Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

КАЧЕНИЕ ШАРА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Е. И. Харламова

(Москва)

Задача о качении шара по горизонтальной плоскости разрешена полностью Чаплыгиным в предположении, что центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром. Насколько нам известно, задача о качении по наклонной плоскости неоднородного шара, имеющего трехосный эллипсоид инерции для центра тяжести, совпадающего с геометрическим центром шара, до сих пор не была разрешена. В настоящей работе установлено, что при некоторых ограничениях, накладываемых на начальные условия, уравнения движения шара по наклонной плоскости могут быть приведены к уравнениям, по форме совпадающим с уравнениями, исследованными Чаплыгиным.

Свяжем с наклонной плоскостью систему координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, направив ось $O_1\zeta_1$ перпендикулярно плоскости $O_1\xi_1$, по линии кратчайшего спуска. В геометрическом центре шара возьмем начало системы координат $O\xi\eta\zeta$ с осями, параллельными осям $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$.

Пусть R_ξ, R_η, R_ζ — составляющие по осям $O\xi\eta\zeta$ реакции плоскости в точке прикосновения шара, K_ξ, K_η, K_ζ — проекции кинетического момента шара относительно его центра на эти оси, $\mathbf{v}(v_\xi, v_\eta, 0)$ — скорость центра шара, $\boldsymbol{\omega}(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ — угловая скорость его.

Допуская, что центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром, запишем общие теоремы динамики:

$$m\frac{dv_\xi}{dt} = F + R_\xi, \qquad m\frac{dv_\eta}{dt} = R_\eta$$
$$\frac{dK_\xi}{dt} = \rho R_\eta, \qquad \frac{dK_\eta}{dt} = -\rho R_\xi, \qquad \frac{dK_\zeta}{dt} = 0 \tag{1}$$

где m — масса шара, ρ — его радиус, F — составляющая силы тяжести, параллельная плоскости.

Из уравнений (1) получаем

$$\frac{dK_\xi}{dt} = m\rho\frac{dv_\eta}{dt}, \qquad \frac{dK_\eta}{dt} = -\rho\left(m\frac{dv_\xi}{dt} - F\right), \qquad \frac{dK_\zeta}{dt} = 0$$

или

$$K_\xi - m\rho v_\eta = n, \qquad K_\eta + m\rho v_\xi = \rho F t, \qquad K_\zeta = h$$

Постоянная второго интеграла положена равной нулю, что не умаляет общности задачи, так как время в уравнения входит лишь под знаком дифференциала.

Полагая, что качение шара по плоскости происходит без скольжения и, следовательно, скорость точки шара, касающейся плоскости, равна нулю, имеем

$$\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \rho \mathbf{k} = 0 \tag{2}$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси $O\zeta$. В проекциях на оси $O\xi\eta\zeta$ получаем

$$v_\xi = \rho\omega_\eta, \qquad v_\eta = -\rho\omega_\xi \tag{3}$$

Поэтому

$$K_\xi + m\rho^2\omega_\xi = n, \qquad K_\eta + m\rho^2\omega_\eta = \rho F t, \qquad K_\zeta = h \tag{4}$$

Свяжем неизменно с шаром систему координат $Oxyz$, направив оси этой системы по главным осям эллипсоида инерции для его центра O. Главные центральные моменты инерции обозначим через L, M, N, а составляющие угловой скорости по этим осям через p, q, r. Если проекции единичных векторов осей O_ξ, O_η, O_ζ на оси $Oxyz$ обозначить соответственно через α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'', то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= p\alpha + q\alpha' + r\alpha'', & K_\xi &= Lp\alpha + Mq\alpha' + Nr\alpha'', \\ \omega_\eta &= p\beta + q\beta' + r\beta'', & K_\eta &= Lp\beta + Mq\beta' + Nr\beta'' \\ \omega_\zeta &= p\gamma + q\gamma' + r\gamma'', & K_\zeta &= Lp\gamma + Mq\gamma' + Nr\gamma'' \end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) получаем

$$(K_\xi + m\rho^2\omega_\xi)^2 + (K_\eta + m\rho^2\omega_\eta)^2 + (K_\zeta + m\rho^2\omega_\zeta)^2 = n^2 + \rho^2F^2t^2 + (h + m\rho^2\omega_\zeta)^2 \tag{6}$$

Это выражение в осях $Oxyz$

$$\begin{aligned} (L + m\rho^2)^2p^2 + (M + m\rho^2)^2q^2 + (N + m\rho^2)^2r^2 &= \\ = n^2 + \rho^2F^2t^2 + [h + m\rho^2(p\gamma + q\gamma' + r\gamma'')]^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Так как единичный вектор $\mathbf{k}(\gamma, \gamma', \gamma'')$ остается неизменным, то учитывая (2), имеем

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{v} = -\rho\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{8}$$

и, следовательно, квадрат скорости может быть представлен в виде

$$v^2 = \rho^2(\dot\gamma^2 + \dot\gamma'^2 + \dot\gamma''^2) \tag{9}$$

вследствие чего интеграл энергии запишется так:

$$Lp^2 + Mq^2 + Nr^2 + m\rho^2(\dot\gamma^2 + \dot\gamma'^2 + \dot\gamma''^2) = 2F\xi_1 + l \tag{10}$$

где l — постоянная живых сил, которую, не умаляя общности, можно обратить в нуль выбором начала неподвижной системы координат на наклонной плоскости.

Кроме того, $v_\xi = d\xi_1/dt$ и $v_\eta = d\eta_1/dt$, поэтому из (3) и (5)

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \rho(p\beta + q\beta' + r\beta''), \qquad \frac{d\eta_1}{dt} = -\rho(p\alpha + q\alpha' + r\alpha'') \tag{11}$$

Уравнение (8) дает

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma' \tag{12}$$

Из этих уравнений и третьей формулы (4), записанной с учетом (5) в виде

$$Lp\gamma + Mg\gamma' + Nr\gamma'' = h \tag{13}$$

находим

$$p(L\gamma^2+M\gamma'^2+N\gamma''^2)=h\gamma+N\gamma''\dot{\gamma}'-M\gamma'\dot{\gamma}'' \tag{14}$$
$$q(L\gamma^2+M\gamma'^2+N\gamma''^2)=h\gamma'+L\gamma\dot{\gamma}''-N\gamma''\dot{\gamma}$$
$$r(L\gamma^2+M\gamma'^2+M\gamma''^2)=h\gamma''+M\gamma'\dot{\gamma}-L\gamma\dot{\gamma}'$$

Вторую формулу (4) можно записать

$$(L+m\rho^2)p\beta+(M+m\rho^2)q\beta'+(N+m\rho^2)r\beta''=\rho Ft$$

Присоединяя к ней формулы, выражающие соотношения между направляющими косинусами прямоугольных осей, $\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0$, $\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1$ и разрешая эти три выражения [2] относительно β, β', β'', получим с учетом (7) и (13)

$$(n^2+\rho^2F^2t^2)\beta=n\,[(M+m\rho^2)q\gamma''-(N+m\rho^2)r\gamma']+(L+m\rho^2)p\rho Ft-$$
$$-\rho Ft\,[h+m\rho^2(p\gamma+q\gamma'+r\gamma'')]\gamma$$
$$(n^2+\rho^2F^2t^2)\beta'=n\,[(N+m\rho^2)r\gamma-(L+m\rho^2)p\gamma'']+(M+m\rho^2)q\rho Ft-$$
$$-\rho Ft\,[h+m\rho^2(p\gamma+q\gamma'+r\gamma'')]\gamma' \tag{15}$$
$$(n^2+\rho^2F^2t^2)\beta''=n\,[(L+m\rho^2)p\gamma'-(M+m\rho^2)q\gamma]+(N+m\rho^2)r\rho Ft-$$
$$-\rho Ft\,[h+m\rho^2(\rho\gamma+q\gamma'+r\gamma'')]\gamma''$$

Подставив выражения (15) в первое уравнение (11), получим

$$\frac{n^2+\rho^2F^2t^2}{\rho}\frac{d\xi_1}{dt}=n\,\{[(M+m\rho^2)q\gamma''-(N+m\rho^2)r\gamma']\,p+$$
$$+[(N+m\rho^2)r\gamma-(L+mp^2)p\gamma'']\,q+[(L+m\rho^2)p\gamma'-(M+m\rho^2)q\gamma]\,r\}+$$
$$+\rho Ft\,[(L+m\rho^2)p^2+(M+m\rho^2)q^2+(N+m\rho^2)r^2]-$$
$$-\rho^3Ftm(\rho\gamma+q\gamma'+r\gamma'')^2-h\rho Ft\,(p\gamma+q\gamma'+r\gamma'') \tag{16}$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, можно записать так:

$$Lp(r\gamma'-q\gamma'')+Mq(p\gamma''-r\gamma)+Nr(q\gamma-p\gamma')=Lp\dot{\gamma}+Mq\dot{\gamma}'+Nr\dot{\gamma}'' \tag{17}$$

Второе и третье слагаемые правой части уравнения (16) преобразуем с учетом (10) и очевидного соотношения

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,$$

следующим образом:

$$\rho Ft\,\{Lp^2+Mq^2+Nr^2+m\rho^2[(p^2+q^2+r^2)(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)-$$
$$-(p\gamma+q\gamma'+r\gamma'')^2]\}=\rho Ft\,\{Lp^2+Mq^2+Nr^2+$$
$$+m\rho^2[(r\gamma'-q\gamma'')^2+(p\gamma''-r\gamma)^2+(q\gamma-p\gamma')^2]\}=$$
$$=\rho Ft\,[Lp^2+Mq^2+Nr^2+m\rho^2(\dot{\gamma}^2+\dot{\gamma}'^2+\dot{\gamma}''^2)]=2\rho F^2\xi_1 t$$

Используя выражения (14), найдем

$$p\gamma+q\gamma'+r\gamma''=\frac{1}{H}[(M-N)\gamma'\gamma''\dot{\gamma}+(N-L)\gamma''\gamma\dot{\gamma}'+(L-M)\gamma\gamma'\dot{\gamma}''+h] \tag{18}$$

где

$$H=L\gamma^2+M\gamma'^2+N\gamma''^2$$

Уравнение (16) запишется теперь в виде

$$\frac{n^2+\rho^2F^2t^2}{\rho}\frac{d\xi_1}{dt}=n\,(Lp\dot{\gamma}+Mq\dot{\gamma}'+Nr\dot{\gamma}'')+2\rho F^2\xi_1 t-$$
$$-\frac{1}{H}\rho Fht\,[(M-N)\gamma'\gamma''\dot{\gamma}+(N-L)\gamma''\gamma\dot{\gamma}'+(L-M)\gamma\gamma'\dot{\gamma}''+h] \tag{19}$$

Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений (7), (10), (14), (17), (19) для определения p, q, r, γ, γ', γ'', ξ_1.

Исключая p, q, r из (7) при помощи (14), получим

$$
\begin{gathered}
MN\dot{\gamma}^2 + NL\dot{\gamma}'^2 + LM\dot{\gamma}''^2 + h^2 + \\
+ (L\gamma^2 + M\gamma'^2 + N\gamma''^2)\,[m\rho^2(\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}'^2 + \dot{\gamma}''^2) - 2F\xi_1] = 0
\end{gathered} \tag{20}
$$

Для удобства дальнейших вычислений запишем интеграл (10) в таком виде:

$$
\begin{gathered}
(L + m\rho^2)\,p^2 + (M + m\rho^2)\,q^2 + (N + m\rho^2)\,r^2 = 2F\xi_1 + \\
+ m\rho^2\,[(p^2 + q^2 + r^2)(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2) - (r\gamma' - q\gamma'')^2 - (p\gamma'' - r\gamma)^2 - (q\gamma - p\gamma')^2]
\end{gathered}
$$

или

$$
(L + m\rho^2)\,p^2 + (M + m\rho^2)\,q^2 + (N + m\rho^2)\,r^2 = 2F\xi_1 + m\rho^2\,(p\gamma + q\gamma' + r\gamma'')^2
$$

Умножая это выражение на $m\rho^2$ и вычитая из интеграла (7), получаем

$$
\begin{gathered}
L(L + m\rho^2)\,p^2 + M(M + m\rho^2)\,q^2 + N(N + m\rho^2)\,r^2 = \\
= n^2 + \rho^2F^2t^2 + h^2 + 2hm\rho^2\,(p\gamma + q\gamma' + r\gamma'') - 2m\rho^2F\xi_1
\end{gathered}
$$

С учетом (14) и (18) это соотношение можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{H^2}\,[(LN\gamma''\dot{\gamma}' - LM\gamma'\dot{\gamma}'')^2 + (ML\gamma\dot{\gamma}'' - MN\dot{\gamma}'')^2 + (NM\gamma'\dot{\gamma} - NL\gamma\dot{\gamma}')^2] + \\
+ \frac{m\rho^2}{H}\,(MN\dot{\gamma}^2 + NL\dot{\gamma}'^2 + LM\dot{\gamma}'')^2 = -\frac{h^2}{H^2}\,(L^2\gamma^2 + M^2\gamma'^2 + N^2\gamma''^2) - \\
- \frac{2h}{H^2}\,[MN(N - M)\,\gamma'\gamma''\dot{\gamma} + NL(L - N)\,\gamma''\gamma\dot{\gamma}' + LM(M - L)\,\gamma\gamma'\dot{\gamma}''] - \\
+ \frac{2h}{H}\,m\rho^2\,[(M - N)\,\gamma'\gamma''\dot{\gamma} + (N - L)\,\gamma''\gamma\dot{\gamma}' + (L - M)\,\gamma\gamma'\dot{\gamma}'' + h] - \\
- \frac{m\rho^2h^2}{H} + h^2 + n^2 + \rho^2F^2t^2 - 2m\rho^2F\xi_1
\end{gathered} \tag{21}
$$

Исключая p, q, r из (19), получим

$$
\begin{gathered}
\frac{n^2 + \rho^2F^2t^2}{\rho}\,\frac{d\xi_1}{dt} = 2\rho F^2\xi_1 t - \\
- \frac{\rho Fht}{H}\,[h + (M - N)\,\gamma'\gamma''\dot{\gamma} + (N - L)\,\gamma''\gamma\dot{\gamma}' + (L - M)\,\gamma\gamma'\dot{\gamma}''] + \\
+ \frac{n}{H}\,[L(M - N)\,\dot{\gamma}\dot{\gamma}'\gamma'' + M(N - L)\,\gamma'\dot{\gamma}''\dot{\gamma} + N(L - M)\,\gamma''\dot{\gamma}\dot{\gamma}']
\end{gathered} \tag{22}
$$

Пусть шар положен на плоскость без толчка, тогда постоянные интегрирования h и n в (4) равны нулю. Уравнение (22) в этом случае имеет вид:

$$
\frac{d\xi_1}{dt} = 2\,\frac{\xi_1}{t}, \quad \text{или} \quad \xi_1 = \frac{1}{2}\,\nu t^2 \tag{23}
$$

Определим постоянную ν. Положение шара на плоскости определяется координатами центра ξ_1, η_1 и ориентацией осей $Oxyz$ по отношению к плоскости, т. е. углами Эйлера. Положив в начальный момент шар на плоскость, мы задаем тем самым определенные начальные значения углов Эйлера, а следовательно, и все девять направляющих косинусов α_0, α_0', α_0'', β_0, β_0', β_0'', γ_0, γ_0', γ_0''.

Так как шар в начальный момент находился в покое,

$$p_0 = q_0 = r_0 = 0 \tag{24}$$

Подставив выражения (5) в (4), получим

$$\begin{aligned} &Ap\alpha + Bq\alpha' + Cr\alpha'' = 0 \\ &Ap\beta + Bq\beta' + Cr\beta'' = \rho Ft \\ &Lp\gamma + Mq\gamma' + Nr\gamma'' = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$A = L + m\rho^2 \qquad B = M + m\rho^2, \qquad C = N + m\rho^2 \tag{26}$$

Так как $d\xi_1 / dt = \nu t$, первое выражение (11) дает

$$p\beta + q\beta' + r\beta'' = \frac{\nu}{\rho} t \tag{27}$$

Дифференцируя (25) и (27) по t и полагая $t = 0$, получаем с учетом (24)

$$A\alpha_0 \dot{p}_0 + B\alpha_0' \dot{q}_0 + C\alpha_0'' \dot{r}_0 = 0$$

$$A\beta_0 \dot{p}_0 + B\beta_0' \dot{q}_0 + C\beta_0'' \dot{r}_0 = \rho F, \qquad L\gamma_0 \dot{p}_0 + M\gamma_0' \dot{q}_0 + N\gamma_0'' \dot{r}_0 = 0$$

$$\beta_0 \dot{p}_0 + \beta_0' \dot{q}_0 + \beta_0'' \dot{r}_0 = \frac{\alpha}{\rho} \tag{28}$$

Определитель первых трех уравнений относительно искомых начальных значений $\dot{p}_0$, $\dot{q}_0$, $\dot{r}_0$ отличен от нуля. Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A\alpha_0 & B\alpha_0' & C\alpha_0'' \\ A\beta_0 & B\beta_0' & C\beta_0'' \\ L\gamma_0 & M\gamma_0' & N\gamma_0'' \end{vmatrix} = LBC\gamma_0 (\alpha_0'\beta_0'' - \alpha_0''\beta_0') +$$
$$+ MCA\gamma_0' (\alpha_0''\beta_0 - \alpha_0\beta_0'') + NAB\gamma_0'' (\alpha_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0)$$

Но

$$\gamma = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta', \qquad \gamma' = \alpha''\beta - \alpha\beta'', \qquad \gamma'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

Поэтому

$$\Delta = LBC\gamma_0^2 + MCA\gamma_0'^2 + NAB\gamma_0''^2 \neq 0$$

и

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= \frac{\rho F}{\Delta} (CM\alpha_0''\gamma_0' - BN\alpha_0'\gamma_0'') \\ \dot{q}_0 &= \frac{\rho F}{\Delta} (AN\alpha_0\gamma_0'' - CL\alpha_0''\gamma_0) \\ \dot{r}_0 &= \frac{\rho F}{\Delta} (BL\alpha_0'\gamma_0 - AM\alpha_0\gamma_0') \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (28), получаем

$$\nu = \frac{\rho F}{\Delta} [\beta_0 (CM\alpha_0''\gamma_0' - BN\alpha_0'\gamma_0'') + \beta_0' (AN\alpha_0\gamma_0'' - CL\alpha_0''\gamma_0) +$$
$$+ \beta_0'' (BL\alpha_0'\gamma_0 - AM\alpha_0\gamma_0')]$$

что при подстановке (26) дает окончательно

$$\nu = \rho^2 F \frac{MN\beta_0^2 + NL\beta_0'^2 + LM\beta_0''^2 + m\rho^2 (L\gamma_0^2 + M\gamma_0'^2 + N\gamma_0''^2)}{LBC\gamma_0^2 + MCA\gamma_0'^2 + NAB\gamma_0''^2}$$

Таким образом, центр шара по направлению линии кратчайшего спуска движется равноускоренно, причем ускорение зависит от начальной ориентации главных осей центрального эллипсоида инерции шара по отношению к плоскости.

Уравнения (20) и (21) при подстановке ξ_1 из (23) дают при указанных условиях

$$\begin{gathered}\frac{1}{H}\left(MN\dot{\gamma}^2+NL\dot{\gamma}'^2+LM\dot{\gamma}''^2\right)+m\rho^2\left(\dot{\gamma}^2+\dot{\gamma}'^2+\dot{\gamma}''^2\right)=\nu F t^2\\ \frac{1}{H^2}\left[(LN\gamma''\dot{\gamma}'-LM\gamma'\dot{\gamma}'')^2+(ML\gamma\dot{\gamma}''-MN\gamma''\dot{\gamma})^2+\right.\\ \left.+(NM\gamma'\dot{\gamma}-NL\gamma\dot{\gamma}')^2\right]+\frac{m\rho^2}{H}\left(MN\dot{\gamma}^2+NL\dot{\gamma}'^2+LM\dot{\gamma}''^2\right)=\rho^2F(F-m\nu)\,t^2\end{gathered}\tag{29}$$

Введем в рассмотрение новую независимую переменную τ равенством

$$2t\,dt=d\tau$$

тогда формулы (29) примут вид:

$$\begin{gathered}\frac{1}{H}\left[MN\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2+NL\left(\frac{d\gamma'}{d\tau}\right)^2+LM\left(\frac{d\gamma''}{d\tau}\right)^2\right]+m\rho^2\left[\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{d\gamma''}{d\tau}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\nu F\\ \frac{1}{H^2}\left[\left(LN\gamma''\frac{d\gamma'}{d\tau}-LM\gamma'\frac{d\gamma''}{d\tau}\right)^2+\left(ML\gamma\frac{d\gamma''}{d\tau}-MN\gamma''\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2+\right.\\ \left.+\left(NM\gamma'\frac{d\gamma}{d\tau}-NL\gamma\frac{d\gamma'}{d\tau}\right)^2\right]+\frac{m\rho^2}{H}\left[MN\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2+NL\left(\frac{d\gamma'}{d\tau}\right)^2+LM\left(\frac{d\gamma''}{d\tau}\right)^2\right]=\\ =\frac{\rho^2F}{4}(F-m\nu)\end{gathered}\tag{30}$$

Уравнения (30) совпадают с уравнениями (18), (19) работы [1] Чаплыгина, описывающими движение шара по горизонтальной плоскости при условии, что кинетический момент горизонтален.

Таким образом решаемая нами задача сведена к уже изученной задаче. Все выводы, полученные Чаплыгиным в его исследовании для $h=0$, распространяются и на рассматриваемую задачу, если время заменить параметром τ.

В частности, остается справедливым и геометрическое истолкование движения, данное Чаплыгиным в его работе и заключающееся в следующем: с шаром связываются две поверхности второго порядка — эллипсоид и гиперболоид. Около шара описывается квадрат, одна сторона этого квадрата касается шара в точке соприкосновения его с плоскостью и перпендикулярна к линии кратчайшего спуска, параллельная ей сторона касается шара в диаметрально противоположной точке. При движении шара связанные с ним поверхности прикасаются к сторонам этого квадрата. В отличие от задачи, рассмотренной Чаплыгиным, квадрат в направлении, перпендикулярном к своей плоскости, движется не с постоянной скоростью, а равноускоренно с ускорением ν.

Для общего случая, т. е. при $n\neq 0$, $h\neq 0$, задача сводится к интегрированию системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Поступила 20 III 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения. 1953, стр. 27.