Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРОДОЛЖЕНИИ ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

Н. Г. Четаев

(Москва)

Гамильтон открыл аналогию между волновой оптикой Гюйгенса и движениями механической системы, стесненной голономными связями и находящейся под действием сил, допускающих силовую функцию.

Это знаменитое открытие определило на столетие прогресс аналитической динамики.

Теории света эволюционировали. Коши был первым, кто поставил задачу о соответствующем продолжении оптико-механической аналогии. В настоящей статье устанавливается аналогия между математической теорией света Коши и устойчивыми движениями голономных, консервативных механических систем [1].

Рассмотрим механическую систему, стесненную голономными связями. Обозначим через $q_1, \ldots, q_n$ ее независимые, определяющие (голономные) координаты, n — число степеней свободы, $p_1, \ldots, p_n$ — сопряженные с соответствующими координатами импульсы.

Для простоты будем предполагать, что голономные связи не зависят от времени, а действующие на систему силы имеют силовую функцию $U(q_1, \ldots, q_n)$, не зависящую от времени.

Пусть

$$2T = \sum_{i,j} g_{ij}\, p_i p_j$$

обозначает удвоенную живую силу рассматриваемой материальной системы; при сделанных предположениях функции $g_{ij} = g_{ji}$ не зависят от времени t и могут зависеть от координат q_s.

Уравнение в частных производных Гамильтона имеет вид:

$$\sum_{ij} g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j} = 2(U + h) \tag{1}$$

где h обозначает постоянную живой силы.

Полный интеграл уравнения Гамильтона (1) представляет функцию

$$U(q_1, \ldots, q_n;\ \alpha_1 \ldots, \alpha_n) + \mathrm{const},$$

удовлетворяющую уравнению (1) и зависящую от постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, из которых ни одна не является просто приданной;

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right\| \neq 0$$

причем постоянная живой силы является некоторой функцией постоянных α_s

$$h = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Согласно известной теореме Гамильтона—Якоби общее решение уравнений движения определяется формулами

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \beta_i = -t\frac{\partial h}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

где β_i — некоторые постоянные.

Возмущенные движения механической системы определяются различными значениями постоянных α_j и β_j.

Чтобы выделить среди возможных движений механической системы движения, устойчивые по отношению к переменным при возмущении одних начальных данных, рассмотрим дифференциальные уравнения в вариациях Пуанкаре:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \eta_j \right)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \eta_i \right) \tag{3}$$

где ξ_i, η_i — вариации координат q_i и импульсов p_i, а

$$H = T - U$$

Для устойчивого невозмущенного движения уравнения в вариациях Пуанкаре (3) представляют систему линейных дифференциальных уравнений, приводимую путем неособенного линейного преобразования переменных к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, причем все характеристичные числа системы независимых решений необходимо должны быть равны нулю.

Вариации координат и импульсов тех возмущенных движений, которые определяются изменением одних постоянных β_i при фиксированных значениях α_i, тем самым будут иметь нулевые характеристичные числа, если невозмущенное движение устойчиво.

В таких возмущенных движениях в силу (2)

$$\eta_i = \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \xi_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Отсюда, если учесть явное выражение функции H, имеем

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j,s} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}\left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

Переменные q_i и постоянные α, встречающиеся в правых частях формул (4), должны быть заменены их значениями, отвечающими невозмущенному движению.

Пусть для устойчивого невозмущенного движения уравнения (4) приводимы с постоянным определителем $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$ неособенным линейным преобразованием

$$x_i = \sum_j \gamma_{ij} \xi_j$$

Если $\xi_{1r}, \ldots, \xi_{nr}$ $(r = 1, \ldots, h)$ обозначают нормальную систему независимых решений уравнений (4), то

$$x_{ir} = \sum_j \gamma_{ij} \xi_{jr}$$

будут решениями приведенной системы. Для устойчивого невозмущенного движения все характеристичные числа решений $(x_{1r}, \ldots, x_{nr})$ суть, как мы видели, нули, и, следовательно,

$$\| x_{sr} \| = C^* = \| \gamma_{sj} \| \, \| \xi_{jr} \| = \Gamma C \exp \int \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) dt$$

где C^*, C — некоторые отличные от нуля постоянные. Из последнего соотношения при этом следует для устойчивого невозмущенного движения

$$\sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) = 0 \tag{5}$$

Так как функции g_{ij} определяются через выражение живой силы

$$2T = \sum g_{ij} p_i p_j$$

то главные диагональные миноры дискримината $\| g_{ij} \|$ по теореме Сильвестра должны быть все положительными и, следовательно, уравнение (5) является эллиптическим.

Рассмотрим некоторую, два раза дифференцируемую функцию

$$\Phi(-ht + V)$$

зависящую от полного интеграла $-ht + V$ уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби.

Для устойчивого невозмущенного движения в силу (5), (1) и (2) имеем

$$\sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right) = \Phi' \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) + \Phi'' \sum g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{qV}{\partial q_j} = \frac{2(U + h)}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{2(U + h)}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right)$$

Это волновое уравнение устанавливает аналогию между математической теорией света Коши и устойчивыми движениями голономных, консервативных систем.

Если при интегрировании уравнения Гамильтона (1) переменные разделяются, то условия устойчивости, аналогичные (5), можно написать по одному для каждой замкнутой в себе группы разделенных переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. ПММ т. XX, вып. 3, 1956.