

## О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Д. Д. Ивлев

(Москва)

Ниже рассмотрены разрывные решения пространственных задач теории идеальной пластичности в случае, когда пластическое напряженное состояние соответствует ребру призмы, интерпретирующей в пространстве главных напряжений условие пластичности Треска — Сен-Венана.

Отметим, что впервые привлек внимание к разрывным решениям теории идеальной пластичности С. А. Христианович [1]. Более поздние и подробные исследования этого вопроса принадлежат В. В. Соколовскому [2], В. Прагеру [3,4], А. Винцеру и Г. Каррьеру [5], Е. Ли [6], Ф. Ходжу [7], Р. Хиллу [8], Г. С. Шапиро [9] и др.

1. Рассмотрим поверхности разрыва в осесимметричных задачах теории идеальной пластичности при условии полной пластичности. Направим ось  $z$  по оси вращения, а ось  $\rho$  перпендикулярно к ней. Очевидно, что достаточно рассмотреть распределение напряжений в плоскости  $\rho z$ .

Условие пластичности Треска — Сен-Венана в рассматриваемом случае имеет вид:

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4k^2 \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + k \quad (1.1)$$

поэтому имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 2k\omega + k \sin 2\theta, & \tau_{\rho z} &= -k \cos 2\theta \\ \sigma_z &= 2k\omega - k \sin 2\theta, & \sigma_\theta &= 2k\omega + k \end{aligned} \quad (1.2)$$

Полная аналогия соотношений (1.1) и (1.2) с соответствующими соотношениями плоской задачи позволяет перенести основные соотношения между напряжениями на линиях разрыва, полученные Прагером [3] для плоской задачи, на рассматриваемый случай осесимметричной задачи.

Однако решения задач для случая плоской деформации не могут быть непосредственно перенесены на случай осесимметричных задач из-за различного характера уравнений равновесия. В случае плоской задачи уравнения равновесия представляют собой дифференциальные соотношения, удовлетворяющиеся при любом выборе констант  $\omega$  и  $\theta$ ; уравнения равновесия осесимметричных задач

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (1.3)$$

очевидно, при этом удовлетворяться не будут. Это обстоятельство делает невозможным непосредственное перенесение таких результатов плоской задачи, как разрывное решение для клина, со всеми вытекающими из этого решения следствиями. Поэтому задача отыскания разрывных

решений в осесимметричных задачах приводит к сложной задаче сопряжения областей с переменными напряжениями.

Заметим, что уравнения (1.3) удовлетворяются в частном случае при

$$\omega = \text{const}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \pm \pi m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

2. Предположим, что некоторая поверхность  $S$  является поверхностью разрыва напряженного состояния. Поверхность  $S$  может разделять напряженные состояния, отвечающие разным ребрам призмы, интерпретирующей в пространстве главных напряжений условие пластичности Треска — Сен-Венана. В дальнейшем будем называть эту призму призмой Треска — Сен-Венана.

Очевидно, что достаточно рассмотреть случаи, когда по обе стороны поверхности  $S$  имеет место одно из состояний

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k \quad (2.1)$$

поскольку этого можно всегда достичь соответствующей нумерацией главных напряжений. Ниже рассмотрим два основных случая: во-первых, когда поверхность разрыва  $S$  разделяет пластические напряженные состояния, у которых в (2.1) по обе стороны от  $S$  знаки перед постоянной  $2k$  одинаковы, во-вторых, случай, когда эти знаки противоположны.

Рассмотрим первый случай. Определим в некоторой точке поверхности ортогональную систему координат  $\alpha, \beta, n$ . Ось  $n$  направим по нормали к поверхности  $S$ , тогда оси  $\alpha$  и  $\beta$  лежат в касательной плоскости к поверхности  $S$ .

Рассмотрим в той же точке направления главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Взаимную ориентацию осей  $\alpha, \beta, n$  и осей 1, 2, 3, определяющих направления главных напряжений, определим направляющими косинусами, сведенными в таблицу:

	1	2	3
$\alpha$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$\beta$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$n$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

Относя в дальнейшем все компоненты напряжения к постоянной  $\pm 2k$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 + n_1^2, & \sigma_\beta &= \sigma_1 + n_2^2, & \sigma_n &= \sigma_1 + n_3^2 \\ \tau_{\alpha\beta} &= n_1 n_2, & \tau_{\alpha n} &= n_1 n_3, & \tau_{\beta n} &= n_2 n_3 \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1 = \sigma - 1/3, \quad \sigma = 1/3 (\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_n)$$

Компоненты  $\sigma_n, \tau_{\alpha n}, \tau_{\beta n}$  должны быть непрерывны при переходе через  $S$ , т. е. должно иметь место

$$[\sigma_n] = [\tau_{\alpha n}] = [\tau_{\beta n}] = 0 \quad \text{на } S \quad (2.2)$$

где заключение компоненты в квадратные скобки означает величину ее разрыва при переходе через  $S$ .

Разрывными могут быть компоненты  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ .

Полагая  $n_1 = \cos \varphi_1$ ,  $n_2 = \cos \varphi_2$ ,  $n_3 = \cos \theta$ , запишем соотношения (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \sigma^+ + \cos^2 \theta^+ &= \sigma^- + \cos^2 \theta^- \\ \cos \varphi_1^+ \cos \theta^+ &= \cos \varphi_1^- \cos \theta^- \\ \cos \varphi_2^+ \cos \theta^+ &= \cos \varphi_2^- \cos \theta^- \end{aligned} \quad \text{на } S \quad (2.3)$$

Так как  $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 = \sin^2 \theta$ , то, возводя в квадрат два последних соотношения (2.3) и складывая их, получим

$$\sin^2 2\theta^+ = \sin^2 2\theta^- \quad (2.4)$$

Легко получить, что между углами, удовлетворяющими зависимости (2.4), должны выполняться соотношения

$$\theta^+ = \begin{cases} \pm \theta^- \pm \pi m + 1/2\pi \\ \pm \theta^- \pm \pi m \end{cases} \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (2.5)$$

Соотношения (2.5) приводят к равенству

$$\cos \theta^+ = \pm \sin \theta^- \quad \text{при } \theta^+ = \pm \theta^- \pm \pi m + \frac{1}{2}\pi \quad (2.6)$$

и к равенству

$$\cos \theta^+ = \pm \cos \theta^- \quad (2.7)$$

во всех остальных случаях. Отметим, что в соотношениях (2.5) (2.6) и (2.7) знаки не соответствуют, они легко определяются в каждом конкретном случае.

Легко показать, что в случае (2.7) компоненты  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_{\alpha\beta}$  непрерывны и имеет смысл рассматривать лишь случай (2.6). Очевидно, что при этом

$$\cos 2\theta^+ = -\cos 2\theta^- \quad (2.8)$$

Из (2.3) и (2.6) получим

$$[\sigma] = \cos 2\theta^-, \quad \begin{aligned} \cos \varphi_1^+ &= \pm \cos \varphi_1^- \operatorname{ctg} \theta^- \\ \cos \varphi_2^+ &= \pm \cos \varphi_2^- \operatorname{ctg} \theta^- \end{aligned} \quad (2.9)$$

Легко получить

$$\begin{aligned} [\sigma_\alpha] &= \cos 2\theta^- \left( 1 + \frac{\cos^2 \varphi_1^-}{\sin^2 \theta^-} \right), \\ [\sigma_\beta] &= \cos 2\theta^- \left( 1 + \frac{\cos^2 \varphi_2^-}{\sin^2 \theta^-} \right), \\ [\tau_{\alpha\beta}] &= \cos 2\theta^- \frac{\cos \varphi_1^- \cos \varphi_2^-}{\sin^2 \theta^-} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Покажем, что если по обе стороны поверхности  $S$  пластическое напряженное состояние соответствует одному и тому же ребру призмы Треска — Сен-Венана, то в соотношениях (2.6) имеет смысл рассматривать лишь второй случай:

$$[\theta] = -2\theta^- \pm \pi m + \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

В самом деле, из (2.10) следует, что при  $\theta^- = \frac{1}{4}\pi$

$$[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta] = [\tau_{\alpha\beta}] = 0$$

т. е. имеет место непрерывное распределение напряжений, и, следовательно, третье главное направление не меняет своей ориентации при переходе через поверхность  $S$ , чему противоречит первое соотношение (2.6):

$$[\theta] = \frac{\pi}{2} \pm \pi m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

В случае, когда поверхность  $S$  разделяет области пластического напряженного состояния, отвечающие разным ребрам призмы Треска — Сен-Венана, то, наоборот, по аналогичным причинам допустим первый случай соотношений (2.6) и не допустим второй.

Итак, можно окончательно записать условия на поверхности разрыва  $S$  в виде

$$[\sigma] = \cos 2\theta^-, \quad [\theta] = -2\theta^- \pm \pi m + \frac{\pi}{2} \quad (2.11)$$

когда пластическое напряженное состояние по обе стороны поверхности  $S$  отвечает одному и тому же ребру призмы Треска — Сен-Венана, и

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \cos 2\theta^-, \\ [\theta] &= \frac{1}{2} \pi \pm \pi m \end{aligned} \quad (2.12)$$

когда пластические напряженные состояния, разделяемые поверхностью  $S$ , отвечают разным ребрам призмы Треска — Сен-Венана.

Если направить оси  $\alpha$  и  $\beta$  так, что  $\cos \varphi_1^- = 0$ , то  $\cos^2 \varphi_2^- = \sin^2 \theta^-$ . Обозначим в этом

случае оси  $\alpha$  и  $\beta$  через  $x$  и  $y$ . Из соотношения (2.10) следует, что тогда

$$[\sigma_x] = a, \quad [\sigma_y] = 2a, \quad [\tau_{xy}] = 0 \quad (a = \cos 2\theta^-) \quad (2.13)$$

Пусть ось  $\alpha$  составляет с осью  $x$  угол  $\psi$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi + \tau_{xy} \sin 2\psi \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) легко получить, что

$$[\sigma_\alpha] = a(1 + \sin^2 \psi), \quad [\sigma_\beta] = a(1 + \cos^2 \psi), \quad [\tau_{\alpha\beta}] = a \sin \psi \cos \psi \quad (2.15)$$

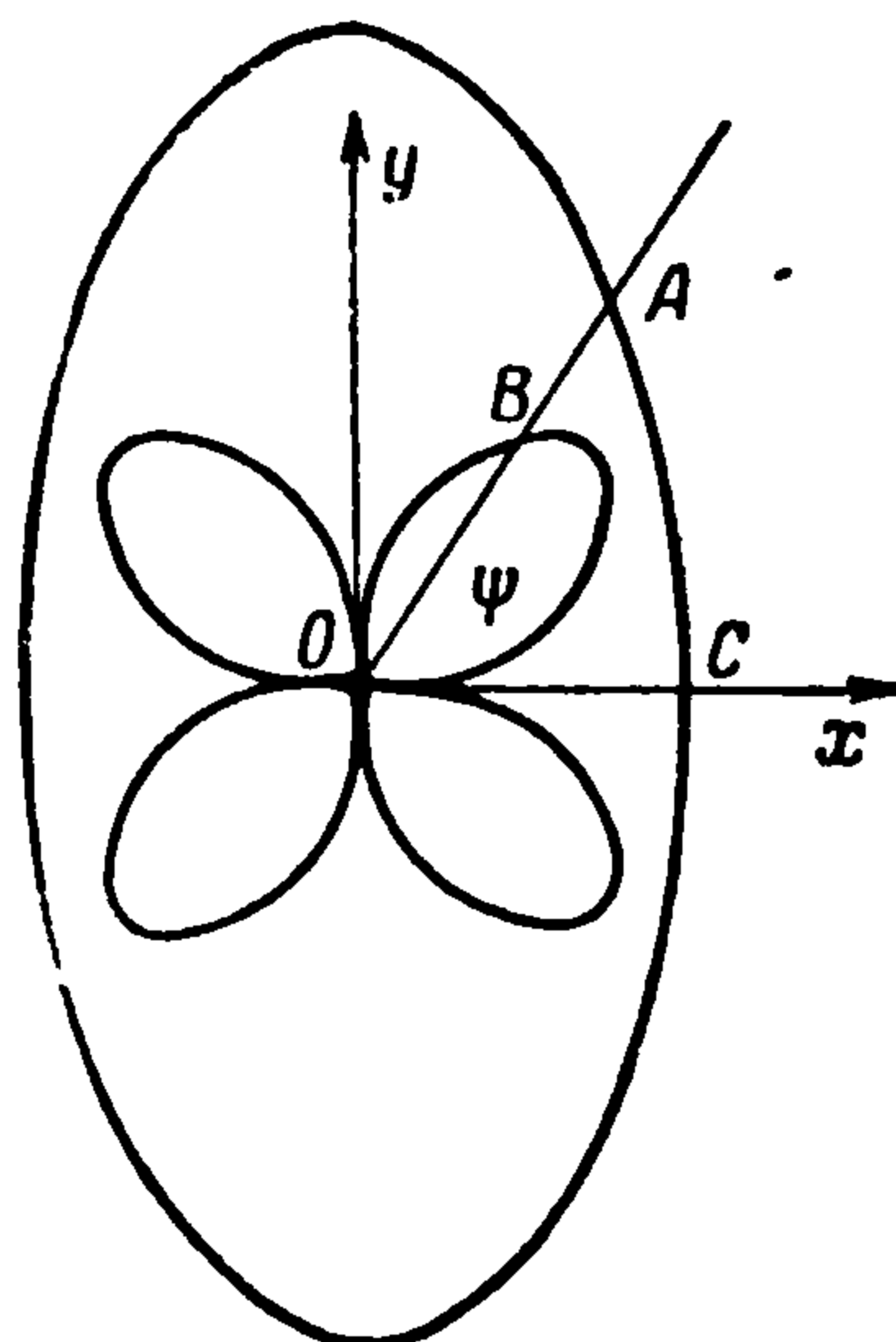
На фиг. 1 показано изменение величин разрывов компонент  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_{\alpha\beta}$  в плоскости, касательной к поверхности  $S$ . Точка  $A$  описывает кривую изменения разрыва компоненты  $\sigma_\alpha$ , точка  $B$  — компоненты  $\tau_{\alpha\beta}$ .

Отметим, что из (2.15) следует

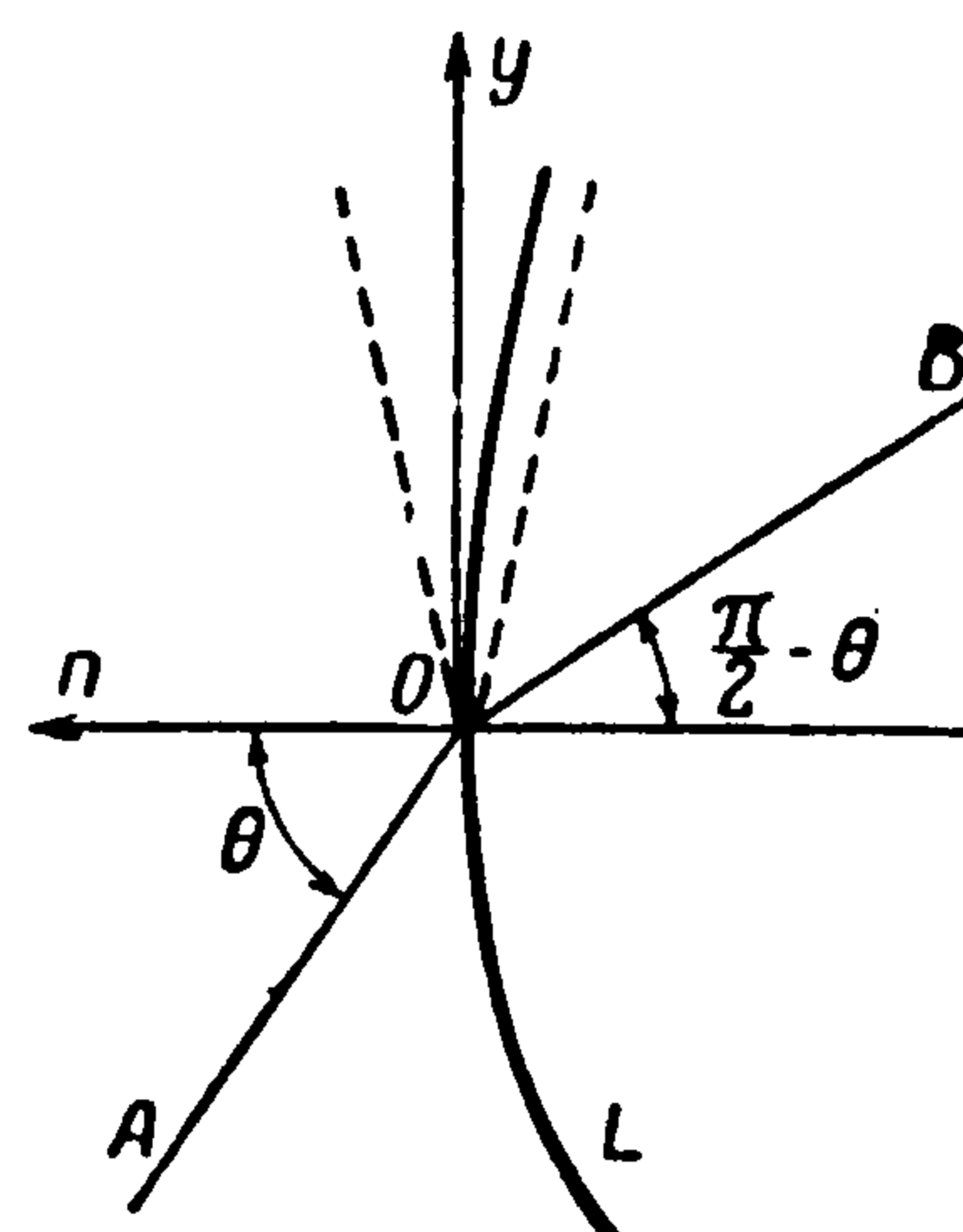
$$([\sigma_\alpha] - [\sigma_\beta])^2 + 4[\tau_{\alpha\beta}]^2 = a^2$$

Рассмотрим изменение ориентации третьего главного направления при переходе через поверхность  $S$ . Из второго соотношения (2.9) ясно, что при  $\cos \varphi_1^- = 0$  всегда  $\cos \varphi_1^+ = 0$ . Значит, направление главного напряжения  $\sigma_3$  всегда лежит в плоскости  $поу$ .

На фиг. 2 показано изменение направления третьего главного напряжения при переходе через поверхность  $S$ . Направление третьего главного напряжения представлено лучами  $AO$  и  $OB$ , линия  $L$  — пересечение плоскости  $поу$  с поверхностью  $S$ . Если, следуя Прагеру, ввести первое и второе направления сдвига в плоскости  $поу$ , то, как легко видеть, направление линии разрыва  $L$  в каждой ее точке делит пополам



Фиг. 1



Фиг. 2

угол, образованный пересекающимися в этой точке линиями скольжения первого семейства. На фиг. 2 эти линии показаны пунктиром.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что

$$\sigma_1^+ = \sigma_2^+ = \sigma_3^+ - 1, \quad \sigma_1^- = \sigma_2^- = \sigma_3^- + 1 \quad (2.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^+ &= \sigma_1^+ + \cos^2 \varphi_1^+, & \tau_{\alpha\beta}^+ &= \cos \varphi_1^+ \cos \varphi_2^+, \dots \\ \sigma_\alpha^- &= \sigma_1^- - \cos^2 \varphi_1^-, & \tau_{\alpha\beta}^- &= -\cos \varphi_1^- \cos \varphi_2^-, \dots \\ \sigma_1^+ &= \sigma^+ - \frac{1}{3}, & \sigma_1^- &= \sigma^- + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Из условия непрерывности компонент  $\sigma_n$ ,  $\tau_{\alpha n}$ ,  $\tau_{\beta n}$  получим

$$\begin{aligned} \sigma^+ + \cos^2 \theta^+ &= \sigma^- - \cos^2 \theta^- + \frac{2}{3} \\ \cos \varphi_1^+ \cos \theta^- &= -\cos \varphi_1^- \cos \theta^- \\ \cos \varphi_2^+ \cos \theta^+ &= -\cos \varphi_2^- \cos \theta^- \end{aligned} \quad (2.17)$$

Очевидно, что направление третьего главного напряжения и в этом случае лежит в плоскости  $noy$ .

Так как  $\sin 2\theta^+ = \sin 2\theta^-$ , то справедливы соотношения (2.5) — (2.8). Очевидно, что разрывы возникают во всех случаях.

$$\text{При } \theta^+ = \pm \theta^- + \frac{1}{2} \pi + \pi m, \quad \cos \theta^+ = \pm \sin \theta^-$$

будем иметь

$$\begin{aligned} [\sigma] &= -\frac{1}{3}, & [\sigma_\alpha] &= -1 + \frac{\cos^2 \varphi_1^-}{\sin^2 \theta^-} \\ [\tau_{\alpha\beta}] &= \frac{\cos \varphi_1^- \cos \varphi_2^-}{\sin^2 \theta^-}, & [\sigma_\beta] &= -1 + \frac{\cos^2 \varphi_2^-}{\sin^2 \theta^-} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что

$$\begin{aligned} [\sigma_x] &= -1, & [\sigma_y] &= 0, & [\tau_{xy}] &= 0 \\ [\sigma_\alpha] &= -\cos^2 \psi, & [\sigma_\beta] &= -\sin^2 \psi, & [\tau_{\alpha\beta}] &= \sin \psi \cos \psi \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$([\sigma_\alpha] - [\sigma_\beta])^2 + 4[\tau_{\alpha\beta}]^2 = 1$$

Легко представить себе картину изменения разрывов, аналогичную приведенной на фиг. 1.

$$\text{При } \theta^+ = \pm \theta^- \pm \pi m, \quad \cos \theta^+ = \pm \cos \theta^- \quad (2.19)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} [\sigma] &= -2 \cos^2 \theta^- + \frac{2}{3}, & [\sigma_\alpha] &= -2 (\cos^2 \theta^- - \cos^2 \varphi_1^-) \\ [\tau_{\alpha\beta}] &= 2 \cos \varphi_1^- \cos \varphi_2^-, & [\sigma_\beta] &= -2 (\cos^2 \theta^- - \cos^2 \varphi_2^-) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из (2.20) следует, что

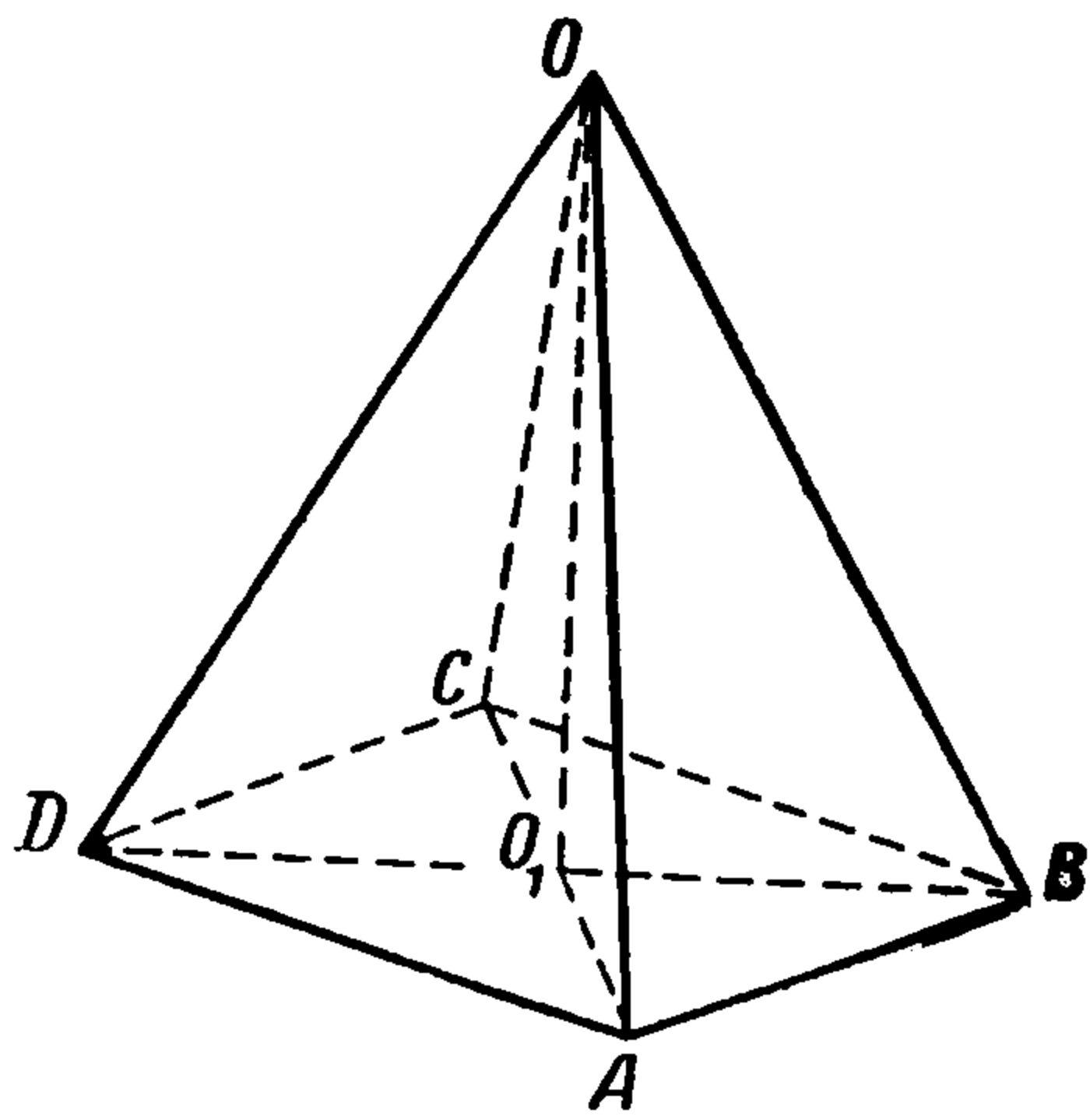
$$\begin{aligned} [\sigma_x] &= -(1+a), & [\sigma_y] &= -2a, & [\tau_{xy}] &= 0 \\ [\sigma_\alpha] &= -2a - (1-a) \cos^2 \psi, & [\sigma_\beta] &= -2a - (1-a) \sin^2 \psi \\ [\tau_{\alpha\beta}] &= (1-a) \sin \psi \cos \psi \\ ([\sigma_\alpha] - [\sigma_\beta])^2 + 4[\tau_{\alpha\beta}]^2 &= (1-a)^2 \end{aligned}$$

В этом случае также легко представить себе картину изменения разрывов, аналогичную приведенной на фиг. 1.

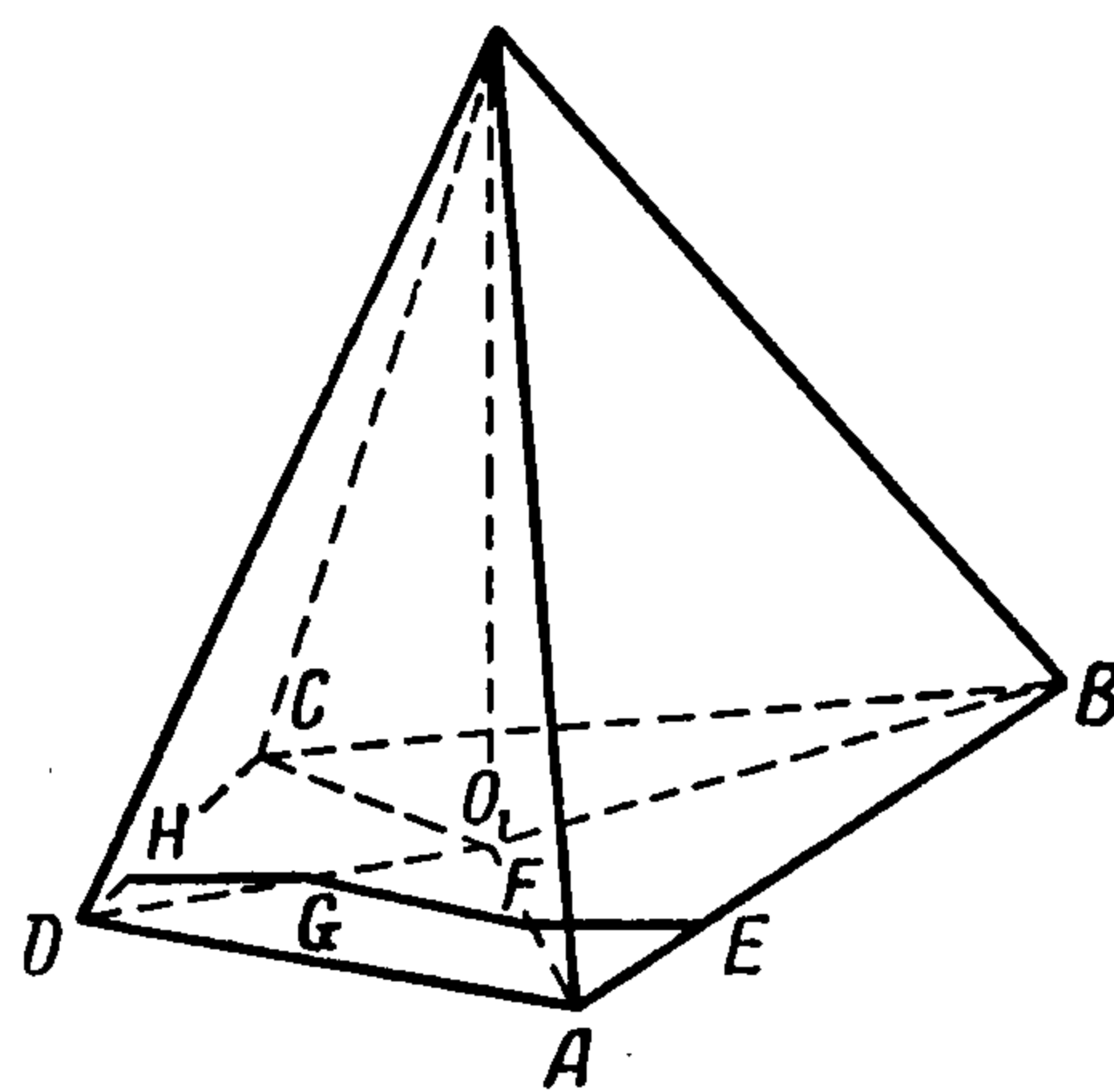
Отметим, что в случае (2.19), (2.20) направление третьего главного напряжения либо не изменяется при переходе через поверхность  $S$ , ли-

бо направление линии разрыва в плоскости  $поу$  является биссектрисой угла, образованного направлениями третьего главного напряжения.

Обратимся к примерам. Наибольшее применение для построения разрывных решений пространственных задач будут иметь плоскости разрыва, отделяющие области постоянных напряжений. Построим разрывное напряженное состояние для четырехугольной пирамиды, у которой в сечении, перпендикулярном к высоте, лежит ромб (фиг. 3). Предполо-



Фиг. 3



Фиг. 4

жим, что на гранях пирамиды действуют нормальные усилия. Введем плоскости разрыва  $AOO_1, BOO_1, COO_1, DOO_1$ . Воспользуемся соотношениями (2.19), (2.20). Приписывая компонентам в области  $ABOO_1$  индекс (1), в  $BCCO_1$  — индекс (2) и т. д. и предполагая, что в области  $ABOO_1$  в соотношениях (2.1) перед  $2k$  стоит знак плюс, в области  $BCCO_1$  — знак минус и т. д., получим

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= \sigma_{(2)} - 2 \cos^2 \theta_{(1)} + \frac{2}{3}, & \sigma_{(3)} &= \sigma_{(4)} - 2 \cos^2 \theta_{(3)} + \frac{2}{3} \\ \sigma_{(2)} &= \sigma_{(3)} + 2 \cos^2 \theta_{(2)} - \frac{2}{3}, & \sigma_{(4)} &= \sigma_{(1)} + 2 \cos^2 \theta_{(4)} - \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Складывая соотношения (2.21) и учитывая, что  $\theta_{(1)} = \theta_{(3)}, \theta_{(2)} = \theta_{(4)}$ , получим

$$\cos^2 \theta_{(1)} = \cos^2 \theta_{(2)}$$

откуда следует, что  $\theta_{(1)} = \theta_{(2)}$  и, следовательно, ромб  $ABCD$  должен быть квадратом. Если обозначить угол между гранями  $ABO$  и  $CDO$  через  $2\gamma$ , то, как легко видеть,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \gamma \quad (2.22)$$

где у величины  $\theta$  опущен индекс.

Предположим, что грани  $BCO$  и  $DAO$  свободны от напряжений, тогда в областях, примыкающих к этим граням,  $\sigma_3^- = 0$ . Используя соотношения (2.16), (2.20), (2.22), получим искомую величину постоянного нормального давления, действующего на гранях  $ABO$  и  $CDO$ :

$$p = -2k(2 - \cos^2 \gamma)$$

Совершенно аналогично можно рассмотреть пирамиду с произвольным числом граней и, следуя [5], показать, что число пересекающихся в одной прямой плоскостей разрыва должно быть не меньше четырех.

Рассмотрим пример, обобщающий известный пример разрывного решения для усеченного клина [5]. Представим себе четырехгранную пирамиду, у которой в сечении, перпендикулярном к высоте, лежит правильная трапеция (фиг. 4). При увеличении высоты  $OO_1$  и неизменном контуре  $ABCD$  получим призму, рассмотренную в [5] при условии плоской деформации. Введем поверхности разрыва  $AOO_1$ ,  $BOO_1$ ,  $COO_1$ ,  $DOO_1$ . Предположим, что направление третьего главного напряжения в области  $ABOO_1$  перпендикулярно к грани  $AOB$ . Условия на плоскости разрыва определяют направление] третьего главного напряжения в области  $ADOO_1$ . Если грань  $ADO$  параллельна направлению третьего главного напряжения, то касательные усилия на ней будут равны нулю. Далее, если, проходя через плоскость разрыва  $DOO_1$ , направление третьего главного напряжения параллельно грани  $DCO$ , причем его проекция на плоскость  $ABCD$  перпендикулярна к линии  $CB$ , то на грани  $DCO$  также действуют лишь нормальные усилия. Поскольку напряжения в областях  $ABOO_1$  связаны элементарным образом с напряжениями в смежных областях, то, полагая усилия на грани  $ADO$  равным нулю, определим нормальные усилия на гранях  $ABO$  и  $DCO$ .

Указанное построение, элементарное по идее, возможно при использовании условий (2.11). Оно приводит к громоздким трансцендентным соотношениям между углами, характеризующими пирамиду, которые здесь опущены.

На фиг. 4 линия  $EFGH$  — проекция направления третьего главного напряжения на плоскости  $ABCD$ .

Поступила 20 II 1958

Институт механики АН СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Христьянович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Матем. сб., новая серия т. 1, вып. 4, 1936.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. АН СССР, 1946; Гостехтеоретиздат, 1950.
3. Prager W. Discontinuons solutions in the theory of plasticity. Courant Anniversary Volume, 1948.
4. Prager W. Discontinuons fields of plastic stress and flow. Proc. of the second U. S. Nat. Congress of Appl. Mech., 1955. Механика, сб. пер. ИЛ, вып. 4, 38, 1956.
5. Winzer A., Carrier G. F. The interation of discontinuity surfaces in plastic fields of stress. J. Appl. Mech., 15, 1948.
6. Lee E. H. On stress discontinuities in plane plastic flow. Proc. 3. rd Symposium on Appl. Math., 1950.
7. Hodge P. G. Approximate solutions of problems of plane plastic flow. J. Appl. Mech., 17, 1950.
8. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity Oxford, 1950. (Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956).
9. Шапиро Г. С. Упруго-пластическое равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.