

КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО ПОЛИПЛАНА ТАНДЕМ В ПЛОСКОМ НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ

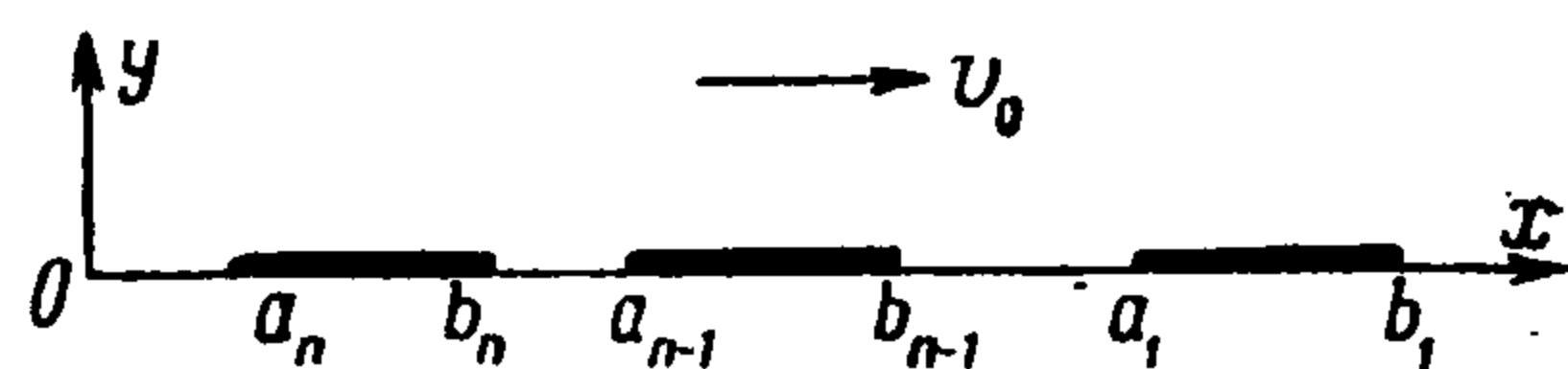
М. Д. Х а с к и н д

(Одесса)

Рассматриваются малые колебания тонкого полиплана тандем в плоском несжимаемом потоке. Решение основывается на расчленении всей задачи на две более простые [1]. Одна из этих задач является неоднородной и характеризует бесциркуляционное обтекание системы крыльев, а вторая представляет собой однородную задачу, решаемую при помощи функциональной комбинации, содержащей некоторые постоянные. Для решения этих простых задач применяются методы теории тонких крыльев [2], и все исследование сводится к определению постоянных при помощи линейных уравнений.

Наибольшее внимание уделяется задаче о колебаниях биплана тандем, в котором одно из крыльев неподвижно, и даются приближенные выражения для гидродинамических сил и энергетических характеристик этой системы, рассматриваемой в качестве движительного комплекса.

§ 1. Кинематические соотношения для колеблющегося полиплана тандем. Пусть имеем тонкий полиплан тандем бесконечного размаха, совершающий малые гармонические колебания частоты σ около поступательного движения с постоянной скоростью v_0 в несжимаемой жидкости. Пусть далее Oxy (фиг.1) — подвижная система координат, перемещающаяся поступательно со скоростью v_0 ; тогда, считая возмущенное движение жидкости безвихревым, для потенциала скоростей $\Phi(x, y, t)$ абсолютного движения жидкости имеем линеаризованное условие обтекания



Фиг. 1

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_{nk}(x) e^{j\sigma t} \quad \text{на } a_k b_k \quad (k = 1, \dots, n; j = \sqrt{-1}) \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем в комплексных выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $\exp j\sigma t$, следует рассматривать только действительную часть относительно мнимой единицы j , причем ради сокращения, но не для упрощений в выражении (1.1) принято, что средний угол атаки равен нулю. Если тонкие крылья колеблются как твердые тела, то комплексная амплитуда нормальной скорости $v_{nk}(x)$ определяется выражением

$$v_{nk}(x) = v_k + \left(\frac{j}{\mu_0} + x \right) \omega_k \quad \left(\mu_0 = \frac{\sigma}{v_0} \right) \quad (1.2)$$

где v_k и ω_k — комплексные амплитуды вертикальной и угловой скорости пластинки $a_k b_k$.

Считая возмущенное колебательное движение жидкости установившимся, находим

$$\Phi(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{j\sigma t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_{nk}(x) \quad \text{на } a_k b_k \quad (1.3)$$

Гармоническая функция $\varphi(x, y)$ должна удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям. Действительно, для давления в жидкости имеем линеаризованное выражение (p_0 и ρ — соответственно давление и плотность невозмущенной жидкости)

$$p - p_0 = \rho v_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - j\mu_0 \varphi \right) e^{j\sigma t} \quad (1.4)$$

Поэтому из соображений симметрии и непрерывности давления имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x, -y) &= -\varphi(x, y), & \varphi(x, 0) &= 0 \quad \text{при } x > b_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - j\mu_0 \varphi &= 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{вне } a_k b_k \quad (x < b_1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из этих условий следует, что за задними кромками крыльев остается линия разрыва горизонтальных скоростей, схематизирующая вихревую пелену, сходящую с этих кромок. Отыскиваемое решение должно также удовлетворять условию конечности скорости жидкости в задних кромках a_k .

Для решения задачи введем в рассмотрение функцию $w = \varphi + i\psi$ комплексного переменного $z = x + iy$, где мнимая единица $i = \sqrt{-1}$ не взаимодействует с мнимой единицей j . Далее произведем расчленение поставленной выше задачи на две более простые: $w(z) = w_0(z) + w_1(z)$, где функции $w_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ и $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} \frac{dw_0}{dz} = -v_{nk}(x) \quad \text{на } a_k b_k, \quad \operatorname{Re} w_0(x) = 0 \quad \text{вне } a_k b_k \quad (1.6)$$

$$\operatorname{Im} w_1(x) = A_k \quad \text{на } a_k b_k, \quad \operatorname{Re} w_1(x) = 0 \quad \text{при } x > b_1 \quad (1.7)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{dw_1}{dz} - j\mu_0 w_1 \right) = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{вне } a_k b_k \quad (x < b_1)$$

Функция $w_0(z)$ представляет собой комплексный потенциал бесциркуляционного движения жидкости, а функция $w_1(z)$ является решением однородной задачи и выражается линейно через постоянные A_k . Очевидно, что функция $w(z)$, определенная по условиям (1.6) и (1.7), удовлетворяет соотношениям (1.3) и (1.5). Входящие в эту функцию постоянные A_k следует найти из условия конечности скорости жидкости в задних кромках a_k .

Пользуясь теорией тонкого крыла [2, 3], сразу находим

$$\frac{dw_0}{dz} = \frac{1}{2\pi i g(z)} \left(\sum_{k=0}^{n-2} B_k z + 2 \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_{nk}(\xi) g_k(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \quad (1.8)$$

$$g(z) = \left(\prod_{s=1}^n (z - a_s)(z - b_s) \right)^{1/2}$$

$$g_k(x) = \left((b_k - x)(x - a_k) \prod_{s \neq k}^n (x - a_s)(x - b_s) \right)^{1/2} \quad (1.9)$$

Постоянные B_k ($k = 0, 1, \dots, n-2$), являющиеся действительными относительно i , определяются из условия равенства нулю циркуляции вокруг $n-1$ отрезков $a_k b_k$:

$$\int_a^{b_l} \sum_{k=0}^{n-2} B_k x^k \frac{dx}{g_l(x)} + 2 \int_a^{b_l} \frac{dx}{g_l(x)} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_{nk}(\xi) g_k(\xi)}{\xi - x} d\xi = 0 \quad (l = 1, \dots, n-1) \quad (1.10)$$

Для определения w_1 вводим в рассмотрение другую функцию:

$$f(z) = r + is = \frac{dw_1}{dz} - j\mu_0 w_1 \quad (1.11)$$

Из (1.7) имеем следующие условия для функции $f(z)$:

$$\operatorname{Im} f(x) = -j\mu_0 A_k \quad \text{на } a_k b_k, \quad \operatorname{Re} f(x) = 0 \quad \text{вне } a_k b_k \quad (1.12)$$

Из этих условий следует, что разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид (α_k — действительные относительно i постоянные):

$$f(z) = \frac{i\alpha_1}{z} + \frac{i\alpha_2}{z^2} + \dots \quad (1.13)$$

Функция $f(z)$ определяется так же, как и dw_0/dz . Действительно, учитывая разложение (1.13), будем иметь (C_k — действительные относительно i постоянные)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i g(z)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k z^k + 2j\mu_0 \sum_{k=0}^n A_k \int_{a_k}^{b_k} \frac{g_k(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \quad (1.14)$$

Для определения постоянных C_k и A_k воспользуемся условием конечности скорости жидкости в задних кромках a_k , которое можно представить в форме

$$\lim_{z \rightarrow a_l} (z - a_l)^{1/2} \left(\frac{dw_0}{dz} + f \right) = 0 \quad (l=1, \dots, n)$$

Применяя это условие, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} C_k a_l^k + 2j\mu_0 \sum_{k=1}^n A_k \int_{a_k}^{b_k} \frac{g_k(\xi)}{\xi - a_l} d\xi + \\ & + \sum_{k=0}^{n-2} B_k a_l^k + 2 \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_{nk}(\xi) g_k(\xi)}{\xi - a_l} d\xi = 0 \quad (l=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.15)$$

из которой все C_k линейно выражаются через A_k . Для определения последних следует удовлетворить первое из условий (1.7). С этой целью рассмотрим соотношение (1.11) как дифференциальное уравнение относительно w_k . Учитывая, что на далеких расстояниях впереди полиплана жидкость не возмущена, найдем

$$\psi_1(x, 0) = e^{j\mu_0 x} \int_{-\infty}^x e^{-j\mu_0 x} s(x, 0) dx \quad (1.16)$$

Пользуясь этим выражением и удовлетворяя первое из условий (1.7), получаем следующую линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_l = e^{j\mu_0 b_l} \left[\int_{-\infty}^{b_l} e^{-j\mu_0 x} s(x, 0) dx + \sum_{s=1}^{l-1} A_s (e^{-j\mu_0 a_s} - e^{-j\mu_0 b_s}) + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{l-1} \int_{a_s}^{b_{s+1}} e^{-j\mu_0 x} s(x, 0) dx \right] \quad (l=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким образом, окончательное нахождение функции $w(z)$ сводится к определению постоянных A_k , B_k и C_k при помощи линейных систем

уравнений (1.10), (1.15) и (1.17). Анализ же неустановившегося движения полиплана тандем [3,4] в общем случае при произвольном изменении со временем нормальных скоростей наталкивается на большие трудности, так как для этого необходимо решить громоздкие интегральные уравнения.

§ 2. Колебания одного крыла в биплане тандем. Рассмотрим биплан тандем, положение кромок которого определяется в виде $a_1 = -a$, $b_1 = a$, $a_2 = -c - b$ и $b_2 = -c + b$, где c — абсцисса центра тяжести второго крыла, а $2b$ — ширина этого крыла. Будем далее считать второе крыло неподвижным¹ ($v_{n2}(x) = 0$), тогда формулы (1.8), (1.9) и (1.14) принимают для этого случая следующий вид:

$$\frac{dw_0}{dz} = \frac{1}{2\pi i g(z)} \left(B_0 + 2 \int_{-a}^a \frac{v_n(\xi) g_1(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \quad (2.1)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i g(z)} \left(C_0 + C_1 z + 2j\mu_0 A_1 \int_{-a}^a \frac{g_1(\xi)}{\xi - z} d\xi + 2j\mu_0 A_2 \int_{-c-b}^{-c+b} \frac{g_2(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \quad (2.2)$$

$$g(z) = ((z^2 - a^2)[(z + c)^2 - b^2])^{1/2}, \quad g_1(x) = ((a^2 - x^2)[(x + c)^2 - b^2])^{1/2} \quad (2.3)$$

$$g_2(x) = -(|x^2 - a^2|[b^2 - (x + c)^2])^{1/2}$$

Для определения постоянных имеем уравнения (1.10), (1.15) и (1.17), которые, в частности, дают

$$B_0 \int_{-a}^a \frac{dx}{g_1(x)} + 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{g_1(x)} \int_{-a}^a \frac{v_n(\xi) g_1(\xi)}{\xi - x} d\xi = 0 \quad (2.4)$$

$$B_0 + C_0 - C_1 a + 2 \int_{-a}^a \frac{v_n(\xi) + j\mu_0 A_1}{\xi + a} g_1(\xi) d\xi + 2j\mu_0 A_2 \int_{-c-b}^{-c+b} \frac{g_2(\xi)}{\xi + a} d\xi = 0 \quad (2.5)$$

$$B_0 + C_0 - C_1(c + b) + 2 \int_{-a}^a (v_n(\xi) + j\mu_0 A_1) \left((a^2 - \xi^2) \frac{\xi + c - b}{\xi + c + b} \right)^{1/2} d\xi -$$

$$- 2j\mu_0 A_2 \int_{-c-b}^{-c+b} \left(|\xi^2 - a^2| \frac{b - (\xi + c)}{b + \xi + c} \right)^{1/2} d\xi = 0 \quad (2.6)$$

$$A_1 = e^{j\mu_0 a} \int_{-\infty}^a e^{-j\mu_0 x} s(x, 0) dx \quad (2.7)$$

$$A_2 = A_1 e^{j\mu_0(a+b-c)} + e^{j\mu_0(b-c)} \int_{-a}^{-c+b} e^{-j\mu_0 x} s(x, 0) dx \quad (2.8)$$

Пусть неподвижное крыло имеет небольшую ширину по сравнению с колеблющимся крылом, так что $c \gg b$. В этом случае из уравнений (2.4) — (2.8) можно найти явные приближенные выражения для входящих

¹ Во всех вычислениях полагаем $c > 0$, т. е. что неподвижное крыло является задним. Если же неподвижное крыло является передним ($c < 0$), то в последующих формулах следует положить $(c^2 - a^2)^{1/2} = -(|c^2 - a^2|)^{1/2}$.

в эти уравнения постоянных, которые соответствуют действию неподвижного крыла как сосредоточенной особенности. В самом деле, из (2.1) и (2.4) следует, что вне отрезка $(-c - b, -c + b)$ с точностью до членов, содержащих $(b/c)^2$, имеют место выражения

$$B_0 = -2 \int_{-a}^a v_n(\xi) (a^2 - \xi^2)^{1/2} d\xi, \quad \frac{dw_0}{dz} = \frac{1}{\pi i (z^2 - a^2)^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{v_n(\xi) (a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\xi - z} d\xi \quad (2.9)$$

Выражения (2.9) соответствуют бесциркуляционному движению жидкости вокруг изолированного колеблющегося тонкого крыла. Следовательно, влияние неподвижного крыла на бесциркуляционную часть потока жидкости около колеблющегося крыла, приводящее к дополнительному эффекту присоединенных масс, сказывается лишь в дипольном, квадрупольном и более высоких приближениях.

С рассматриваемой точностью уравнения (2.5) и (2.6) принимают также простой вид:

$$C_0 - C_1 a + 2\pi j \mu_0 a^2 \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{2} \right) A_1 = (c - a) D_1 \quad (2.10)$$

$$C_0 - C_1 c + \pi j \mu_0 a^2 A_1 = b (D_2 + C_1 + 2\pi j \mu_0 c A_1 + 4j \mu_0 (3 - 2^{1/2}) (c^2 - a^2)^{1/2} A_2) \quad (2.11)$$

$$D_1 = -2 \int_{-a}^a v_n(\xi) \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right)^{1/2} d\xi, \quad D_2 = 2 \int_{-a}^a \frac{v_n(\xi) (a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\xi + c} d\xi \quad (2.12)$$

Из соотношения (2.2) следует, что вне отрезка $(-c - b, -c + b)$ с точностью до членов, содержащих $(b/c)^2$, имеет место приближенное выражение

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i (z^2 - a^2)^{1/2}} [C_1 - 2\pi j \mu_0 A_1 (z - (z^2 - a^2)^{1/2})] + \frac{C_0 - C_1 c + \pi j \mu_0 a^2 A_1}{2\pi i (z + c) (z^2 - a^2)^{1/2}} \quad (2.13)$$

причем, как это следует из (2.11), второе слагаемое в (2.13) имеет порядок b/c . Таким образом, приближенные выражения (2.9) и (2.13) соответствуют замене действия неподвижного крыла на поток жидкости около колеблющегося крыла действием сосредоточенного вихря определенной интенсивности.

Пользуясь выражениями (2.7) и (2.13), получаем следующее уравнение для определения постоянной A_1 :

$$C_1 H_0^{(2)}(\mu) - 2\pi \mu A_1 H_1^{(2)}(\mu) = \frac{2j}{\pi a} E_0 (C_0 - C_1 c + \pi j \mu a A_1) \quad (\mu = \mu_0 a) \quad (2.14)$$

$$E_0 = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{-j\mu x} dx}{(x + \alpha_0) (x^2 - 1)^{1/2}}, \quad \frac{dE_0}{d\mu} - j\alpha_0 E_0 = \frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(\mu) \quad \left(\alpha_0 = \frac{c}{a} \right) \quad (2.15)$$

Здесь $H_n^{(2)} = I_n - jN_n$ — функция Ганкеля, и из соотношения (2.15) вытекает равенство

$$E_0 = \frac{\ln(\alpha_0 - (\alpha_0^2 - 1)^{1/2})}{(\alpha_0^2 - 1)^{1/2}} e^{j\nu} + \frac{\pi}{2\alpha_0} e^{j\nu} \left[H_c^{(2)}\left(\frac{1}{\alpha_0}, \nu\right) - jH_s^{(2)}\left(\frac{1}{\alpha_0}, \nu\right) \right] \quad (\nu = \mu_0 c) \quad (2.16)$$

где функции $H_c^{(2)}$ и $H_s^{(2)}$ протабулированы [5] и выражаются через функции Ганкеля при помощи соотношений

$$H_c^{(2)}\left(\frac{1}{\alpha_0}, \nu\right) = \int_0^\nu H_0^{(2)}\left(\frac{x}{\alpha_0}\right) \cos x dx, \quad H_s^{(2)}\left(\frac{1}{\alpha_0}, \nu\right) = \int_0^\nu H_0^{(2)}\left(\frac{x}{\alpha_0}\right) \sin x dx \quad (2.17)$$

Из уравнений (2.10), (2.11) и (2.14) можем определить постоянные C_i и A_i с точностью до членов, содержащих $(b/c)^2$. Для этого положим

$$C_i = C_{i0} + bC_{i1}, \quad A_i = A_{i0} + bA_{i1} \quad (2.18)$$

Тогда из уравнений (2.10), (2.11) и (2.14) получим

$$\begin{aligned} C_{10} &= C(\mu) D_1, & 2\pi\mu A_{10} &= (1 - C(\mu)) D_1 \\ C_{00} &= a \left[(\alpha_0 C(\mu)) - \frac{1}{2} (1 - C(\mu)) \right] D_1 \\ C_{01} &= \left[(2\alpha_0 - 1) C(\mu) + (\alpha_0 - \frac{3}{2}) (1 - C(\mu)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\pi} (\alpha_0 + \frac{1}{2}) (\alpha_0 - 1) E_0 T(\mu) \right] \frac{G}{\alpha_0 - 1} \\ C_{11} &= \left[C(\mu) - \frac{2}{\pi} (\alpha_0 - 1) E_0 T(\mu) \right] \frac{G}{a(\alpha_0 - 1)} \\ 2\pi j\mu A_{11} &= \left[1 - C(\mu) + \frac{2}{\pi} (\alpha_0 - 1) E_0 T(\mu) \right] \frac{G}{a(\alpha_0 - 1)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь $C(\mu)$, $T(\mu)$ и G представляют собой следующие выражения:

$$\begin{aligned} C(\mu) &= \frac{H_1^{(2)}(\mu)}{H_1^{(2)}(\mu) + jH_0^{(2)}(\mu)}, & T(\mu) &= \frac{1}{H_1^{(2)}(\mu) + jH_0^{(2)}(\mu)} \\ G &= D_2 + 2\pi j\nu A_{10} + C_{10} + 4j\mu A_{20} (3 - 2^{1/2}) (\alpha_0^2 - 1)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для окончательного определения всех постоянных следует найти значение A_{20} . Из уравнения (2.8) и выражений (2.13) и (2.19) находим

$$A_{20} = \left[\frac{1}{2\pi j\mu} (1 - C(\mu)) (1 - e^{-j\nu} E_2) - \frac{1}{2\pi} e^{-j\nu} E_1 C(\mu) \right] D_1 \quad (2.21)$$

$$E_1 = \int_1^{\alpha_0} \frac{e^{-j\mu x}}{(x^2 - 1)^{1/2}} dx, \quad E_2 = \frac{dE_1}{d\mu} \quad (2.22)$$

Заметим, что функции E_1 и E_2 можно вычислить при помощи функции Бесселя $I_k(\mu)$. Действительно, при помощи подстановки $U = x - (x^2 - 1)^{1/2}$ выражение для E_1 принимает вид:

$$E_1 = - \int_1^{U_0} \exp \left[\frac{j\mu}{2} \left(U + \frac{1}{U} \right) \right] \frac{dU}{U} \quad (U_0 = \alpha_0 - (\alpha_0^2 - 1)^{1/2})$$

Воспользовавшись далее разложением

$$\exp \left[\frac{j\mu}{2} \left(U + \frac{1}{U} \right) \right] = I_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} j^k (U^k + U^{-k}) I_k(\mu)$$

получаем следующее выражение для E_1 , удобное для вычислений:

$$E_1 = -I_0(\mu) \ln U_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^k}{k} I_k(\mu) (U_0^k - U_0^{-k}) \quad (2.23)$$

§ 3. Гидродинамические силы, действующие на колеблющийся биплан тандем. Проведем вычисление гидродинамических сил, действующих на колеблющееся крыло в биплане тандем. Пользуясь для этого выражением (1.4) и представлением функции w через w_0 и f , получаем следующие соотношения для подъемной силы и момента:

$$Y = \rho v_0 e^{j\sigma t} \int_K \left(f(z) + j\mu_0 z \frac{dw_0}{dz} \right) dz$$

$$M = \rho v_0 e^{j\sigma t} \int_K \left[z f(z) + z \left(1 + \frac{j\mu_0 z}{2} \right) \frac{dw_0}{dz} \right] dz \quad (3.1)$$

где K — контур, охватывающий отрезок $(-a, a)$ и обходимый против хода часовой стрелки.

На основании формул (2.9), (2.13) и (2.19) и теоремы о вычетах находим

$$Y = Y_0 + \frac{b}{a} Y_1, \quad M = M_0 + \frac{b}{a} M_1 \quad (3.2)$$

где Y_0 и M_0 — подъемная сила и момент при колебаниях изолированного крыла:

$$Y_0 = -2\rho v_0 \int_{-a}^a \left[C(\mu) \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{1/2} + j\mu \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2} \right] v_n(x, t) dx$$

$$(v_n(x, t) = v_n(x) e^{j\sigma t}) \quad (3.3)$$

$$M_0 = -2\rho a v_0 \int_{-a}^a \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2} + \frac{j\mu x}{2a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (C(\mu) - 1) \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{1/2} \right] v_n(x, t) dx$$

а $Y_1 b/a$ и $M_1 b/a$ — дополнительная подъемная сила и момент, обусловленные действием неподвижного крыла как сосредоточенного вихря:

$$Y_1 = \rho v_0 G e^{j\sigma t} \left(\frac{C(\mu)}{\alpha_0 - 1} - \frac{2}{\pi} E_0 T(\mu) + (\alpha_0^2 - 1)^{-1/2} \right)$$

$$M_1 = \rho v_0 a G e^{j\sigma t} \left(\frac{\alpha_0 - 3/2}{\alpha_0 - 1} + \frac{C(\mu)}{2(\alpha_0 - 1)} - \frac{1}{\pi} E_0 T(\mu) - \alpha_0 (\alpha_0^2 - 1)^{-1/2} \right) \quad (3.4)$$

Для вычисления подсосывающих сил, приложенных к передним кромкам b_k , воспользуемся общей формулой [2]

$$X_k = -\rho\pi \lim_{z \rightarrow b_k} \left\{ (z - b_k) \left[\frac{dw}{dz} e^{j\sigma t} \right]^2 \right\} \quad (3.5)$$

Принимая во внимание (2.9), (2.13) и (2.19), получаем выражение для среднего значения подсосывающей силы, приложенной к передней кромке $z = a$ колеблющегося крыла:

$$X_1^* = X_{10}^* + \frac{b}{a} X_{11}^* \quad \left(A^* = \frac{\sigma}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\sigma} A(t) dt \right) \quad (3.6)$$

где X_{10}^* — среднее значение подсасывающей силы, действующей на изолированно колеблющееся крыло:

$$X_{10}^* = \frac{\rho a}{\pi} \left| - \int_{-a}^a \frac{v_n(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{1}{2a} (C(\mu) - 1) D_1 \right|^2 \quad (3.7)$$

а $X_{11}^* b/a$ — дополнительное слагаемое в выражении подсасывающей силы обусловленное действием неподвижного крыла как сосредоточенного вихря:

$$X_{11}^* = \frac{\rho}{2\pi} \operatorname{Re} \left[G \left(\frac{2C(\mu) - 1}{\alpha_0 - 1} - \frac{4}{\pi} E_0 T(\mu) + \frac{1}{\alpha_0 + 1} \right) \bar{F} \right] \quad (3.8)$$

$$F = - \int_{-a}^a \frac{v_n(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{1}{2a} (C(\mu) - 1) D_1$$

При вычислении подсасывающей силы, действующей на неподвижное крыло, следует исходить из точных формул (2.1), (2.2) и (2.5) и после этого осуществить предельный переход. В результате найдем

$$X_2^* = \frac{\rho b}{4\pi(c^2 - a^2)} |G|^2 \quad (3.9)$$

Полное выражение для проекции гидродинамических сил на ось x имеет вид ($\beta(t)$ — угол атаки колеблющегося крыла):

$$T = X_1 + X_2 - Y\beta \quad \left(\beta(t) = - \frac{i}{\sigma} \omega^{j\sigma t} \right) \quad (3.10)$$

Для некоторых режимов колебаний $T^* > 0$ и в этом случае образуется тянущая сила, т. е. колеблющееся крыло в системе биплана тандем можно рассматривать как движительный комплекс. В этом случае средние значения полезной и затрачиваемой мощностей определяются формулами

$$E^* = T^* v_0, \quad N^* = -(YV + M\Omega)^* \quad (V = ve^{j\sigma t}, \quad \Omega = \omega e^{j\sigma t}) \quad (3.11)$$

Полученные выше соотношения позволяют вычислить эти энергетические характеристики, в том числе коэффициент полезного действия тяги $\eta = E^*/N^*$.

Поступила 29 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Колебания крыла в дозвуковом потоке газа. ПММ, т. 11, вып. 1, 1947.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
3. Седов Л. И. К задачам о тонких полипланах тандем и о глиссировании на нескольких реданах. Тр. ЦАГИ, № 325, 1937.
4. Nickel K. Über Tragflügelssysteme in ebener Strömung beliebigen instationären Bewegungen. Ingr-Arch., Bd. 23, No 3, 1955.
5. Schwarz L. Untersuchung einiger mit den Zylinderfunktion nullter Ordnung verwandter Funktionen. Luftfahrtforschung, Bd. 20, 1943.