Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. И. Блох

(Харьков)

Известные представления скалярной бигармонической функции в трехмерной области через трехмерные гармонические функции, будучи дополнены одним выражением, содержащим плоскостные гармонические функции, рассматриваются в своей совокупности как общее представление бигармонической функции через гармонические независимо от вопроса о возможном сокращении в нем числа функций.

При использовании этого выражения для построения общего решения основных уравнений статической задачи теории упругости изотропного тела можно получить обобщенное решение П. Ф. Папковича, включающее два отдельных его предложения и дополненное решением с использованием плоскостных функций, непосредственно не следуемым из предыдущего. Один из указанных им двух способов, приводящий к дифференциальной зависимости между гармоническими функциями, может быть представлен в форме, содержащей независимые функции.

1. О представлении бигармонических функций через гармонические. а) Предположим, что бигармоническая в рассматриваемой трехмерной области скалярная функция B может быть представлена в виде произведения двух четырежды дифференцируемых в этой области также скалярных функций R и S:

$$B = RS \tag{1.1}$$

Тогда условие бигармоничности функции B можно представить так:

$$\begin{aligned}R(\triangle\triangle S) + 4(\nabla R)\cdot(\nabla\triangle S) + 4(\nabla^2 R)\,..\,(\triangle^2 S) +\\ + 2\triangle(R)(\triangle S) + 4(\nabla\triangle R)\cdot(\nabla S) + (\triangle\triangle R)S = 0\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона (набла), $\triangle$ — оператор Лапласа и точка — знак скалярного умножения. Для того чтобы данное уравнение выполнялось независимо от частного вида функций R и S, необходимо, чтобы каждое слагаемое его левой части в отдельности равнялось нулю.

Исключая из рассмотрения тривиальный случай, когда одна из функций, R или S, является произвольной бигармонической, а другая постоянной величиной, легко заключить, что указанное требование равенства нулю каждого слагаемого будет при наиболее общих свойствах функций R и S выполняться в следующих четырех случаях:

$$\begin{array}{llll} 1)\ \nabla R = 0, & \nabla\triangle S = 2\mathbf{b}; & 3)\ \nabla^2 R = 0, & \triangle S = 2c \\ 2)\ \nabla R = \mathbf{b}, & \nabla\triangle S = 0; & 4)\ \nabla^2 R = 2c\mathbf{I}, & \triangle S = 0 \end{array} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{b}$ — постоянный вектор, c — постоянный скаляр и $\mathbf{I}$ — единичный тензор двукратной валентности. Очевидно, функции R и S, ввиду симметрии уравнения (1.2) относительно них, могут обмениваться свойствами.

Вводя обозначение Φ для гармонической в рассматриваемой трехмерной области функции, а также обозначения K и L для постоянных тензоров соответственно двукратной и трехкратной валентностей, результаты интегрирования уравнений (1.3) можно представить так:

$$
\begin{array}{lll}
1) & R = a, & S = \Phi + K \ldots \mathbf{rr} + L \ldots \mathbf{rrr} \\
2) & R = a\, \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, & S = \Phi + K \,..\, \mathbf{rr} \\
3) & R = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, & S = \Phi + K \,..\, \mathbf{rr} \\
4) & R = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + cr^2, & S = \Phi \\
 & (L^{(1;2)} + L^{(2;3)} + L^{(3;1)} = \mathbf{b}, & K^\circ = c)
\end{array}
\qquad (1.4)
$$

где a — постоянный скаляр, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки, r — его модуль, K° — результат скалярного свертывания тензора K двукратной валентности, $L^{(1,2)}$ — результат скалярного свертывания тензора L трех кратной валентности по первой и второй своим валентностям; аналогично при скалярном свертывании его по второй и третьей валентностям или по третьей и первой применены обозначения $L^{(2;3)}$ и $L^{(3;1)}$.

Мы воспользуемся результатами четвертого случая, так как результаты остальных, как можно показать, будут в конечном итоге также охвачены. Функция B в этом случае согласно (1.1) и вследствие представления четвертой группы равенств (1.4) получит вид:

$$B = (a + \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} + r^2 c)\, \Phi \qquad (1.5)$$

Очевидно, суммируя такие представления при изменении в складываемых выражениях значений содержащихся в них постоянных, а также выражений гармонических функций Φ, можно получить более общую формулу для бигармонической функции.

Снабжая в суммируемых выражениях обозначения таких изменяемых постоянных величин и функций индексом n, введем в рассмотрение гармонические скалярные функции и гармоническую вектор-функцию

$$F = \sum_n a_n \Phi_n, \qquad H = \sum_n c_n \Phi_n, \qquad \mathrm{G} = \sum_n \mathbf{b}_n \Phi_n$$

бигармонической функции B можно придать такой вид:

$$B = F + \mathbf{r} \cdot \mathrm{G} + r^2 H \qquad (1.6)$$

Возвращаясь к первым трем группам равенств (1.4), можно заметить, что, при использовании их для составления бигармонической функции по формуле (1.1), возникают еще произведения $a(\mathbf{rr} \,..\, K + \mathbf{rrr} \ldots L)$ и $(a + \mathbf{r} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{rr} \,..\, K)$, представляющие собой рациональные полиномы второй и третьей степени относительно переменных, которые, как легко установить, могут быть получены при помощи формулы (1.6).

б) Пусть трехмерная гармоническая функция S имеет вид:

$$S = \Phi_1 + z\Phi_2 \qquad (1.7)$$

где Φ_1 и Φ_2 — две гармонические функции точки области на некоторой плоскости, а z — аппликата точки (по нормали к этой плоскости).

Если подставить это выражение в (1.2), то оно примет вид

$$4(\nabla^2 R) \,..\, [\nabla^2\Phi_1 + z(\nabla^2\Phi_2) + \mathbf{k}(\nabla\Phi_2) + (\nabla\Phi_2)\mathbf{k}] +$$
$$+ 4(\nabla\Delta R) \,.\, [\nabla\Phi_1 + z(\nabla\Phi_2) + \Phi_2 \mathbf{k}] + (\Delta\Delta R)(\Phi_1 + z\Phi_2) = 0$$

где $\mathbf{k}$ — орт аппликаты z; при отсутствии точки или косого креста между векторными сомножителями умножение считается диадным.

Данное уравнение будет выполняться независимо от частного вида плоскостных гармонических функций Φ_1 и Φ_2 в том случае, если

$$\nabla^2 R = 2\,[c\,(\mathbf{I} - \mathbf{kk}) + g\mathbf{kk}]$$

где c и g — два постоянных скаляра. Отсюда следует такое выражение:

$$R = a + \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} + \rho^2 c + z^2 g$$

где a, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{r}$ имеют те же значения, что и ранее в формуле (1,5), а ρ — модуль радиуса-вектора текущей точки в плоскости, нормальной к оси z, т. е. в плоскости изменения аргументов функций Φ_1 и Φ_2.

Искомая гармоническая функция B вследствие (1.1) в этом случае

$$B = (a + \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} + \rho^2 c + z^2 g)\,(\Phi_1 + z\Phi_2)]$$

а после суммирования таких выражений с различающимися значениями постоянных и функций Φ_1 и Φ_2 — равенством

$$B = F_0 + [\mathbf{r}\cdot\mathbf{G}_1 + z\mathbf{r}\cdot\mathbf{G}_2 + \rho^2 P_1 + z\rho^2 P_2 + z^3 P_3 \tag{1.8}$$

Здесь F_0, P_1, P_2 и P_3 — плоскостные взаимно независимые гармонические скалярные функции, а $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ — трехкомпонентные гармонические вектор-функции, координатные составляющие которых представлены плоскостными скалярными функциями. Если сравнить это выражение с представлением (1.6), то можно заметить, что некоторые из слагаемых формулы (1.8) непосредственно из равенства (1.6) не следуют.

Действительно, полагая, например, $H = z\Phi_2$, мы найдем, что

$$r^2 H = (z\rho^2 + z^3)\,\Phi_2$$

где разделение правой части на два независимых между собой слагаемых, подобных двум последним в формуле (1.8), не происходит. Не разделяются они и при помощи других слагаемых представления (1.6).

в) Желая получить выражение трехмерной бигармонической функции через гармонические при различных участиях их в этом выражении, дополним формулу (1.6) слагаемыми, которые обеспечивали бы непосредственное составление также членов, входящих в равенство (1.8).

Имея при этом в виду, что выражения типа (1.8) могут быть составлены отдельно для каждой из трех взаимно перпендикулярных плоскостей трехмерного пространства, дополнительному слагаемому, которое обозначим через B_p, придадим следующий вид:

$$B_p = \mathbf{rrr}\ldots P \equiv \mathbf{r}^3\ldots P$$

где P — трехкомпонентный тензор трехкратной валентности специальной конструкции, представляемый формулой

$$P = P_x\mathbf{iii} + P_y\mathbf{jjj} + P_z\mathbf{kkk} \tag{1.9}$$

Здесь P_x, P_y и P_z — три гармонические функции в некоторых областях, располагающихся на взаимно ортогональных плоскостях, нормали к которым отмечены индексами, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$—орты декартовой системы координат.

После дополнения формулы (1.6) составленным здесь выражением мы получим такое представление бигармонической функции:

$$B = F + \mathbf{r}\cdot\mathbf{G} + r^2 H + \mathbf{r}^3 \ldots P \tag{1.10}$$

В декартовых координатах это выражение будет иметь вид:

$$B = F + xG_x + yG_y + zG_z + (x^2 + y^2 + z^2) H + \\ + x^3 P_x(y, z) + y^3 P_y(z, x) + z^3 P_z(x, y)$$

где G_x, G_y и G_z — координатные компоненты вектора $\mathbf{G}$.

Так как при решении конкретных задач может оказаться полезным располагать различными видами слагаемых правой части равенства (1.10), то в приводимых далее общих построениях в трехмерной области сохраним в этом равенстве все входящие в него слагаемые.

2. Общее решение основных уравнений теории упругости. Как известно, задача о нахождении смещений и напряжений, возникающих в изотропном упругом теле под воздействием внешних объемных и поверхностных сил, может быть сведена к задаче о напряженном состоянии такого же тела при отсутствии объемных сил, но при некоторых измененных поверхностных воздействиях. Этой возможностью исключения из рассмотрения объемных сил при решении основных дифференциальных уравнений теории упругости мы здесь воспользуемся.

Будем исходить из следующего представления вектора смещений точки упругого изотропного тела:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \nabla B \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v}$ — гармонический вектор и B — бигармонический скаляр. Из дифференциального уравнения равновесия

$$(1 - 2\nu)\triangle\, \mathbf{u} + \nabla^2\cdot\mathbf{u} = 0$$

где ν — коэффициент Пуассона, следует, что функции $\mathbf{v}$ и B должны быть связаны между собой зависимостью

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 2(1 - \nu)\triangle B \tag{2.2}$$

Выражения для смещений в координатной форме, аналогичные представлению (2.1), для случая, когда вектор $\mathbf{v}$ ограничен одной компонентой, были использованы еще Г. Герцем [1]. Для плоской теории упругости такие формулы в полном виде были получены А. Лявом ([2], стр. 216).

Воспользуемся равенством (1.10) для представления бигармонической функции B. В этом случае уравнение (2.2) получит такой вид:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 4(1 - \nu)[\nabla\cdot\mathbf{G} + 3H + 2\mathbf{r}\cdot(\nabla H) + 3\mathbf{r}\cdot P^{[1;2]}] \tag{2.3}$$

Представим затем вектор $\mathbf{v}$ следующим образом:

$$\mathbf{v} = 4(1 - \nu)(\mathbf{G} + \mathbf{w}) \tag{2.4}$$

где $\mathbf{w}$ — также гармонический вектор, и тогда из предыдущего равенства найдем, что вектор $\mathbf{w}$ должен будет удовлетворять уравнению

$$\Delta\cdot\mathbf{w} = 3H + \mathbf{r}\cdot(\nabla H) + 3\mathbf{r}\cdot P^{(1;2)} \tag{2.5}$$

Вектор $\mathbf{u}$ смещений, изображаемый равенством (2.1), вследствие представлений (2.4) и (1.10) в этом случае сможет быть выражен так:

$$\mathbf{u} = 4(1 - \nu)(\mathbf{G} + \mathbf{w}) - \nabla(F + \mathbf{r}\cdot\mathbf{G} + r^2 H + \mathbf{r}^3 \ldots P) \tag{2.6}$$

Данное равенство будет представлять собой расширенное решение П. Ф. Папковича, поскольку оно включает в себя две формы решения, ранее раздельно предложенные им, и дополнено слагаемым с плоскостными гармоническими функциями, им не учтенными.

Действительно, если в правой части этого равенства аннулировать все функции, кроме F и $\mathbf{G}$, то возникнет представление

$$\mathbf{u} = 4(1-\nu)\mathbf{G} - \nabla(F + \mathbf{r}\cdot\mathbf{G}) \tag{2.7}$$

известное в литературе как решение Папковича—Нейбера, установленное, помимо этих авторов, также Г. Д. Гродским [3,4,5,6]. Частный вид такого решения для случая, когда в гармоническом векторе $\mathbf{G}$ две координатные компоненты отсутствуют, был получен еще Буссинеском [7].

Если в правой части равенства (2.6) исключить все функции, кроме $\mathbf{w}$, F и H, то получится формула

$$\mathbf{u} = 4(1-\nu)\mathbf{w} - \nabla(F + r^2 H) \tag{2.8}$$

также предложенная независимо от предыдущей П. Ф. Папковичем в качестве решения основных уравнений теории упругости [4].

Для гармонического вектора $\mathbf{w}$ здесь в силу (2.5) имеем связь с функцией H зависимостью

$$\nabla\cdot\mathbf{w} = 3H + 2r\frac{\partial H}{\partial r} \tag{2.9}$$

тоже указанной им. Однако интеграл этого уравнения им не был получен.

Вопрос о возможности в первой форме решения (2.7) исключить те или другие функции явился предметом специального обсуждения.

Нейбер показал, как одна из компонент вектора $\mathbf{G}$ или скаляр F могут быть исключены из общего выражения для вектора смещений. П. Ф. Папковичем [4] было установлено, что скалярная функция F может быть опущена лишь в том случае, когда $\nu \neq 0.25$. Наконец, М. Г. Слободянский выяснил, что вопрос о возможности исключения функции F зависит также от степени ограниченности объема рассматриваемого тела и наличия внутренних замкнутых граничных поверхностей [8].

Функции, фигурирующие в (2.6) не вполне независимы, так как некоторые из них должны удовлетворять уравнению (2.5). Можно, однако, освободиться от этой зависимости, если проинтегрировать ее. С этой целью введем гармонический вектор $\mathbf{R}$, определяемый равенством

$$H = \nabla\cdot\mathbf{R} \tag{2.10}$$

и гармонический тензор Q четырехкратной валентности вида

$$\begin{aligned} Q = \mathbf{iii}\,[Q_{xy}(y,z)\,\mathbf{j} + Q_{xz}(y,z)\,\mathbf{k}] + \mathbf{jjj}\,[Q_{yz}(z,x)\,\mathbf{k} + Q_{yx}(z,x)\,\mathbf{i}] + \\ + \mathbf{kkk}\,[Q_{zx}(x,y)\,\mathbf{i} + Q_{zy}(x,y)\,\mathbf{j}] \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $Q_{xy}(y,z)$, $Q_{xz}(y,z)$ и т. д.— функции двух указанных декартовых координат точки; этот тензор связан с тензором P условием

$$P = Q\cdot\nabla \tag{2.12}$$

Легко убедиться проверкой, что интеграл уравнения (2.5) в этом случае может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}(\nabla\cdot R) + \mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}) - (\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r} + 3\mathbf{r}\cdot Q^{(1;2)} + \frac{1}{4(1-\nu)}(\nabla S + \nabla\times\mathbf{T}) \tag{2.13}$$

где S и $\mathbf{T}$ — произвольные гармонические в рассматриваемой области функции, соответственно скалярная и векторная, а $\times$ — знак векторного умножения.

Формула (2.6) для вектора смещений при этом примет вид:

$$\mathbf{u}=\nabla F+\nabla\times\mathbf{T}+4(1-\nu)[\mathbf{G}+\mathbf{r}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{R})+\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R})-(\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r}+3\mathbf{r}\cdot Q^{(1;2)}]-\\ -\nabla[\mathbf{r}\cdot\mathbf{G}+r^2(\nabla\cdot\mathbf{R})+\mathbf{r}^3\dots(Q\cdot\nabla)] \tag{2.14}$$

где $\nabla S-\nabla F$ объединено в$+\nabla F$, или следующий:

$$\mathbf{u}=\nabla F+\nabla\times\mathbf{T}+(3-4\nu)\mathbf{G}-(\nabla\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}+2(1-2\nu)\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R})+\\ +4(1-\nu)[\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R})-(\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r}]-r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R})+\\ +12(1-\nu)\mathbf{r}\cdot Q^{(1;2)}-3\mathbf{r}^2\,..\,(Q\cdot\nabla)-\mathbf{r}^3\dots(Q\cdot\nabla^2) \tag{2.15}$$

В декартовой системе координат компонента u_x вектора $\mathbf{u}$ в этом случае представится таким выражением:

$$u_x=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial T_z}{\partial y}-\frac{\partial T_y}{\partial z}+(3-4\nu)G_x-\left(x\frac{\partial G_x}{\partial x}+y\frac{\partial G_y}{\partial x}+z\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)+\\ +2(1-2\nu)x\left(\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\right)+4(1-\nu)\left[z\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)+\right.\\ \left.+y\left(\frac{\partial R_x}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial x}\right)\right]-(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\right)+\\ +12(1-\nu)[yQ_{yx}\ (z,x)+zQ_{zx}(x,y)]-3x^2\left(\frac{\partial Q_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial z}\right)-\\ -y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial Q_{yx}}{\partial x}\right)-z^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{zy}}{\partial y}\right) \tag{2.16}$$

Соответствующие выражения для компонент u_y и u_z того же вектора получатся отсюда в результате циклической перестановки обозначений координат и индексов.

Вполне понятно, что представленне (2.14) или (2.15) включает в себе также второе решение (2.8) П. Ф. Папковича в форме, свободной от какой-либо взаимосвязи между участвующими в нем гармоническими функциями.

Если воспользоваться затем выражением закона Гука для тензора σ напряжений

$$\sigma=\frac{E}{2(1-\nu)}\left(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\frac{2\nu}{1-2\nu}\Delta\cdot\mathbf{u}\mathbf{I}\right)$$

где E — модуль упругости, то при наличии равенства (2.15) можно получить такое представление для этого тензора

$$\sigma=\frac{E}{2(1-\nu)}\{2\nabla^2F+\nabla^2\times\mathbf{T}-\mathbf{T}\times\nabla^2+2(1-2\nu)(\nabla\mathbf{G}+\mathbf{G}\nabla)-\\ -2(\nabla^2G)\cdot\mathbf{r}+4\nu(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{I}+4(1+\nu)(\nabla\cdot\mathbf{R})\mathbf{I}+8\nu\mathbf{r}\cdot(\nabla^2\cdot\mathbf{R})\mathbf{I}+\\ +4(1-\nu)[\mathbf{r}\cdot(\nabla^2\mathbf{R})+(\mathbf{R}\nabla^2)\cdot\mathbf{r}-2(\nabla^2\mathbf{R})\cdot\mathbf{r}]-2r^2(\nabla^3\cdot\mathbf{R})-\\ -4\nu[(\nabla^2\cdot\mathbf{R})\mathbf{r}+\mathbf{r}(\nabla^2\cdot\mathbf{R})]+12\nu\mathbf{r}\cdot(Q^{(1;2)}\cdot\triangle)\mathbf{I}-12\mathbf{r}\cdot(Q\cdot\nabla)-\\ -2\mathbf{r}^3\,..\,(Q\cdot\nabla^3)+12(1-\nu)[Q^{(1;2)}+\underline{Q}^{(1;2)}+\mathbf{r}(Q^{(1;2)}\nabla)+\underline{\mathbf{r}\cdot(Q^{(1;2)}\nabla)}]-\\ -6[\mathbf{r}^2\,..\,(Q\cdot\triangle^2)+\underline{\mathbf{r}^2\,..\,(Q\cdot\nabla^2)]\}} \tag{2.17}$$

Здесь в подчеркнутых тензорных выражениях предполагается перестановка диадных сомножителей или транспонирование индексов в координатных представлениях.

Приводим здесь также следуемые из равенства (2.17) выражения для координатных компонент тензора σ в декартовой системе:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu}\Big\{ & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial T_z}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial z}\Big) + 2(1-\nu)\frac{\partial G_x}{\partial x} + \\
& + 2\nu\Big(\frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\Big) - \Big(x\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2 G_z}{\partial x^2}\Big) + \\
& + 2(1+\nu)\Big(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}\Big) + 4\Big(y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big[\frac{\partial R_x}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}\Big)\Big] - \\
& - 4(1-\nu)\Big(y\frac{\partial^2 R_y}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2 R_z}{\partial x^2}\Big) - (x^2+y^2+z^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}\Big) - \\
& - 6(1-\nu)x\Big(\frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial z}\Big) + 6\nu\Big(y\frac{\partial Q_{yz}}{\partial z} + z\frac{\partial Q_{zy}}{\partial_y}\Big) + \\
& + 6(2-\nu)\Big(y\frac{\partial Q_{yx}}{\partial x} + z\frac{\partial Q_{zx}}{\partial x}\Big) - \Big[y^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial Q_{yx}}{\partial x}\Big) + z^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y}\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{yz} = \frac{E}{1+\nu}\Big\{ & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial T_x}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial x}\Big) + \\
& + (1-2\nu)\Big(\frac{\partial G_z}{\partial y} + \frac{\partial G_y}{\partial z}\Big) - \Big(x\frac{\partial^2 G_x}{\partial y \partial z} + y\frac{\partial^2 G_y}{\partial y \partial z} + z\frac{\partial^2 G_z}{\partial y \partial z}\Big) - \\
& - 4(1-\nu)x\frac{\partial^2 R_x}{\partial y \partial z} - 2\nu\Big(y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y}\Big)\frac{\partial R_x}{\partial x} - 2\Big(z\frac{\partial^2 R_z}{\partial y \partial z} + y\frac{\partial^2 R_y}{\partial y \partial z}\Big) - \\
& - 2\nu\Big(y\frac{\partial^2 R_z}{\partial z^2} + z\frac{\partial^2 R_y}{\partial y^2}\Big) + 2(1-\nu)\Big[x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial R_z}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial z}\Big) + \\
& + y\frac{\partial^2 R_z}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 R_y}{\partial z^2}\Big] - (x^2+y^2+z^2)\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\Big(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}\Big) + \\
& + 6(1-\nu)\Big[Q_{yz} + Q_{zy} + x\Big(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial z}\Big)\Big] - 3\Big[y^2\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial Q_{yx}}{\partial x}\Big) + \\
& + z^2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y}\Big)\Big] - x^2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\Big(\frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial z}\Big)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Остальные получатся отсюда в результате циклической перестановки обозначений координат и индексов.

Наличие приведенных общих формул для вектора смещений и тензора напряжений, содержащих гармонические функции в различных допустимых для них сочетаниях, позволяет путем соответствующих ограничений их участия проще приспосабливать такие выражения к особенностям конкретных решаемых задач.

Поступила 16 XII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. Journal für die reine und angew. Math., Bd. 92, S. 156—171, 1882, Ges. Werke, Leipzig, Bd. 1, S. 155, 1895.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. Перевод с англ. ОНТИ, 1935.
3. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. Известия АН СССР, отд. мат. и ест. наук, стр. 1425—1435, 1932.
4. Папкович П. Ф. Обзор некоторых общих решений дифференциальных уравнений покоя изотропного упругого тела. ПММ, т. I, вып. 1, стр. 117—123, 1937.
5. Гродский Г. Д. Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела. Известия АН СССР, отд. мат. и ест. наук, № 4, стр. 587—614, 1935.
6. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Losung raumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. ZAMM, Bd. 14, H. 4, S. 203—212, 1934.
7. Boussinesq J. Application des potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides elastique. Paris, 1885.
8. Слободянский М. Г. Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. ПММ, т. XVIII, вып. 1, стр. 55—74, 1954.