Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В МЕХАНИКЕ

В. И. Киргетов
(Москва)

Сразу же за введением в механику открытых Герцем [1] неголономных связей встал вопрос о распространении на неголономные системы предложений, уже установленных в механике систем голономных. Первым был поставлен вопрос (Герц[1]) о справедливости в неголономных системах принципа Гамильтона. Герц [1] выразил сомнение в справедливости этого принципа для неголономных систем, Аппель [3,2] уже утверждает это определенно. Из анализа вывода принципа Гамильтона выясняется, что вопрос о справедливости принципа Гамильтона упирается в вопрос о существовании перестановочных соотношений

$$d\delta x = \delta dx, \qquad d\delta y = \delta dy, \qquad d\delta z = \delta dz$$

для всех координат системы.

Кирхгоф [4] доказывает, что эти соотношения имеют место для систем голономных, Аппель [2] на частном примере в общих чертах показывает, что в случае систем неголономных указанные перестановочные соотношения для всех координат могут отсутствовать. Однако для кинематически независимых координат он предполагает их таконными. Позднее вопрос об этих перестановочных соотношениях неоднократно привлекал внимание ученых. Им занимался, например, Гамель [5]. Наконец, в последнее время этот вопрос затрагивается в ряде работ советских ученых.

§ 1. Имеем некоторую материальную систему. Пусть $q_1, \ldots, q_k$ — ее обобщенные координаты. Предположим, что на систему наложены линейные дифференциальные связи

$$q_\vartheta' + \sum_{\tau=1}^{k-m} a_{\vartheta, m+\tau}\, q'_{m+\tau} + a_\vartheta = 0 \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

с непрерывно дифференцируемыми в некоторой области A коэффициентами.

Движение

$$q_\nu = \varphi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{1.2}$$

материальной системы называется кинематически допустимым, если функции $\varphi_\nu(t)$ тождественно удовлетворяют системе уравнений (1.1).

Для достаточно малой окрестности всякой точки $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$ из области A справедлива следующая лемма.

Каким бы ни было кинематически допустимое движение (1.2) материальной системы, удовлетворяющее условиям $\varphi_\nu(t^\circ) = q_\nu^\circ$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, всегда может быть указано однопараметрическое семейство кинематически допустимых движений

$$q_\nu = \Phi_\nu(t, \alpha) \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

где α — произвольный параметр, такое, что все функции $\Phi_\nu(t, \alpha)$ будут удовлетворять тождествам

$$\Phi_\nu(t, 0) \equiv \varphi_\nu(t), \qquad \frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial\alpha\partial t} \equiv \frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial t \partial\alpha} \tag{1.4}$$

причем $k - m$ из этих функций в рамках условий (1.4) могут быть выбраны произвольно.

Доказательство. Выберем функции $\Phi_{m+1}, \ldots, \Phi_k$ дважды непрерывно дифференцируемыми, удовлетворяющими условиям (1.4), а в остальном произвольными, и подставим их в уравнения системы (1.1). Тогда последняя может быть записана в виде

$$q_\vartheta' = f_\vartheta(t, \alpha, q_1, \ldots, q_m) \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \tag{1.5}$$

Правые части уравнений этой системы будут, очевидно, непрерывно дифференцируемыми функциями всех указанных аргументов. Эта система имеет только одно решение $q_\vartheta = \varphi_\vartheta(t, \alpha)$ $(\vartheta = 1, \ldots, m)$, удовлетворяющее условиям $\Phi_\vartheta(t^\circ, \alpha) = q_\vartheta^\circ$ $(\vartheta = 1, \ldots, m)$.

Система функций

$$\Phi_1(t, \alpha), \ldots, \Phi_m(t, \alpha), \quad \Phi_{m+1}(t, \alpha), \ldots, \Phi_k(t, \alpha) \tag{1.6}$$

определяет однопараметрическое семейство кинематически допустимых движений системы. Покажем, что это семейство движений удовлетворяет условиям (1.4).

В самом деле, из того, что при $q_{m+\sigma} = \varphi_{m+\sigma}(t)$ $(\sigma = 1, \ldots, k - m)$ система (1.1) имеет единственное решение, проходящее через точку $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$, а именно $q_\vartheta = \varphi_\vartheta(t)$ $(\vartheta = 1, \ldots, m)$ и из того, что $\Phi_{m+\sigma}(t, 0) \equiv \equiv \varphi_{m+\sigma}(t)$ $(\sigma = 1, \ldots, k - m)$, следует необходимо, что $\Phi_\vartheta(t, 0) \equiv \varphi_\vartheta(t)$ $(\vartheta = 1, \ldots, m)$.

Итак, система функций (1.6) удовлетворяет первому из тождеств (1.4). Покажем теперь, что она удовлетворяет также второму тождеству (1.4).

Подставим для этого функции $\Phi_1(t, \alpha), \ldots, \Phi_m(t, \alpha)$ в уравнения системы (1.5). Получим

$$\frac{\partial \Phi_\vartheta(t, \alpha)}{\partial t} \equiv F_\vartheta(t, \alpha) \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \tag{1.7}$$

Функции $F_\vartheta(t, \alpha)$ $(\vartheta = 1, 2, \ldots, m)$ будут, очевидно, непрерывно дифференцируемыми функциями t и α. Продифференцировав тождества (1.7) по α, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi_\vartheta(t, \alpha)}{\partial \alpha \partial t} = \frac{\partial F_\vartheta(t, \alpha)}{\partial \alpha} \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \tag{1.8}$$

С другой стороны, систему тождеств (1.7) можно записать в виде

$$\Phi_\vartheta(t, \alpha) \equiv \int_{t^\circ}^{t} F_\vartheta(t, \alpha)\, dt + q_\vartheta^\circ \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m)$$

Продифференцировав последние по α, внеся затем дифференцирование по α под знак интеграла (что можно сделать, так как функции $F_\vartheta(t, \alpha)$ $(\vartheta = 1, \ldots, m)$ непрерывно дифференцируемы по α) и продифференцировав, наконец, тождества по t, получим окончательно

$$\frac{\partial^2 \Phi_\vartheta(t, \alpha)}{\partial t \partial \alpha} \equiv \frac{\partial F_\vartheta(t, \alpha)}{\partial \alpha} \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m)$$

Сопоставляя эти тождества с тождествами (1.8), получим второе тождество (1.4). Таким образом, лемма доказана.

Возьмем какое-нибудь кинематически допустимое движение материальной системы

$$q_\nu = \varphi_\nu(t) \quad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{1.9}$$

удовлетворяющее условиям $\varphi_\nu(t^\circ) = q_\nu^\circ$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, и включим его в однопараметрическое семейство

$$q_\nu = \Phi_\nu(t, \alpha) \quad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{1.10}$$

кинематически допустимых движений материальной системы, удовлетворяющих тождествам (1.4).

Система количеств

$$\delta q_\nu = \alpha \left[\frac{\partial \Phi_\nu(t, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} \quad (\nu = 1, \ldots, k)$$

называется вариацией движения (1.9), подсчитанной на семействе (1.10) кинематически допустимых движений системы.

Количества $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ являются, очевидно, непрерывно дифференцируемыми функциями времени.

В качестве простого следствия из леммы отметим, что количества $\delta q_{m+1}, \delta q_{m+2}, \ldots, \delta q_k$ могут быть выбраны произвольно.

Докажем теперь следующую теорему.

Если вариации всякого кинематически допустимого движения, подсчитанные на всевозможных семействах кинематически допустимых движений системы, удовлетворяют соотношениям для возможных перемещений, то система уравнений связей (1.1) вполне интегрируема.

Доказательство. В окрестности произвольной точки $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$ из области A возьмем какое-нибудь кинематически допустимое движение $q_\nu = \varphi_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ материальной системы, удовлетворяющее условиям $\varphi_\nu(t^\circ) = q_\nu^\circ$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, и включим его в однопараметрическое семейство $q_\nu = \Phi_\nu(t, \alpha)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ кинематически допустимых движений, удовлетворяющих условиям (1,4), что в соответствии с леммой сделать можно.

Равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\vartheta + \sum_{\sigma=1}^{k-m} a^{(1)}_{\vartheta, m+\sigma}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{m+\sigma} + \overset{(1)}{a_\vartheta} = 0 \qquad (\vartheta = 1, 2, \ldots, m)$$

где

$$a^{(1)}_{\vartheta, m+\sigma} = a_{\vartheta, m+\sigma}(t, \Phi_1(t, \alpha), \ldots, \Phi_k(t, \alpha))$$

$$a^{(1)}_\vartheta = a_\vartheta(t, \Phi_1(t, \alpha), \ldots, \Phi_k(t, \alpha))$$

должны выполняться тождественно по t и α. Из них в силу (1.4) следуют тождества

$$\frac{d}{dt}\delta q_\vartheta + \sum_{\sigma=1}^{k-m} a^{*}_{\vartheta, m+\sigma}\frac{d}{dt}\delta q_{m+\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{k-m}\frac{d}{dt}\varphi_{m+\sigma}\delta a_{\vartheta, m+\sigma} + \delta a_\vartheta = 0 \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \tag{1.11}$$

Здесь введены обозначения

$$\delta a_{\vartheta, m+\sigma} = \sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{\partial a_{\vartheta, m+\sigma}}{\partial q_\nu}\right)^{*}\delta q_\nu, \qquad \delta a_\vartheta = \sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial q_\nu}\right)^{*}\delta q_\nu \qquad \begin{pmatrix}\vartheta = 1, \ldots, m \\ \sigma = 1, \ldots, k-m\end{pmatrix}$$

Звездочкой в этом параграфе будем обозначать выражения, в которых координаты q_1, . . . , q_k заменены соответствующими функциями $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$.

С другой стороны, согласно условиям теоремы количества $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ должны тождественно удовлетворять соотношениям для возможных перемещений. Иными словами, должны иметь место тождества

$$\delta q_\vartheta + \sum_{\sigma=1}^{k-m} a^*_{\vartheta,m+\sigma} \delta q_{m+\sigma} = 0 \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \tag{1.12}$$

Дифференцируя их по времени, получим

$$\frac{d}{dt}\delta q_\vartheta + \sum_{\sigma=1}^{k-m} a^*_{\vartheta,m+\sigma} \frac{d}{dt}\delta q_{m+\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{k-m} \delta q_{m+\sigma} \frac{d}{dt} a^*_{\vartheta,m+\sigma} = 0 \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m)$$

Вычтем из этих тождеств соответственные (по индексу ϑ) тождества (1.11):

$$\sum_{\sigma=1}^{k-m} \delta q_{m+\sigma} \frac{d}{dt} a^*_{\vartheta,m+\sigma} - \sum_{\sigma=1}^{k-m} \delta a_{\vartheta,m+\sigma} \frac{d}{dt} \varphi_{m+\sigma} - \delta a_\vartheta = 0 \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m)$$

Исключив посредством соотношений (1.1) и (1.12) из последних равенств скорости $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m$ и количества $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$, мы приведем эти равенства к виду

$$\sum_{\tau=0}^{k-m} \delta q_{m+\tau} \Bigg[\Bigg(\frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial t} - \sum_{\rho=1}^{m} a_\rho \frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial q_{m+\tau}} + \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho,m+\tau} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial q_\rho}\Bigg) +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{k-m} \varphi'_{m+\sigma} \Bigg(\frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_{m+\sigma}} - \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho,m+\sigma} \frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial a_{\vartheta,m+\sigma}}{\partial q_{m+\tau}} +$$
$$+ \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho,m+\tau} \frac{\partial a_{\vartheta,m+\sigma}}{\partial q_\rho}\Bigg)\Bigg]^* = 0 \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m)$$

Последние тождества должны иметь место при произвольных $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_k$ при заданном движении $q_\nu = \varphi_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ и для произвольных $\varphi'_{m+1}, \varphi'_{m+2}, \ldots, \varphi'_k$ в заданной точке $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ, t^\circ$. Таким образом, в точке $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ, t^\circ$ все коэффициенты при $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_k$ и $\varphi'_{m+1}, \varphi'_{m+2}, \ldots, \varphi_k'$ в последних тождествах должны исчезать. Но так как точка $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ, t^\circ$ выбрана в области A произвольно, то, следовательно, тождества

$$\frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial t} - \sum_{\rho=1}^{m} a_\rho \frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial q_{m+\tau}} + \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho,m+\tau} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial q_\rho} = 0$$

$$\frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_{m+\sigma}} - \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho,m+\sigma} \frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial a_{\vartheta,m+\sigma}}{\partial q_{m+\tau}} + \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho,m+\tau} \frac{\partial a_{\vartheta,m+\sigma}}{\partial q_\rho} = 0$$

$$(\sigma, \tau = 1, \ldots, k-m)$$

должны иметь место во всей области A и, значит, система уравнений (1.1) вполне интегрируема. Что и требовалось.

Таким образом, в случае неголономных систем мы не можем интерпретировать возможные перемещения системы как вариации движения системы в классе кинематически допустимых движений системы.

§ 2. Предположим по-прежнему, что на данную материальную систему наложены дифференциальные связи (1.1).

1°. Отметим прежде всего следующие два предложения.

В окрестности любой точки $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ$ из области A в фиксированный момент времени t° может быть выбрано с известным произволом непрерывно дифференцируемое поле скоростей системы, допускаемых связями в рассматриваемый момент.

Искомое поле скоростей задается системой равенств

$$\begin{gathered} q_\nu' = \psi_\nu(q_1, \ldots, q_k) \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \\ \psi_\vartheta = -\sum_{\sigma=1}^{k-m}{}' a^{(2)}_{\vartheta,m+\sigma}\psi_{m+\sigma} - a_\vartheta^{(2)} \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \\ a^{(2)}_{\vartheta,m+\sigma} = a_{\vartheta,m+\sigma}(t^\circ, q_1, \ldots, q_k), \qquad a_\vartheta^{(2)} = a_\vartheta(t^\circ, q_1, \ldots, q_k) \end{gathered} \tag{2.1}$$

где функции $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_k$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями указанных аргументов, а в остальном произвольными.

Пусть

$$q_\nu = \varphi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{2.2}$$

какое-нибудь кинематически допустимое движение материальной системы, удовлетворяющее условиям

$$\varphi_\nu(t^\circ) = q_\nu^\circ \qquad (\nu = 1, \ldots . k,) \tag{2.3}$$

В каждый момент этого движения может быть взято какое-нибудь возможное перемещение системы, отвечающее положению системы в этот момент, так что в процессе движения получается какая-то цепочка возможных перемещений. Второе из наших предварительных замечаний утверждает: в окрестности любой точки $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$ из области A может быть взята с известным произволом непрерывно дифференцируемая по времени цепочка возможных перемещений системы.

Обозначив временно возможное перемещение системы строкой $\pi q_1, \ldots$ $\ldots, \pi q_k$, искомую цепочку можно записать в виде

$$\begin{gathered} \pi q_\nu = \eta_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \\ \eta_\vartheta(t) = -\sum_{\tau=1}^{k-m} a^{(1)}_{\vartheta,m+\tau}\eta_{m\ \tau}(t) \qquad (\vartheta = 1, \ldots, m) \\ a^{(1)}_{\vartheta,m+\tau} = a_{\vartheta,m+\tau}(t, \varphi_1, (t), \ldots, \varphi_k(t)) \end{gathered} \tag{2.4}$$

где функции $\eta_{m+1}(t), \ldots, \eta_k(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми, а в остальном произвольными.

2°. Введем операцию δ, обладающую следующими свойствами:

(а) эта операция применима лишь к дифференцируемым по координатам функциям координат и времени;

(б) результат применения δ-операции к функции $f(t, q_1, \ldots, q_k)$ в точке $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$ записывается

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\nu}\right)_0 \delta q_\nu$$

где частные производные взяты в точке $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$, а система количеств $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ представляет собой любое возможное перемещение системы в рассматриваемый момент.

3°. Возьмем какую-нибудь точку $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$ из области A, а в ее окрестности в фиксированный момент t° непрерывно дифференцируемое поле скоростей. Последнее определится формулами (2.1). Применяя к равенствам (2.1), рассматриваемым как тождества, операцию δ, получим в точке $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$

$$\delta q_\mu' = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial q_\nu}\right)_0 \delta q_\nu \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, \ldots, k \\ \nu = 1, \ldots, k \\ \vartheta = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \psi_\vartheta}{\partial q_\nu}\right)_0 = -\sum_{\sigma=1}^{k-m} (a_{\vartheta,m+\sigma})_0 \left(\frac{\partial \psi_{m+\sigma}}{\partial q_\nu}\right)_0 - \sum_{\sigma=1}^{k-m} (\psi_{m+\sigma})_0 \left(\frac{\partial a_{\vartheta,m+\sigma}}{\partial q_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial q_\nu}\right)_0$$

или, введя обозначения

$$\left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial q_\nu}\right)_0 = (\alpha_{\mu,\nu})_0$$

и опуская затем нули, поскольку точка $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$ выбрана в области A произвольно, можно написать

$$\delta q_\mu' = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{\mu,\nu} \delta q_\nu \quad (\mu = 1, \ldots, k)$$

$$\alpha_{\vartheta,\nu} = -\sum_{\sigma=1}^{k-m} a_{\vartheta,m+\sigma} \alpha_{m+\sigma,\nu} - \sum_{\sigma=1}^{k-m} q'_{m+\sigma} \frac{\partial a_{\vartheta,m+\sigma}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial q_\nu}$$

Исключив отсюда коэффициенты $\alpha_{\vartheta,\nu}$, получим окончательно

$$\delta q_\vartheta' = -\sum_{\sigma=1}^{k-m} a_{\vartheta,m+\sigma} \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{m+\sigma,\nu} \delta q_\nu - \sum_{\sigma=m}^{k-m} q'_{m+\sigma} \delta a_{\vartheta,m+\sigma} - \delta a_\vartheta \qquad \begin{pmatrix} \vartheta = 1, \ldots, m \\ \sigma = 1, \ldots, k-m \end{pmatrix}$$

$$\delta q'_{m+\sigma} = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{m+\sigma,\nu} \delta q_\nu \tag{2.5}$$

Итак, строка $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ определится, как только будут заданы положение, обобщенные скорости системы, ее возможные перемещения и матрица коэффициентов

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{m+1,1} & \alpha_{m+1,2} \ldots \alpha_{m+1,k} \\ \alpha_{m+2,1} & \alpha_{m+2,2} \ldots \alpha_{m+2,k} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} \ldots \alpha_{k,k} \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

4°. Возьмем в окрестности произвольной точки $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ, t^\circ$ области A какое-нибудь кинематически допустимое движение (2.2), удовлетворяющее условиям (2.3). Вдоль этого движения возьмем непрерывно дифференцируемую цепочку возможных перемещений системы. Последняя определится равенствами (2.4), в которых, однако, обозначения $\pi q_1, \pi q_2, \ldots, \pi q_k$ следует заменить обозначениями $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$. Продифференцировав измененные равенства (2.4) и положив затем в них $t = t^\circ$, получим в точке $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$

$$\frac{d}{dt}\,\delta q_\nu = \left(\frac{d\eta_\nu}{dt}\right)_0$$

$$\left(\frac{d\eta_\vartheta}{dt}\right)_0 = -\sum_{\tau=1}^{k-m} (a_{\vartheta,m+\tau})_0 \left(\frac{d\eta_{m+\tau}}{dt}\right)_0 - \sum_{\tau=1}^{k-m} (\eta_{m+\tau})_0 (b_{\vartheta,m+\tau})_0 \tag{2.7}$$

$$(b_{\vartheta,m+\tau})_0 = \left(\frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial t}\right)_0 + \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_\nu}\right)_0 \left(\frac{d\varphi_\nu}{dt}\right)_0$$

$$(\nu = 1, \ldots, k, \quad \vartheta = 1, \ldots, m, \quad \tau = 1, 2, \ldots, k-m)$$

Заметим, что (2.8)

$$(\eta_{m+\tau})_0 = (\delta q_{m+\tau})_0 \qquad (\tau = 1, \ldots, k-m) \qquad \left(\frac{d\varphi_\nu}{dt}\right)_0 = (q_\nu')_0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k),$$

Это значит, что производная по времени от цепочки возможных перемещений определится в точке $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ t^\circ$, как только в этой точке будут известны обобщенные скорости системы, ее возможное перемещение и система величин:

$$\left(\frac{d\eta_{m+1}}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\eta_{m+2}}{dt}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)_0$$

Последние величины всегда могут быть представлены в виде

$$\left(\frac{d\eta_{m+\tau}}{dt}\right)_0 = (\beta_{m+\tau})_0 + \sum_{\nu=1}^{k} (\beta_{m+\tau,\nu})_0 (\delta q_\nu)_0 \qquad (\tau = 1, \ldots, k-m)$$

Предположим, однако, что берутся только такие цепочки возможных перемещений, для которых количества $(\eta'_{m+1})_0, (\eta'_{m+2})_0, \ldots, (\eta_k')_0$ исчезают, как только исчезает возможное перемещение $(\delta q_1)_0, \ldots, (\delta q_k)_0$. Тогда в последних равенствах следует положить $(\beta_{m+1})_0 = \ldots = (\beta_k)_0 = 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{d\eta_{m+\tau}}{dt}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{k} (\beta_{m+\tau,\nu})_0 (\delta q_\nu)_0 \qquad (\tau = 1, \ldots, k-m) \tag{2.9}$$

В силу произвольности точки $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ, t^\circ$ нулики в равенствах (2.7), (2.8), (2.9) могут быть опущены. Исключая затем в (2.7) количества $\eta_1', \ldots, \eta_m'$ и используя (2.8) и (2.9), приведем равенства (2.7) к виду

$$\frac{d}{dt}\,\delta q_{m+\tau} = \sum_{\nu=1}^{k} \beta_{m+\tau,\nu}\delta q_\nu$$

$$\frac{d}{dt}\,\delta q_\vartheta = -\sum_{\tau=1}^{k-m} a_{\vartheta,m+\tau} \sum_{\nu=1}^{k} \beta_{m+\tau,\nu}\delta q_\nu - \sum_{\tau=1}^{k-m} b_{\vartheta,m+\tau}\delta q_{m+\tau} \tag{2.10}$$

$$b_{\vartheta,m+\tau} = \frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_\nu} q_\nu' \qquad \begin{pmatrix} \vartheta = 1, \ldots, m \\ \tau = 1, \ldots, k-m \end{pmatrix}$$

Таким образом, производная по времени от цепочки возможных перемещений для материальной системы, занимающей в момент $t = t^\circ$ положение $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ$, определится, как только будут заданы обобщенные скорости системы, ее возможные перемещения и матрица коэффициентов

$$\left\| \begin{matrix} \beta_{m+1,1} & \beta_{m+1,2} \cdots \beta_{m+1,k} \\ \beta_{m+2,1} & \beta_{m+2,2} \cdots \beta_{m+2,k} \\ \cdots & \cdots \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} \;\cdots \beta_{k,k} \end{matrix} \right\| \tag{2.11}$$

5°. Сопоставив количества $\delta q_\nu'$ с одноименными (по индексу ν) количествами $d\delta q_\nu/dt$ при одних и тех же значениях определяющих параметров, выводим из систем (2.5) и (2.10):

$$\delta q_{m+\tau}' = \frac{d}{dt}\delta q_{m+\tau}$$

$$\delta q_\vartheta' - \frac{d}{dt}\delta q_\vartheta = \sum_{\tau=1}^{k-m} b_{\vartheta,m+\tau}\delta q_{m+\tau} - \sum_{\tau=1}^{k-m} q'_{m+\tau}\delta a_{\vartheta,m+\tau} - \delta a_\vartheta \tag{2.12}$$

$$b_{\vartheta,m+\tau} = \frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial a_{\vartheta,m+\tau}}{\partial q_\nu} q_\nu' \qquad \begin{pmatrix}\vartheta = 1,\ldots,k\\ \tau = 1,\ldots,k-m\end{pmatrix}$$

откуда заключаем, что операции δ и $d(\ )/dt$ перестановочны для последних $k-m$ обобщенных координат, причем эта перестановочность имеет место во всякой точке области A независимо от величин обобщенных скоростей $q'_{m+1},\ldots,q_k'$ и возможного перемещения. Что касается аналогичных перестановочных соотношений для оставшихся координат, то здесь положение дел устанавливается теоремой.

Для того чтобы δ-операция допускала в некоторой точке перестановочные соотношения

$$\delta q'_{s+i} = \frac{d}{dt}\delta q_{s+i} \qquad (i = 1,\ldots,m-s) \tag{2.13}$$

необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место равенства

$$\frac{\partial a_{s+i,m+\sigma}}{\partial q_{m+\tau}} + \sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i,\,m+\tau}}{\partial q_\rho} a_{\rho,m+\sigma} - \frac{\partial a_{s+i,\,m+\tau}}{\partial q_{m+\sigma}} - \sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_\rho} a_{\rho,m+\tau} = 0$$

$$\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial t} + \sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i}}{\partial q_\rho} a_{\rho,m+\sigma} - \frac{\partial a_{s+i}}{\partial q_{m+\sigma}} - \sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_\rho} a_\rho = 0 \tag{2.14}$$

$$(\sigma = 1,\ldots,k-m;\ \tau = 1,\ldots,k-m;\ i = 1,\ldots,m-s)$$

Необходимость. С учетом соотношений (2.13) получаем из (2.12)

$$\sum_{\sigma=1}^{k-m} b_{s+i,\ m+\sigma}q_{m+\sigma\delta} - \sum_{\tau=1}^{k-m} q'_{m+\tau}\delta a_{s+i,\,m+\tau} - \delta a_{s+i} = 0 \quad (\sigma = 1,\ldots,k-m)$$

$$b_{s+i,\,m+\sigma} = \frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_\nu} q_\nu' \qquad (i = 1,\ldots,m-s) \tag{2.15}$$

раскрыв в них выражения $\delta a_{s+i,\,m+\tau}$ и δa_{s+i} и исключив затем посредством соотношений

$$q_\vartheta' + \sum_{\tau=1}^{k-m} a_{\vartheta,m+\tau}q'_{m+\tau} + a_\vartheta = 0, \qquad \delta q_\vartheta + \sum_{\tau=1}^{k-m} a_{\vartheta,m+\tau}\delta q_{m+\tau} = 0 \qquad (\vartheta = 1,\ldots,m)$$

количества $\delta q_1,\ldots,\delta q_m;\ q_1',\ldots,q_m'$, мы приведем тождества (2.15) к виду

$$\sum_{\sigma=1}^{k-m}\delta q_{m+\sigma}\Bigg[\left(\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial t} - \sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_\rho}a_\rho - \frac{\partial a_{s+i}}{\partial q_{m+\sigma}} + \sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i}}{\partial q_\rho}a_{\rho,m+\sigma}\right) +$$

$$+\sum_{\tau=1}^{k-m} q'_{m+\tau}\left(\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_{m+\tau}} - \sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_\rho}a_{\rho,m+\tau} - \frac{\partial a_{s+i,\,m+\tau}}{\partial q_{m+\sigma}} +\right.$$

$$\left.+\sum_{\rho=1}^{m}\frac{\partial a_{s+i,\,m+\tau}}{\partial q_\rho}a_{\rho,m+\sigma}\right)\Bigg] = 0$$

$$(i = 1,\ldots,m-s)$$

Эти равенства должны иметь место при произвольных $\delta q_{m+\sigma}$ и $q'_{m+\tau}$. Поэтому выражения в круглых скобках должны быть равными нулю, т. е.

$$\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial t} - \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_\rho} a_\rho - \frac{\partial a_{s+i}}{\partial a_{m+\sigma}} + \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial a_{s+i}}{\partial q_\rho} a_{\rho,m+\sigma} = 0$$

$$\frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_{m+\tau}} - \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial a_{s+i,\,m+\sigma}}{\partial q_\rho} a_{\rho,m+\tau} - \frac{\partial a_{s+i,\,m+\tau}}{\partial q_{m+\sigma}} + \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial a_{s+i,\,m+\tau}}{\partial q_\rho} a_{\rho,m+\sigma} = 0$$

$$(\sigma = 1, \ldots, k-m;\ \tau = 1, \ldots, k-m;\ i = 1, \ldots, m-s)$$

но это как раз равенства (2.14).

Достаточность. Проведя выкладки в обратном направлении, мы от равенств (2.14) перейдем к равенствам (2.15), причем последние будут иметь место при произвольных $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_k$; $q'_{m+1}, \ldots, q_k'$. Учитывая равенства (2.15) в тождествах (2.12), получим соотношения (2.13). Что и требовалось.

Мы получили равенства (2.14) в точке. Однако, если мы предположим, что перестановочность операции δ и $d(\ )/dt$ имеется во всех точках некоторой области, то равенства (2.14) должны выполняться тождественно в этой области.

В соответствии с только что доказанной теоремой все материальные системы, на которые наложены дифференциальные связи вида (1.1), распадаются на $m+1$ классов по числу реализуемых соотношений вида

$$\delta \frac{d}{dt} q - \frac{d}{dt} \delta q = 0$$

6°. В заключение рассмотрим пример, иллюстрирующий последнюю теорему. Возьмем систему

$$dq_1 + q_2 dq_4 = 0, \qquad dq_2 + q_3 dq_5 = 0, \qquad dq_3 + q_1 dq_4 = 0 \qquad (2.16)$$

Интегралы U этой системы удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных первого порядка:

$$q_2 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial U}{\partial q_3} - \frac{\partial U}{\partial q_4} = 0, \qquad q_3 \frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\partial U}{\partial q_5} = 0$$

Следуя известному методу интегрирования систем линейных уравнений в частных производных первого порядка, убеждаемся, что эта система уравнений не имеет решений, отличных от постоянной. Это значит, что система (2.16) не имеет интегрируемых комбинаций.

С другой стороны, коэффициенты в уравнениях системы (2.14) удовлетворяют тождественно равенствам (2.12) при $k = 5$, $m = 3$, $s = 2$, $i = 1$.

Следовательно, система (2.16) допускает перестановочные соотношения

$$\frac{d}{dt}\delta q_3 = \delta \frac{d}{dt} q_3, \qquad \frac{d}{dt}\delta q_4 = \delta \frac{d}{dt} q_4, \qquad \frac{d}{dt}\delta q_5 = \delta \frac{d}{dt} q_5$$

Поступила 27 XII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Die Principien der Mechanik, Leipzig, 1894.
2. Appell P. Sur les equations de Lagrange et le principe d'Hamilton. Bul. Soc. math. France, t. 26, 1898.
3. Appell P. Traité de mécanique rationnelle, t. 2., Paris, 1904.
4. Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik, Leipzig, 1876.
5. Hamel G. Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik, Math. Ann., Bd. 59. 1904.