Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ. II.

В. В. Румянцев
(Москва)

Исследуется устойчивость некоторых движений тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе в случае, когда неподвижная ось внешнего кольца подвеса горизонтальна. Данная заметка является продолжением [1].

**1.** Примем неподвижную точку $O$ симметричного гироскопа за начало неподвижной прямоугольной системы координат $O\xi\eta\zeta$, ось $O\xi$ которой направим вертикально вверх, а ось $O\zeta$ — горизонтально по неподвижной оси вращения внешнего кольца подвеса. Подвижную систему координат $Oxyz$ свяжем неизменным образом с внутренним кольцом подвеса, совместив ось $Ox$ с осью вращения внутреннего кольца, а ось $Oz$ — с осью вращения гироскопа. Оси $O\eta$ и $Oy$ направим таким образом, чтобы образовались правые прямоугольные системы координат $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$. Будем предполагать, что оси $x$, $y$, $z$ являются главными осями инерции внутреннего кольца и гироскопа для точки $O$; силу тяжести гироскопа и внутреннего кольца обозначим через $P$, и пусть центр тяжести расположен на оси $z$, его координату обозначим через $z_0$. Пусть $A = B$, $C$ и $A_1$, $B_1$, $C_1$ — главные моменты инерции гироскопа и внутреннего кольца подвеса для неподвижной точки $O$ соответственно и $A_2$ — момент инерции внешнего кольца подвеса относительно его оси $O\zeta$.

За независимые лагранжевы координаты, определяющие положение рассматриваемой механической системы в пространстве $O\xi\eta\zeta$, примем углы Эйлера: угол нутации $\theta$ (между осями $\zeta$ и $z$), угол прецессии $\psi$ (между осями $\xi$ и $x$) и угол собственного вращения $\varphi$ — угол поворота гироскопа вокруг оси $Oz$ относительно внутреннего кольца подвеса. Проекции мгновенных угловых скоростей $\bar{\omega}$ гироскопа и $\bar{\omega}_1$ — внутреннего кольца на оси подвижной системы координат определяются при этом формулами

$$
\begin{aligned}
p &= \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi' \cos\theta \\
p_1 &= \theta', \qquad q_1 = \psi' \sin\theta, \qquad r_1 = \psi' \cos\theta
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Вектор мгновенной угловой скорости внешнего кольца направлен по оси $O\zeta$; его проекция на эту ось равна $\psi'$.

Воспользуемся выражением для кинетической энергии системы

$$T = \tfrac{1}{2} \{(A + A_1)\,\theta'^2 + [(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2]\,\psi'^2 + C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\}$$

и силовой функции силы тяжести

$$U = -Pz_0 \sin\theta \sin\psi$$

Составляя функцию Лагранжа $L = T + U$, получим следующие уравнения движения системы:

$$(A + A_1)\,\theta'' - (A + B_1 - C_1)\,\psi'^2 \sin\theta\cos\theta + C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)\,\psi'\sin\theta + \\ + Pz_0\cos\theta\sin\psi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\,\{[(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2]\,\psi' + C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta\} + \\ + Pz_0\sin\theta\cos\psi = 0 \qquad (1.2)$$

$$C\,\frac{d}{dt}\,(\varphi' + \psi'\cos\theta) = 0$$

Очевидно, уравнения движения (1.2) допускают первые интегралы

$$(A + A_1)\,\theta'^2 + [(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2]\,\psi'^2 + \\ + C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 + 2Pz_0\sin\theta\sin\psi = h$$

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = r = \mathrm{const} \qquad (1.3)$$

первый из которых есть интеграл энергии. Исследуем устойчивость вращения гироскопа вокруг вертикали, описываемого частным решением уравнений (1.2):

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \theta' = 0, \qquad \psi = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \psi' = 0, \qquad r = \omega \qquad (1.4)$$

Очевидно, срединная плоскость внешнего кольца в случае (1.4) горизонтальна, а срединная плоскость внутреннего кольца вертикальна.

Полагая в возмущенном движении

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi + \eta_1, \qquad \theta' = \eta', \qquad \psi = \tfrac{1}{2}\pi + \eta_2, \qquad \psi' = \eta'_2, \qquad r = \omega + \xi$$

без труда установим, что уравнения возмущенного движения допускают первые интегралы

$$V_1 = (A + A_1)\,\eta_1'^2 + (A + B_1 + A_2)\,\eta_2'^2 + C\,(\xi^2 + 2\omega\xi) - \\ - Pz_0\,(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \ldots = \mathrm{const}$$

$$V_2 = \xi = \mathrm{const} \qquad (1.5)$$

Первый из этих интегралов выписан лишь с точностью до членов второго порядка включительно относительно переменных $\eta_1$ и $\eta_2$. Функция

$$V = V_1 - 2C\omega V_2 = (A + A_1)\,\eta_1'^2 + (A + B_1 + A_2)\,\eta_2'^2 + \\ + C\xi^2 - Pz_0\,(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \cdots \qquad (1.6)$$

является определенно-положительной функцией своих переменных лишь в случае неравенства

$$z_0 < 0$$

которое, таким образом, является достаточным условием устойчивости движения (1.4) при любом значении $\omega$ по отношению к переменным $\theta$, $\theta'$, $\psi$, $\psi'$, $r$[1]. При этом, как нетрудно видеть, устойчивость имеет вековой характер.

В случае уравновешенного гироскопа ($z_0 = 0$) движение (1.4) устойчиво по отношению к переменным $\theta'$, $\psi'$, $r$.

При $z_0 > 0$ степень неустойчивости — четная и согласно теореме Кельвина возможна гироскопическая стабилизация. Найдем условие последней, используя фундаментальную теорему Н. Г. Четаева [2] о существовании

[1] Скимель В. Н. Некоторые задачи об устойчивости движения твердого тела. Автореферат диссертации. Казань, 1955.

знакоопределенного квадратичного интеграла уравнений в вариациях для устойчивого невозмущенного движения.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае уравнения в вариациях

$$
\begin{gathered}
(A+A_1)\eta_1''+C\omega\eta_2'-Pz_0\eta_1=0 \\
(A+B_1+A_2)\eta_2''-C\omega\eta_1'-Pz_0\eta_2=0
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

допускают интеграл [2]

$$
\begin{gathered}
\Gamma=2\left[(A+A_1)\eta_1'\eta_2-(A+B_1+A_2)\eta_1\eta_2'\right]+C\omega(\eta_1^2+\eta_2^2)- \\
-\frac{A_1-B_1-A_2}{2C\omega}\left[(A+B_1+A_2)\eta_2'^2-(A+A_1)\eta_1'^2+\right. \\
\left.+Pz_0(\eta_1^2-\eta_2^2)\right]=\mathrm{const}
\end{gathered} \tag{1.8}
$$

Рассмотрим функцию

$$
\begin{gathered}
V=\frac{1}{2}C\omega V_1+Pz_0\Gamma-C^2\omega^2V_2= \\
=\frac{C^2\omega^2+(A_1-B_1-A_2)Pz_0}{2C\omega}(A+A_1)\eta_1'^2+2(A+A_1)Pz_0\eta_1'\eta_2+ \\
+\frac{C^2\omega^2+(A_1-B_1-A_2)Pz_0}{2C\omega}Pz_0\eta_2^2+\frac{1}{2}C^2\omega\xi^2+ \\
+\frac{C^2\omega^2+(A_2+B_1-A_1)Pz_0}{2C\omega}(A+B_1+A_2)\eta_2'^2-2(A+B_1+A_2)Pz_0\eta_1\eta_2'+ \\
+\frac{C^2\omega^2+(A_2+B_1-A_1)Pz_0}{2C\omega}Pz_0\eta_1^2+\ldots
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

В случае $z_0>0$ функция $V$ будет определенно-положительной функцией своих переменных при выполнении единственного условия

$$
C^2\omega^2-\left(2A+A_1+B_1+A_2+2\sqrt{(A+A_1)(A+B_1+A_2)}\right)Pz_0>0 \tag{1.10}
$$

которое и является условием гироскопической стабилизации движения (1.4) по отношению к переменным $\theta, \psi, \theta', \psi', r$.

Если пренебречь массами колец карданова подвеса, то условие (1.10) переходит в известное условие Майевского $C^2\omega^2-4APz_0>0$, необходимое и достаточное для устойчивости вращения вокруг вертикали гироскопа Лагранжа. Можно показать [1], что неравенство (1.10) является также необходимым условием устойчивости движения (1.4).

Если гироскопическая стабилизация в действительности имеет место, то под действием диссипативных сил она разрушится, т. е. устойчивость движения (1.4) в случае $z_0>0$ при условии (1.10) будет иметь временный характер.

Для доказательства этого утверждения предположим, что в возмущенном движении на систему действуют диссипативные силы, производные от определенно-положительной функции Релея

$$
2f=a\eta_1'^2+2b\eta_1'\eta_2'+c\eta_2'^2
$$

Уравнения возмущенного движения в первом приближении будут иметь вид:

$$
\begin{gathered}
(A+A_1)\eta_1''+C\omega\eta_2'-Pz_0\eta_1=-a\eta_1'-b\eta_2' \\
(A+B_1+A_2)\eta_2''-C\omega\eta_1'-Pz_0\eta_2=-b\eta_1'-c\eta_2'
\end{gathered} \tag{1.11}
$$

[1] См. сноску на стр. 500.

Рассмотрим функцию

$$2W = (A + A_1)\eta_1'^2 + (A + B_1 + A_2)\eta_2'^2 - Pz_0(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \\ - 4\varepsilon[(A + A_1)\eta_1\eta_1' + (A + B_1 + A_2)\eta_2\eta_2'] \tag{1.12}$$

и производную по времени от нее, взятую в силу дифференциальных уравнений (1.11):

$$W' = -\{[a + 2\varepsilon(A + A_1)]\eta_1'^2 + 2b\eta_1'\eta_2' + [c + 2\varepsilon(A + B_1 + A_2)]\eta_2'^2 + \\ + 2Pz_0\varepsilon(\eta_1^2 + \eta_2^2) - 2\varepsilon[C\omega(\eta_1\eta_2' - \eta_1'\eta_2) + b(\eta_1\eta_2' + \eta_1'\eta_2) + \\ + a\eta_1'\eta_1 + c\eta_2\eta_2']\} \tag{1.13}$$

Здесь $\varepsilon$ — положительная постоянная, которую можно выбрать столь малой, что главные диагональные миноры дискриминанта квадратичной формы — $W'$ будут положительными. При этом функция $W'$ будет определенно-отрицательной, а функция $W$ допускает бесконечно малый высший предел и выбором численно сколь угодно малых $\eta_1$, $\eta_1'$, $\eta_2$, $\eta_2'$ ее можно сделать отрицательной. В силу теоремы Ляпунова о неустойчивости заключаем о неустойчивости движения (1.4) по отношению к переменным $\theta, \psi, \theta', \psi'$ при действии диссипативных сил.

Рассмотрим также вопрос об устойчивости вращения тяжелого симметричного гироскопа вокруг горизонтали, описываемого частным решением уравнений (1.2):

$$\theta = 0, \quad \theta' = 0, \quad \psi = 0, \quad \psi' = 0, \quad r = \omega \tag{1.14}$$

При этом срединные плоскости внешнего и внутреннего колец вертикальны и совпадают одна с другой. Покажем, что движение (1.14) неустойчиво по отношению к переменным $\theta$, $\psi$, $\theta'$, $\psi'$. В самом деле, уравнения возмущенного движения имеют в данном случае вид:

$$(A + A_1)\eta_1'' - (A + B_1 - C_1)\eta_1\eta_2'^2 + C(\omega + \zeta)\eta_1\eta_2' + \\ + Pz_0\eta_2\left(1 - \frac{1}{2}\eta_1^2\right) + \ldots = 0$$

$$(A_2 + C_1)\eta_2'' + 2(A + B_1 - C_1)\eta_1\eta_1'\eta_2' + (A + B_1 - C_1)\eta_1^2\eta_2'' + \\ + Pz_0\eta_1\left(1 - \frac{1}{2}\eta_2^2\right) - C(\omega + \zeta)\eta_1\eta_1' + \ldots = 0 \tag{1.15}$$

где многоточия обозначают невыписанные члены порядка выше третьего. Рассмотрим функцию

$$V = (A + A_1)\eta_1'\eta_2 + (A_2 + C_1)\eta_1\eta_2' \tag{1.16}$$

производная которой $V'$ в силу уравнений возмущенного движения (1.15) с точностью до членов второго порядка малости равна

$$V' = -Pz_0(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (A + A_1 + A_2 + C_1)\eta_1'\eta_2' + \ldots$$

Пусть, например, $z_0 > 0$. В одной из полостей области $V < 0$, определяемой совместными неравенствами

$$\eta_1 < 0, \quad \eta_2 > 0, \quad \eta_1' < 0, \quad \eta_2' > 0$$

функция $V'$ является определенно-отрицательной функцией при достаточно малых по абсолютной величине значениях переменных.

Следовательно, функция $V$ удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости, что и доказывает высказанное утверждение.

2. Рассмотрим практически интересный случай гироскопа в кардановом подвесе, к оси $Oz$ которого приложен некоторый момент внешних сил $L_z$. Этот момент, в частности, может быть выбран так, что угловая скорость собственного вращения гироскопа будет оставаться постоянной во все время движения [3] $\varphi' = \text{const}$. Будем предполагать, что $L_z$ является непрерывной функцией углов Эйлера и их производных по времени.

Уравнения движения симметричного тяжелого гироскопа при горизонтальном расположении оси вращения внешнего кольца подвеса в рассматриваемом случае можно привести к виду (2.1)

$$(A + A_1)\theta'' - (A + B_1 - C_1)\psi'^2 \sin\theta\cos\theta + Cr\psi' \sin\theta + Pz_0 \cos\theta \sin\psi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\{[(A + B_1)\sin^2\theta + C_1 \cos^2\theta + A_2]\psi'\} - Cr\theta' \sin\theta + Pz_0 \sin\theta\cos\psi = 0$$

$$C\frac{dr}{dt} = L_z$$

Какова бы ни была функция, удовлетворяющая указанным условиям $L_z$, уравнения движения (2.1) имеют первый интеграл

$$(A + A_1)\theta'^2 + [(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2]\psi'^2 + 2Pz_0 \sin\theta\sin\psi = \text{const} \tag{2.2}$$

аналогичный интегралу энергии.

Предположим далее, что уравнения (2.1) также допускают частные решения вида (1.4) или (1.14), возможные, очевидно, в случае, когда $L_z = 0$ для этих установившихся движений. Нетрудно видеть, что все полученные в п. 1 выводы относительно устойчивости или неустойчивости движений, описываемых частными решениями (1.4) или (1.14), остаются справедливыми и в рассматриваемом случае.

В самом деле, уравнения возмущенного движения для ведущего движения (1.4) имеют первый интеграл

$$V_1 = (A + A_1)\eta_1'^2 + (A + B_1 + A_2)\eta_2'^2 - Pz_0(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \ldots = \text{const} \tag{2.3}$$

который при условии $z_0 < 0$ является определенно-положительным по отношению к переменным $\eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2'$, что и доказывает при $z_0 < 0$ устойчивость невозмущенного движения (1.4) по отношению к переменным $\theta$, $\theta'$, $\psi$, $\psi'$.

Уравнения в вариациях по-прежнему имеют вид (1.7) и допускают интеграл (1.8). Следовательно, рассмотрением функции Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} C\omega V_1 + Pz_0\Gamma$$

получим при $z_0 > 0$ условие (1.10) гироскопической стабилизации (в первом приближении) движения (1.4), разрушаемой действием диссипативных сил.

Рассмотрением функции (1.16) можно убедиться в неустойчивости движения (1.14) и в данном случае.

Поступила 11 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
2. Четаев Н. Г О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
3. Magnus K. Beiträge zur Dynamik des kräftfreien, kardanisch gelagerten Kreisels. ZAMM, Bd. 35, Nr. 1/2, 1955.