при $\beta = \mu = 0$. Из формулы (1.5) следует, что имеет место тождество

$$\left(\frac{\partial^m x}{\partial\beta^m}\right)_{\mu=0} = \left(\frac{\partial^m x}{\partial A_0{}^m}\right)_{\mu=0} \tag{1.6}$$

Очевидно, что этим свойством обладает не только функция x, но и любая ее производная по τ. В частности,

$$\left(\frac{\partial^m x'}{\partial\beta^m}\right)_{\mu=0} = \left(\frac{\partial^m x'}{\partial A_0{}^m}\right)_{\mu=0} \tag{1.7}$$

Докажем, что замена дифференцирования по β дифференцированием по A_0 возможна и в смешанных производных от x по β и μ при нулевых значениях этих параметров. Предварительно заметим, что функция $f(x, kx', \mu)$ при принятых допущениях также будет разлагаться в двойной ряд по целым степеням β и μ.

Рассмотрим коэффициент при $\beta^m\mu^{n+1}$ разложения функции $x(\tau, \beta, \mu)$. Этот коэффициент можно найти, решая соответствующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с нулевыми начальными условиями. Умножая обе части этого решения на $m!(n+1)!$, получим

$$\left(\frac{\partial^{m+n+1}x}{\partial\beta^m\partial\mu^{n+1}}\right)_0 = \frac{n+1}{k^2}\int_0^\tau\left(\frac{\partial^{m+n}f}{\partial\beta^m\partial\mu^n}\right)_0 \sin(\tau - \tau_1)\,d\tau_1 \tag{1.8}$$

Предположим, что

$$\left(\frac{\partial^{m+n}x}{\partial\beta^m\partial\mu^n}\right)_{\beta=0,\,\mu=0} = \left(\frac{\partial^{m+n}x}{\partial A_0{}^m\partial\mu^n}\right)_{\beta=0,\,\mu=0} \tag{1.9}$$

и что такое же тождество существует для x'. Докажем, что аналогичные формулы имеют место для смешанной производной $m + (n+1)$ порядка.

Так как

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial\beta^m \partial\mu^n} = F_{m,n}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}, \frac{\partial x}{\partial\mu}, \ldots, \frac{\partial^{m+n} x}{\partial\beta^m \partial\mu^n}, \frac{\partial x'}{\partial\beta}, \frac{\partial x'}{\partial\mu}, \ldots, \frac{\partial^{m+n} x'}{\partial\beta^m \partial\mu^n}\right)$$

то

$$\left(\frac{\partial^{m+n} f}{\partial\beta^m \partial\mu^n}\right)_{\beta=0,\,\mu=0} = \left(\frac{\partial^{m+n} f}{\partial A_0{}^m \partial\mu^n}\right)_{\beta=0,\,\mu=0}.$$

Из формулы (1.8) и из формулы, полученной дифференцированием обеих частей ее по τ, непосредственно следуют искомые соотношения. Но тождество (1.9) верно при $n=0$, следовательно, оно остается верным и при любом n. Аналогичные тождества имеют место для любых производных от x по τ.

Используя доказанные выше свойства, функцию $x(\tau, \beta, \mu)$ можно представить в виде

$$x(\tau, \beta, \mu) = A_0 \cos\tau + \beta\cos\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n + \frac{\partial C_n}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0{}^2}\beta^2 + \ldots\right)\mu^n \quad (1.10)$$

Следовательно, для того, чтобы построить функцию $x(\tau, \beta, \mu)$, необходимо знать в первую очередь коэффициенты $C_n(\tau)$ при μ^n. Остальные коэффициенты двойного ряда могут быть найдены последовательным дифференцированием $C_n(\tau)$ по A_0. Введем обозначение

$$H_n(\tau) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1} f}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta=0,\,\mu=0}$$

где $df/d\mu$ является полной частной производной функции $f(x, kx', \mu)$ по μ. Коэффициенты $C_n(\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$C_n''(\tau) + C_n(\tau) = \frac{1}{k^2} H_n(\tau)$$

при начальных условиях $C_n(0) = 0$, $C_n'(0) = 0$. Отсюда получаем

$$C_n(\tau) = \frac{1}{k^2}\int_0^\tau H_n(\tau_1)\sin(\tau - \tau_1)\,d\tau_1, \quad C_n'(\tau) = \frac{1}{k^2}\int_0^\tau H_n(\tau_1)\cos(\tau-\tau_1)\,d\tau_1 \quad (1.11)$$

Приводим выражения первых четырех функций $H_n(\tau)$ в виде

$$H_1(\tau) = f(x_0, kx_0', \mu) = f(A_0\cos\tau, -kA_0\sin\tau, 0) \quad (1.12)$$

$$H_2(\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 C_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0 C_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_0 \quad (1.13)$$

$$H_3(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 C_1{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\right)_0 C_1'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}\right)_0 C_1 C_1' +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right)_0 C_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial \mu}\right)_0 C_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 C_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0 C_2' \quad (1.14)$$

$$H_4(\tau) = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 C_1{}^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x'^3}\right)_0 C_1'^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \mu^3}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial x'}\right)_0 C_1{}^2 C_1' +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x'^2}\right)_0 C_1 C_1'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \mu}\right)_0 C_1{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x'^2 \partial \mu}\right)_0 C_1'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \mu^2}\right)_0 C_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x' \partial \mu^2}\right)_0 C_1' + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x' \partial \mu}\right)_0 C_1 C_1' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 C_1 C_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\right)_0 C_1' C_2' +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}\right)_0 (C_1 C_2' + C_1' C_2) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right)_0 C_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial \mu}\right)_0 C_2' + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 C_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0 C_3'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.15)$$

Значок 0 у скобок означает, что в производные от функции f вместо x, x', μ нужно подставить $A_0\cos\tau$, $-A_0\sin\tau$, 0.

2. Условия периодичности для функции $x(\tau, \beta, \mu)$ и ее первой производной по τ могут быть представлены в соответствии с начальными условиями (1.4) и (1.3) в следующем виде

$$x(2\pi + \alpha, \beta, \mu) = A_0 + \beta \tag{2.1}$$

$$x'(2\pi + \alpha, \beta, \mu) = 0 \tag{2.2}$$

Из условия (2.2) определим величину α, как неявную функцию $\alpha = \alpha(\beta, \mu)$. Будем искать α в виде двойного ряда по целым степеням β и μ. Для нахождения коэффициентов этого ряда необходимо вычислить частные производные от α по β и μ при $\tau = 2\pi$ и $\beta = \mu = 0$.

Существование производных от неявной функции $\alpha(\beta, \mu)$ определяется в данном случае условием

$$x''(2\pi, 0, 0) = -A_0 \neq 0 \tag{2.3}$$

Таким образом, построить ряд для функции $\alpha(\beta, \mu)$ возможно только в том случае, когда амплитуда порождающего решения отлична от нуля.

Так как все производные по β от $x'(\tau, \beta, \mu)$ равны нулю при $\tau = 2\pi$ и $\mu = 0$, то

$$\left(\frac{\partial^m \alpha}{\partial \beta^m}\right)_{\mu=0} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

В смешанных производных на основании тождества (1.9) дифференцирование функции α по β может быть заменено дифференцированием по A_0, т. е.

$$\left(\frac{\partial^{m+n}\alpha}{\partial \beta^m \partial \mu^n}\right)_{\beta=0,\, \mu=0} = \left(\frac{\partial^{m+n}\alpha}{\partial {A_0}^m \partial \mu^n}\right)_{\beta=0,\, \mu=0}$$

Следовательно, необходимо вычислить только частные производные от функции α по μ. Вычисляя последовательно первые четыре производные, получим

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)_0 = \frac{1}{A_0} C_1'(2\pi) = N_1(2\pi) \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2}\right)_0 = \frac{2}{A_0}\left[C_2'(2\pi) + \frac{1}{k^2} H_1(2\pi) N_1(2\pi)\right] = 2N_2(2\pi) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^3 \alpha}{\partial \mu^3}\right)_0 = \frac{6}{A_0}\Big\{C_3'(2\pi) + \frac{1}{k^2} H_1(2\pi) N_2(2\pi) - \Big[C_2(2\pi) + \frac{1}{3A_0} C_1'^2(2\pi) - \\ - \frac{1}{2k^2 A_0} H_1'(2\pi) C_1'(2\pi) - \frac{1}{k^2} H_2(2\pi)\Big] N_1(2\pi)\Big\} = 6N_3(2\pi)\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^4 \alpha}{\partial \mu^4}\right)_0 = \frac{24}{A_0}\Big\{C_4'(2\pi) + \frac{1}{k^2} H_1(2\pi) N_3(2\pi) - \Big[C_2(2\pi) - \frac{1}{k^2} H_2(2\pi)\Big] N_2(2\pi) - \\ - \Big[C_3(2\pi) + \frac{1}{A_0} C_2'(2\pi) C_1'(2\pi) - \frac{1}{k^2 A_0} H_1'(2\pi) C_2'(2\pi) + \frac{2}{3k^2 {A_0}^2} H_1(2\pi) C_1'^2(2\pi) - \\ - \frac{1}{6k^2 {A_0}^2} H_1''(2\pi) C_1'^2(2\pi) - \frac{1}{k^4 {A_0}^2} H_1(2\pi) H_1'(2\pi) C_1'(2\pi) - \\ - \frac{1}{2k^2 A_0} H_2'(2\pi) C_1'(2\pi) - \frac{1}{k^2} H_3(2\pi)\Big] N_1(2\pi)\Big\} = 24N_4(2\pi)\end{aligned} \tag{2.7}$$

. . . .

Итак, для функции α имеем

$$\alpha(\beta, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(N_n + \frac{\partial N_n}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 N_n}{\partial {A_0}^2}\beta^2 + \ldots\right)\mu^n \tag{2.8}$$

Заметим, что все величины N_n и их производные по A_0 взяты при $\tau = 2\pi$ и $\beta = \mu = 0$.

Рассмотрим теперь условие (2.1), предварительно его несколько упростив. Для этого разложим левые части равенств (2.1) и (2.1) в ряды по α. Затем умножим равенство (2.2) на α и вычтем его почленно из равенства (2.1). Получим

$$\begin{aligned}x(2\pi, \beta, \mu) - \frac{1}{2}\alpha^2 x''(2\pi, \beta, \mu) - \frac{1}{3}\alpha^3 x'''(2\pi, \beta, \mu) - \frac{1}{8}\alpha^4 \alpha''''(2\pi, \beta, \mu) - \ldots = \\ = A_0 + \beta\end{aligned} \tag{2.9}$$

Подставим в это равенство величины $x(2\pi, \beta, \mu)$, $x''(2\pi, \beta, \mu)\ldots$ на основании формулы (1.10), а величину α из формулы (2.8). Члены левой части этого равенства являются произведениями двух функций, каждая из которых обладает свойством (1.9). Содержащиеся в левой части равенства члены, не зависящие от μ, компенсируются правой частью. Таким образом, условие (2.9) может быть представлено в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n + \frac{\partial M_n}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_n}{\partial A_0^2}\beta^2 + \ldots\right)\mu^n = 0 \tag{2.10}$$

Заметим, что величины M_n также берутся при $\tau = 2\pi$ и $\beta = \mu = 0$. Вычисляя, получим

$$M_1(2\pi) = C_1(2\pi) \tag{2.11}$$

$$M_2(2\pi) = C_2(2\pi) + \frac{1}{2A_0}C_1'^2(2\pi) \tag{2.12}$$

$$M_3(2\pi) = C_3(2\pi) + \frac{1}{A_0}\left[C_2'(2\pi) + \frac{1}{2k^2A_0}H_1(2\pi)C_1'(2\pi)\right]C_1'(2\pi) \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered}M_4(2\pi) = C_4(2\pi) + \frac{1}{2A_0}C_2'^2(2\pi) + \frac{1}{A_0}\left[C_3'(2\pi) + \frac{1}{k^2A_0}H_1(2\pi)C_2'(2\pi) - \right.\\ - \frac{1}{2A_0}C_2(2\pi)C_1'(2\pi) - \frac{1}{8A_0^2}C_1'^3(2\pi) + \frac{1}{6k^2A^2}H_1'(2\pi)C_1'^2(2\pi) + \\ \left. + \frac{1}{2k^2A_0}H_2(2\pi)C_1'(2\pi) + \frac{1}{2k^4A_0^2}H_1^2(2\pi)C_1'(2\pi)\right]C_1'(2\pi)\end{gathered} \tag{2.14}$$

. . . .

3. Полученные формулы дают возможность перейти к определению величин α и β и построить периодические решения уравнения (1.2).

Предположим, что величина β может быть разложена в степенной ряд по μ

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\mu^n \tag{3.1}$$

Подставим этот ряд в формулу (2.10) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получим[1]

$$M_1(2\pi) = C_1(2\pi) = 0 \tag{3.2}$$

$$A_1\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + M_2(2\pi) = 0 \tag{3.3}$$

$$A_2\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + \frac{1}{2}A_1^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} + A_1\frac{\partial M_2}{\partial A_0} + M_3(2\pi) = 0 \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}A_3\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + A_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial A_0} + A_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\right) + \frac{1}{6}A_1^3\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} + \\ + \frac{1}{2}A_1^2\frac{\partial^2 M_2}{\partial A_0^2} + A_1\frac{\partial M_3}{\partial A_0} + M_4(2\pi) = 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

. . . .

Из полученных условий можно последовательно найти амплитуду порождающего решения A_0 и коэффициенты A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, определяющие начальное смещение системы β.

Условие (3.2) является амплитудным уравнением, из которого находятся A_0. Если A_0 является некратным корнем уравнения (3.2), то из остальных условий, которые в этом случае будут линейными уравнениями

[1] Формулы (3.2) — (3.4) совпадают с условиями периодичности (21), (26) и (31) для функций $a_n(\tau)$ статьи [2].

относительно A_1, A_2, ... , можно последовательно определить эти коэффициенты.

Если имеется кратный корень уравнения (3.2) с кратностью, равной двум, то для такого корня $\partial C_1 / \partial A_0 = 0$.

Для существования периодического решения в этом случае на основании (3.3) необходимо выполнение дополнительного условия $M_2(2\pi) = 0$.

Если это условие, с учетом (3.2), выполняется тождественно, то $\partial M_2 / \partial A_0 = 0$. При этом коэффициент A_1 найдется из квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} A_1{}^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0{}^2} + M_3(2\pi) = 0$$

Так как величина A_1 должна быть вещественной, то для A_1 может существовать или два значения, или ни одного. Для определения последующих коэффициентов A_2, A_3, ... уравнения будут опять линейными.

Аналогичным образом может быть рассмотрен трехкратный корень амплитудного уравнения (3.2). При этом для существования периодического решения необходимо удовлетворить еще одному дополнительному условию $M_3(2\pi) = 0$. Коэффициент A_1 находится в этом случае из уравнения третьей степени.

Очевидно, что для n-кратного корня уравнения (3.2) появится $n - 1$ дополнительных условий, которым этот корень должен удовлетворять, а коэффициент A_1 будет определяться из уравнения n-ой степени.

Таким образом, в случае кратных корней уравнения основных амплитуд возможна бифуркация порождающего решения.

Для определения периода решения уравнения (1.2) допустим, что период может быть представлен в виде степенного ряда по μ

$$T = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \cdots) \tag{3.6}$$

Тогда

$$\alpha = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} h_n\mu^n \tag{3.7}$$

Подставим в правую часть формулы (2.8) величину β из (3.1), а левую часть заменим рядом (3.7). Сравнивая коэффициенты в обоих частях равенства при μ с одинаковыми степенями, получим[1]

$$h_1 = \frac{1}{2\pi} N_1 \tag{3.8}$$

$$h_2 = \frac{1}{2\pi}\left(A_1 \frac{\partial N_1}{\partial A_0} + N_2\right) \tag{3.9}$$

$$h_3 = \frac{1}{2\pi}\left(A_2 \frac{\partial N_1}{\partial A_0} + \frac{1}{2} A_1{}^2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0{}^2} + A_1 \frac{\partial N_2}{\partial A_0} + N_3\right) \tag{3.10}$$

$$h_4 = \frac{1}{2\pi}\left[A_3 \frac{\partial N_1}{\partial A_0} + A_2\left(\frac{\partial N_2}{\partial A_0} + A_1 \frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0{}^2}\right) + \frac{1}{6} A_1{}^3 \frac{\partial^3 N_1}{\partial A_0{}^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} A_1{}^2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial A_0{}^2} + A_1 \frac{\partial N_3}{\partial A_0} + N_4\right] \tag{3.11}$$

. . . .

---

[1] Формулы (3.8) — (3.10) совпадают с формулами (22), (27) и (32) статьи [2], полученными из условий периодичности для функций $b_n(\tau)$.

Произведем дополнительную замену независимого переменного

$$\tau = \tau_0 (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \cdots) \tag{3.12}$$

и будем искать решение уравнения (1.2) в функции τ_0. Это решение имеет не зависящий от μ период, равный 2π. Подставим τ из формулы (3.12) в функции $C_n(\tau)$ и $\cos\tau$ и разложим их в ряды по μ. Получим

$$C_n(\tau) = C_n(\tau_0) + h_1\tau_0 C_n'(\tau_0)\mu + \left[h_2\tau_0 C_n'(\tau_0) + \tfrac{1}{2} h_1^2\tau_0^2 C_n''(\tau_0)\right]\mu^2 + \cdots \tag{3.13}$$

Далее

$$\cos\tau = \cos\tau_0 - h_1\tau_0 \sin\tau_0\mu - \left(h_2\tau_0 \sin\tau_0 + \tfrac{1}{2} h_1^2\tau_0^2 \cos\tau_0\right)\mu^2 - \\ - \left(h_3\tau_0 \sin\tau_0 + h_1h_2\tau_0^2\cos\tau_0 - \tfrac{1}{6} h_1^3\tau_0^3 \sin\tau_0\right)\mu^3 - \cdots \tag{3.14}$$

Подставим в формулу (1.10) значения функций $C_n(\tau)$ и $\cos\tau$, согласно формулам (3.13) и (3.14) и опустим значок 0 у τ. Левую часть этой формулы представим в виде степенного ряда по параметру μ

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \cdots \tag{3.15}$$

Сравнивая коэффициенты в обоих частях равенства при одинаковых степенях μ, получим

$$x_0(\tau) = A_0\cos\tau \tag{3.16}$$

$$x_1(\tau) = A_1\cos\tau + C_1(\tau) - h_1A_0\tau\sin\tau \tag{3.17}$$

$$x_2(\tau) = A_2\cos\tau + C_2(\tau) + h_1\tau C_1'(\tau) + A_1\frac{\partial C_1}{\partial A_0} - \\ - h_1A_1\tau\sin\tau - \tfrac{1}{2} h_1^2A_0\tau^2\cos\tau - h_2A_0\tau\sin\tau \tag{3.18}$$

$$x_3(\tau) = A_3\cos\tau + C_3(\tau) + h_1\tau C_2'(\tau) + A_1\frac{\partial C_2}{\partial A_0} + h_1A_1\tau\frac{\partial C_2'}{\partial A_0} + \tfrac{1}{2} h_1^2\tau^2 C_1''(\tau) + \\ + h_2\tau C_1'(\tau) + A_2\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + \tfrac{1}{2} A_1^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} - h_1A_2\tau\sin\tau - \tfrac{1}{2} - h_1^2A_1\tau^2\cos\tau - \\ - h_2A_1\tau\sin\tau + \tfrac{1}{6} h_1^3A_0\tau^3\sin\tau - h_1h_2A_0\tau^2\cos\tau - h_3A_0\tau\sin\tau \tag{3.19}$$

. . . .

Очевидно, что функции $C_n(\tau)$ содержат непериодические члены, которые компенсируются членами, зависящими от $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

4. Рассмотрим случай нулевого корня $A_0 = 0$ уравнения основных амплитуд (3.2).

Заметим, что амплитудное уравнение всегда имеет один нулевой корень, но может иметь и кратный нулевой корень, причем нечетной кратности. Предыдущий анализ в случае нулевого корня неприменим.

Произведем в уравнении (1.2) преобразование независимого переменного по формуле (3.12). Получим

$$x'' + h^2 x = \mu\frac{h^2}{k^2} f\left(x, \frac{k}{h}x', \mu\right) \tag{4.1}$$

При этом обозначено

$$h = 1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \cdots \tag{4.2}$$

Ищем решение уравнения (4.1) в виде ряда (3.15). Для функции x_1 имеем уравнение

$$x_1'' + x_1 = k^{-2} f(0, 0, 0)$$

Решение этого уравнения при условиях (1.3) и (1.4) имеет вид

$$x_1 = P_1 \cos\tau + k^{-2} f(0, 0, 0), \qquad P_1 = A_1 - k^{-2} f(0, 0, 0)$$

Для функции x_2 получим уравнение

$$x_2'' + x_2 = -2h_1 x_1 + \frac{2h_1}{k^2} f(0, 0, 0) + \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0 x_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_0\right]$$

Если $A_0 = 0$ является простым корнем, то из условия периодичности для функции x_2 следует, что $P_1 = 0$. В случае кратного нулевого корня получаем условие

$$\left[2h_1 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\right] P_1 = 0$$

Если принять, что выражение в скобке равно нулю, то из условия периодичности для функции x_3 найдем, что $P_1 = 0$. Таким образом, имеем $x_1 = A_1$. Из условий периодичности для последующих функций x_n получим $x_2 = A_2$, $x_3 = A_3$ и т. д. Следовательно

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu^n = \beta(\mu) \tag{4.3}$$

Таким образом, нулевое решение порождающего уравнения отвечает не зависящему от времени решению полного уравнения.

Подставим найденное значение x в уравнение (1.2). Имеем

$$\beta = \mu k^{-2} f(\beta, 0, \mu) \tag{4.4}$$

Разлагая обе части этого равенства в ряды по μ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, будем иметь формулы для последовательного определения коэффициентов A_n.

Случай нулевого корня соответствует равновесию порождающей системы. Следовательно, равновесие порождающей системы переходит в равновесие полной системы. При этом может измениться только координата положения равновесия.

5. Пусть функция $f(x, kx', \mu)$ не зависит от μ и имеет вид $f(x, kx') = kf_1(x)x'$. В этом случае выражения для $H_n(\tau)$ упрощаются

$$H_2(\tau) = k\frac{\partial}{\partial\tau}[f_1(x_0) C_1] \tag{5.1}$$

$$H_3(\tau) = k\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{2} f_1'(x_0) C_1^2 + f_1(x_0) C_2\right] \tag{5.2}$$

$$H_4(\tau) = k\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{6} f_1''(x_0) C_1^3 + f_1'(x_0) C_1 C_2 + f_1(x_0) C_3\right] \tag{5.3}$$

Можно показать, что в этом случае $C_1'(2\pi) = 0$, $C_2(2\pi) = 0$.

Отсюда следует на основании (2.12) и (3.3), что для простых корней уравнения основных амплитуд $A_1 = 0$. Далее мож о показать, что для n-кратного корня имеет место равенство $\partial^{n-1} C_2 / \partial A_0^{n-1} = 0$.

6. Рассмотрим некоторые примеры. 1° Функция $f(x,\ kx')$ вида

$$f(x,\ kx') = k(\alpha + \varepsilon x + \beta x^2 + \varkappa x^3 + \gamma x^4)\,x' \qquad (6.1)$$

Уравнение основных амплитуд после отбрасывания нулевого корня будет

$$\gamma A_0^4 + 2\beta A_0^2 + 8\alpha = 0.$$

Кратные корни этого уравнения равны

$$A_0^2 = -\beta/\gamma, \qquad \beta^2 = 8\alpha\gamma$$

Уравнение для коэффициента A_1 при этом будет

$$A_1^2 + \frac{1}{576}A_0^4k^{-2}\left(\frac{1}{128}\gamma^2A_0^6 + \frac{257}{100}\varkappa^2A_0^4 + \frac{41}{5}\varepsilon\varkappa A_0^2 + \frac{13}{2}\varepsilon^2\right) = 0$$

Это уравнение не имеет вещественных корней ни в случае $\varepsilon = \varkappa = 0$, ни в общем случае. Таким образом, при кратных корнях амплитудного уравнения не существует периодического решения уравнения (1.1) с функцией $f(x,\ kx')$, определяемой формулой (6.1).

2°. Функция $f(x,\ kx')$ вида

$$f(x,\ kx') = k(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6)\,x' \qquad (6.2)$$

Уравнение основных амплитуд (без нулевого корня) будет

$$5\delta A_0^6 + 8\gamma A_0^4 + 16\beta A_0^2 + 64\alpha = 0$$

Если рассматривать двукратный корень этого уравнения, то нужно добавить еще соотношение

$$15\delta A_0^4 + 16\gamma A_0^2 + 16\beta = 0$$

Вычисляя функцию $C_1(\tau)$, получим

$$C_1(\tau) = \frac{1}{64}A_0^5k^{-1}\left[\frac{1}{48}\delta A_0^2\sin 7\tau + \left(\frac{5}{24}\delta A_0^2 + \frac{1}{6}\gamma\right)\sin 5\tau -\right.$$
$$\left. - \left(\frac{3}{4}\delta A_0^2 + \frac{1}{2}\gamma\right)\sin 3\tau + \left(\frac{17}{16}\delta A_0^2 + \frac{2}{3}\gamma\right)\sin\tau\right]$$

Для коэффициента A_1 имеем уравнение

$$(15\delta A_0^2 + 8\gamma)A_1^2 + \frac{1}{128^2}A_0^{10}k^{-2}\left(\frac{2117}{384}\delta^3A_0^6 + \frac{1621}{144}\gamma\delta^2A_0^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{1139}{18}\gamma^2\delta A_0^2 + \frac{16}{9}\gamma^3\right) = 0$$

При $\delta = 0$ периодическое решение (как это следует из примера 1°) существовать не будет. При $\delta \neq 0$ будет существовать довольно узкая область, в которой возможны периодические колебания. Границами этой области служат нули многочленов, стоящих при A_1^2 и в свободном члене уравнения. Имеем

$$-1.875A_0^2 < \gamma/\delta < -1.527A_0^2$$

Верхняя граница определена приближенно.

Период этих колебаний с точностью до μ^3 будет

$$T = \frac{2\pi}{k}\left[1 + \frac{1}{64^2}A_0^8k^{-2}\left(\frac{89}{32}\delta^2A_0^4 + \frac{23}{6}\delta\gamma A_0^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\right)\mu^2 + \cdots\right]$$

Сами колебания определяются с точностью до μ^2 формулой

$$x(\tau) = A_0\cos\tau + [A_1\cos\tau + C_1(\tau)]\,\mu + \cdots$$

где величины A_0, A_1 и $C_1(\tau)$ находятся из вышенаписанных формул.

Поступила 15 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956
2. Проскуряков А. П., К построению периодических решений автономных систем с одной степенью свободы. ПММ. 1957, т. XXI, вып. 4, стр. 585—590