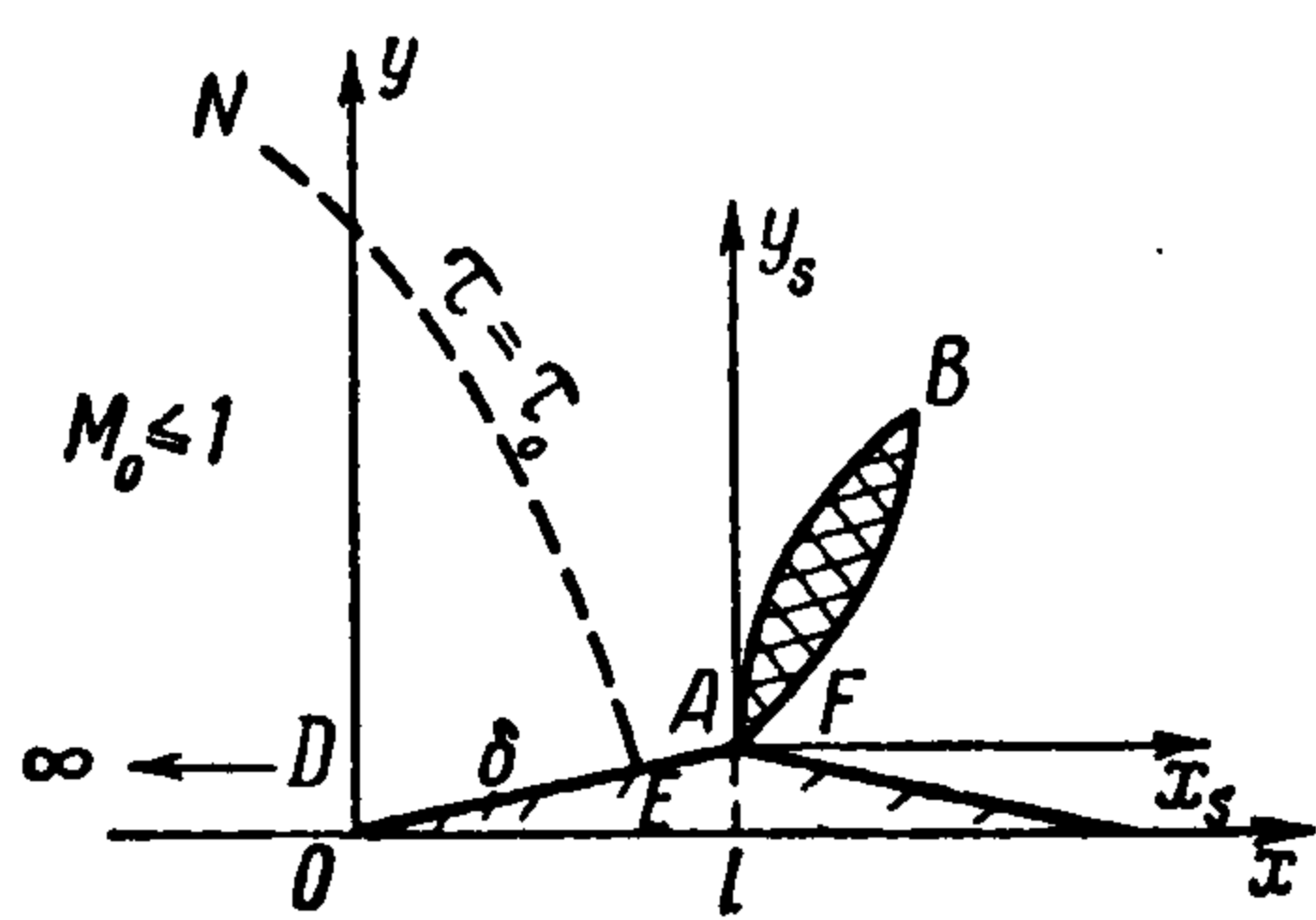


О ДВИЖЕНИИ РОМБОВИДНОГО ПРОФИЛЯ СО СКОРОСТЬЮ,
 НЕ ПРЕВЫШАЮЩЕЙ СКОРОСТЬ ЗВУКА

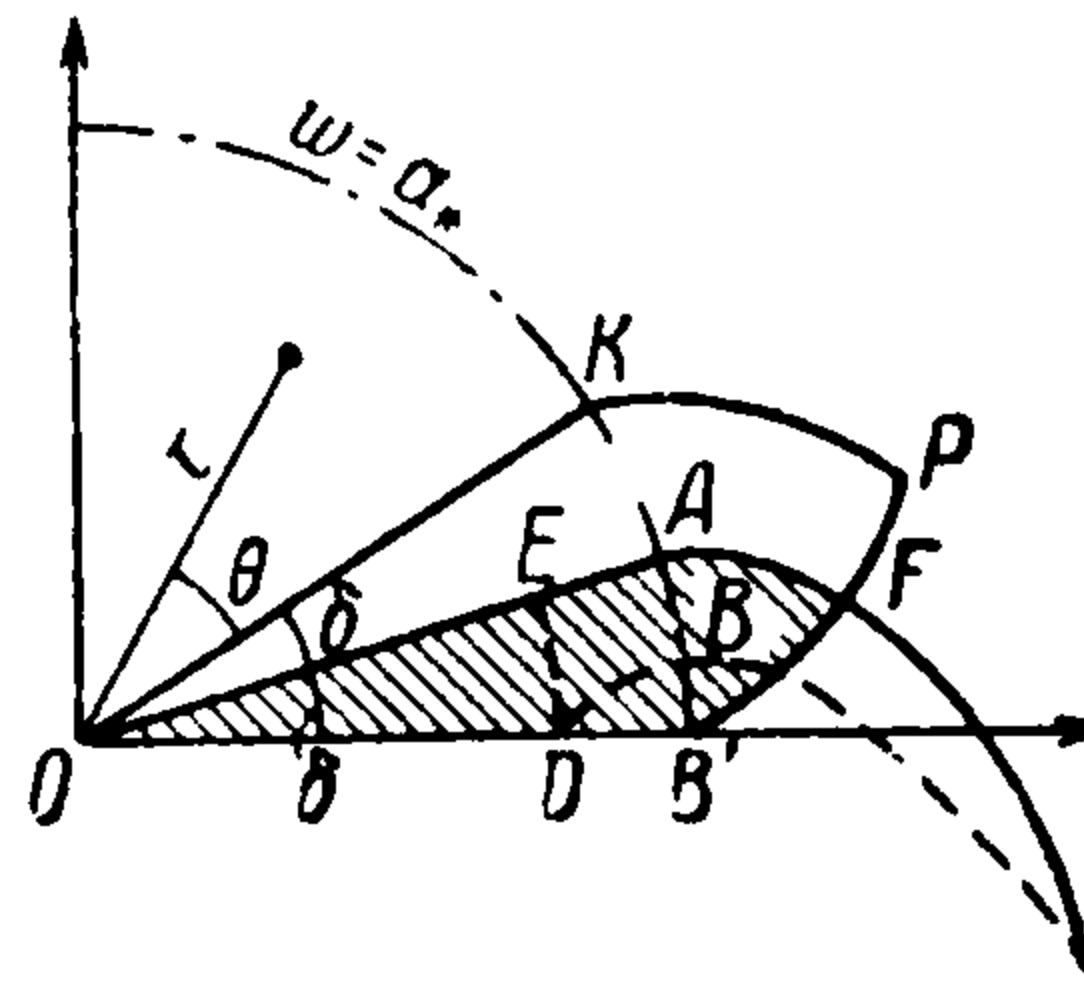
С. К. Асланов

(Саратов)

§1. Постановка задачи. Рассмотрим поток газа, который со скоростью, не превышающей звуковую, набегаает под нулевым углом атаки на ромбовидный профиль (фиг. 1) длины $2l$ и угла раствора $2\pi/\xi = 2\delta$. Симметрия течения позволяет ограничиться лишь верхней полуплоскостью ($y \geq 0$). Набегающий поток тормозится перед профилем, начиная от некоторой данной скорости на бесконечности τ_0 , до нуля в вершине O . Затем он опять разгоняется и достигает звуковой скорости τ_s на параболической линии AB . Последняя, являясь конечной в дозвуковом случае, простира-



Фиг. 1



Фиг. 2

ется неограниченно в поперечном потоку направлении для звукового режима. Следующая дальше сверхзвуковая зона замыкается по крайней мере одним скачком уплотнения, но [каков он — неизвестно. При звуковом же обтекании гиперболическая область течения влияет [1] на эллиптическую лишь частью, непосредственно прилегающей к линии перехода и ограниченной «предельной» характеристикой $B'F$.

Соответствующая данному течению краевая задача на плоскости годографа (фиг. 2) формулируется следующим образом. Функция тока $\Psi(\tau, \theta)$, являясь решением уравнения Чаплыгина [2]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{1 + (\beta - 1)\tau}{\tau(1 - \tau)} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1 - \tau/\tau_s}{4\tau^2(1 - \tau)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.1)$$

$(\tau = w^2 / w_{\max}^2) \quad \beta = (\kappa - 1)^{-1}$

удовлетворяет граничным условиям

$$\Psi(\tau, 0) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \tau < \tau_0 \text{ (условие симметрии)} \quad (1.2)$$

$$\Psi(\tau, \delta) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_s \text{ (условие обтекания стенки)} \quad (1.3)$$

$$X = l \quad \text{при } \theta = \delta \quad \tau = \tau_s \text{ (условие достижения скорости звука в точке } A) \quad (1.4)$$

$$\Psi = 0 \text{ на характеристике } AF \text{ (условие поворота около точки } A) \quad (1.5)$$

Здесь w — модуль скорости, w_{\max} — модуль максимальной скорости, κ — показатель адиабаты и $\tau_s = (2\beta + 1)^{-1}$ отвечает звуковой скорости, θ_1^* — угол наклона вектора скорости к оси x . Далее нужно удовлетворить всем условиям на скачке, которым оканчивается сверхзвуковая зона AB . Кроме того, так как все линии тока на плоскости годографа исходят из одной точки $D(\tau_0, 0)$, соответствующей скорости потока в бесконечности, то функция тока имеет в ней особенность.

В звуковом случае ($\tau_0 = \tau_s$) сформулированная задача превращается в определенную задачу Трикоми для $\Psi(\tau, \theta)$ в заштрихованной области (фиг. 2) плоскости (τ, θ) .

Исследования, представленные в современной литературе по данному вопросу, относятся лишь к околосзвуковым потокам, обтекающим тонкие клинья [3, 4]. Все авторы используют при этом уравнение Трикоми [5]

$$\Psi_{\eta\eta} + \eta\Psi_{\theta\theta} = 0, \quad \eta = \frac{(\kappa + 1)^{1/2}}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s}\right) \quad (1.6)$$

Д. Коул в работе [3], посвященной обтеканию клиньев дозвуковым потоком сжимаемого газа, впервые нашел решение уравнения (1.6), удовлетворяющее всем краевым условиям дозвуковой области (1.2), (1.3), (1.4) и обладающее особенностью, соответствующей потоку в бесконечности. Но это решение нельзя считать вполне удовлетворительным, ибо в предельном случае звукового обтекания, как показано нами [6], оно не имеет требуемой особенности Ф. И. Франкля [1]. Л. Триллингу и К. Уокеру путем добавления к решению Коула ряда регулярных решений (1.6) удалось выполнить условие (1.5). В результате этого уточнения звуковая линия AB искривилась (по сравнению с Д. Коулом) и приняла более реальную форму.

Задача звукового обтекания клина решалась Г. Гудерлеем, Х. Йосихарой [7] и Л. Овсянниковым [8]. Для исследования потока, как и в дозвуковом случае, применялось уравнение Трикоми (1.6).

Однако, при обтекании клина на его острие возникает критическая точка, в окрестности которой скорости малы. Следовательно, уравнение (1.6) непригодно в этой области и нужно пользоваться точным уравнением (1.1). А. Макки и Д. Пэк [9] нашли решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3) и обладающее особенностью в точке $(\tau_0, 0)$. Для этого был применен метод обобщения несжимаемого потока. А именно, если имеется несжимаемый поток, набегающий на профиль со скоростью на бесконечности w_0 и обладающий комплексным потенциалом

$$W_i = \sum d_\nu \left(\frac{w}{w_0}\right)^\nu e^{-i\nu\theta} \quad (w < w_0) \quad (1.7)$$

то метод обобщения заключается в переходе от этого потенциала к «обобщенному» комплексному потенциалу вида

$$W = \sum d'_\nu f_\nu(\tau_0) \psi'_\nu(\tau) e^{-i\nu\theta} \quad (\tau < \tau_0) \quad (1.8)$$

Здесь τ_0 отвечает набегающему потоку, а $\psi_\nu(\tau) = \tau^{1/2\nu} F(a_\nu, b_\nu, \nu + 1; \tau)$ — известная в газовой динамике функция Чаплыгина [2]. F — гипергеометрическая функция с параметрами $a_\nu + b_\nu = \nu - \beta$; $a_\nu b_\nu = -1/2 \nu(\nu + 1)$.

«Обобщающая» функция $f_\nu(\tau_0)$ должна обеспечить при $\tau, \tau_0 \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow 0$) переход $W \rightarrow W_i$, т. е.

$$f_\nu(\tau_0) \sim \tau_0^{-\nu/2} \quad \text{при } \tau_0 \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

чего, конечно, недостаточно для единственности «обобщения». Основная трудность описанного метода состоит в аналитическом продолжении ряда (1.8) в область $\tau > \tau_0$, т. е. вниз по течению за EN . А. Макки и Д. Пэку^[9] удалось преодолеть эту трудность на основе простейшего выбора $f_\nu(\tau_0) = e^{-\nu s_0}$, где

$$S = \sigma + \tau_s^{-1/2} \operatorname{ar th} \left(\frac{\tau_s - \tau}{1 - \tau} \right)^{1/2} - \operatorname{ar th} \left(\frac{1 - \tau/\tau_s}{1 - \tau} \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

$$\sigma = -\tau_s^{-1/2} \operatorname{ar th} \tau_s^{1/2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \beta \right)$$

Проведенные нами исследования полученного таким образом течения показали, что соответствующая функция тока в предельном случае звукового обтекания не обладает требуемой особенностью Ф. И. Франкля^[1]. Кроме того, авторами^[9] произведено обобщение несжимаемого потока, обтекающего не конечный профиль, а полутело, составленное из конечного равнобокого клина с продолжением в виде полубесконечной пластинки.

В настоящей работе сформулированная вначале задача об обтекании конечного ромба сжимаемым потоком будет решаться в приближенной постановке на базе точного уравнения (1.1). А именно, рассмотрим особенность, отвечающую набегающему потоку в бесконечности совместно с граничными условиями (1.2), (1.3) и (1.4). Причем использование точного уравнения (1.1) позволяет рассматривать ромб произвольного угла раствора, т. е. произвольной относительной толщины. Вполне понятно, это решение не будет единственным, ибо остались неудовлетворенными условия в сверхзвуковой области. Для решения поставленной задачи мы воспользуемся опять-таки методом обобщения несжимаемого потока. При этом, чтобы избавиться от главного недостатка решения А. Макки и Д. Пэка^[9], наложим на $f_\nu(\tau_0)$ новое требование наряду с (1.9). «Обобщающая» функция, оставаясь по возможности простой, должна давать при звуковом обтекании такую функцию тока, которая обладает особенностью Франкля^[1], т. е. имеет вид:

$$\Psi^*(\tau, \theta) \sim \Sigma \nu^{3/2} \frac{\psi_\nu(\tau)}{\psi_\nu(\tau_s)} \sin \nu \theta \quad (1.11)$$

Кроме того, для околосвуковых значений τ_0 функция $f_\nu(\tau_0)$ должна обеспечить «обобщенное» течение, отвечающее околосвуковому закону подобия^[14]. Этим мы определим вполне приемлемый путь приближения τ_0 к τ_s . Таким образом, указанный метод дает правильные режимы обтекания на концах интервала изменения τ_0 $[0, \tau_s]$. Отсюда следует ожидать, что характер особенности будет довольно реально определен и внутри диапазона $f_\nu(\tau_0)$. Как будет показано дальше, всем наложенным на $f_\nu(\tau_0)$ условиям можно удовлетворить, выбрав ее в следующем виде:

$$f_\nu(\tau_0) = e^{-\nu s_0} \left\{ 1 + \frac{B \nu / \xi - 1}{1 + \zeta \nu} \right\} \quad \left(\zeta = \frac{\sigma - s_0}{2\pi} \right) \quad (1.12)$$

где B — произвольная постоянная, а множитель $(2\pi)^{-1}$ взят для удобства вычислений.

§ 2. Обтекание ромба дозвуковым потоком газа. Задачу о симметричном обтекании ромба (фиг. 1) потоком несжимаемой жидкости со скоростью на бесконечности w_0 можно решить при помощи конформного отображения. В результате применения интеграла Кристоффеля — Шварца находим комплексный потенциал

$$W_i = c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^\xi}} \right\} \quad \left(\vartheta = \frac{w}{w_0} e^{-i\theta} \right)$$

Здесь c^2 — неопределенная постоянная. Разлагая в ряд, получим

$$W_i^{(1)} = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \vartheta^{n\xi} \quad |\vartheta| < 1 \quad (w < w_0) \quad (2.1)$$

Символ $(2n-1)!!$ означает произведение нечетных чисел. Этот ряд сходится и на окружности $|\vartheta| = 1$, за исключением точки $\vartheta = 1$, которая, являясь особой, соответствует потоку в бесконечности. Отсюда согласно методу обобщения (1.8) и (1.12) будем иметь «обобщенный» комплексный потенциал

$$W^{(1)} = -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(1 + \frac{Bn-1}{1+\zeta n\xi} \right) e^{-n\xi(s_0+i\theta)} \psi_{n\xi}(\tau) \quad (2.2)$$

и функцию тока

$$\Psi^1(\tau, \theta) = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{B/\xi + \zeta}{1 + \zeta n\xi} n\xi e^{-n\xi s_0} \psi_{n\xi}(\tau) \sin \quad (2.3)$$

Эти ряды сходятся при $\tau < \tau_0$ ($s < s_0$). Если учесть, что $e^{s_0} \rightarrow \tau_0^{1/2}$ для $\tau_0 \rightarrow 0$ ($S_0 \rightarrow -\infty$), то легко получить

$$f_v(\tau_0) \sim \tau_0^{-\nu/2} [1 + O(s_0^{-1})] \quad \text{при } \tau_0 \rightarrow 0,$$

т. е.

$$W^{(1)} \rightarrow W_i^{(1)} \quad \text{при } \tau_0 \rightarrow 0$$

и требование (1.9) выполнено. Случаи околосзвуковой и звуковой ($\tau_0 = \tau_s$) скорости набегающего потока будут специально рассмотрены ниже. Здесь же мы только отметим, что, как показано в § 3, (2.3) обладает в точке $(\tau_s, 0)$ особенностью Франкля [1] (1.11). Кроме того, построенная функция тока удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3), т. е. ось симметрии и стенка ромба служат одной линией тока. Далее использование уравнений Чаплыгина [2]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1-\tau/\tau_s}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (\varphi \text{ — потенциал скорости}) \quad (2.4)$$

и формул [перехода [2]

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\cos \theta}{w} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{w} d\Psi \\ [dy &= \frac{\sin \theta}{w} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{w} d\Psi \quad (\rho \text{ — плотность}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

вдоль оси симметрии ($\theta = 0$) дает

$$x|_{\theta=0} = -\frac{1}{w_{\max}} \int_0^\tau \frac{1-\tau/\tau_s}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

Так как при этом $0 \leq \tau < \tau_0$, то, внося сюда (2.3) и вычисляя появляющиеся интегралы аналогично работе [2], будем иметь распределение

скоростей перед ромбом:

$$x|_{\theta=0} = \frac{-c^2}{w_{\max}} \left(\frac{B}{\xi} + \frac{\sigma - s_0}{2\pi} \right) E(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{n^2 \xi^2 e^{-n\xi s_0}}{n\xi^2 - 1} \frac{G_{n\xi}(\tau)}{1 + \zeta n \xi} \quad (2.6)$$

$$\left(E(\tau) = \frac{1}{V\tau(1-\tau)^\beta}, \quad G_\nu(\tau) = \psi_\nu(\tau) + 2\tau\psi'_\nu(\tau) \right)$$

Чтобы показать $x(\tau_0) \rightarrow -\infty$ при $\theta \rightarrow 0$, обратимся к асимптотическому поведению функций Чаплыгина. [М. Лайтхиллом [18] получена формула

$$\psi_\nu(\tau) = \left[\frac{(1-\tau)^{2\beta+1}}{1-\tau/\tau_s} \right]^{1/4} e^{\nu s} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|\nu|}\right) \right\} \quad (2.7)$$

которая справедлива при $|\nu| \rightarrow \infty$, $0 < \tau < \tau_s$ и для всей комплексной плоскости ν , исключая круги произвольно малого радиуса с центрами $\nu_n = -n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$). Для тех же τ и действительных ν нами [16] найдено асимптотическое соотношение

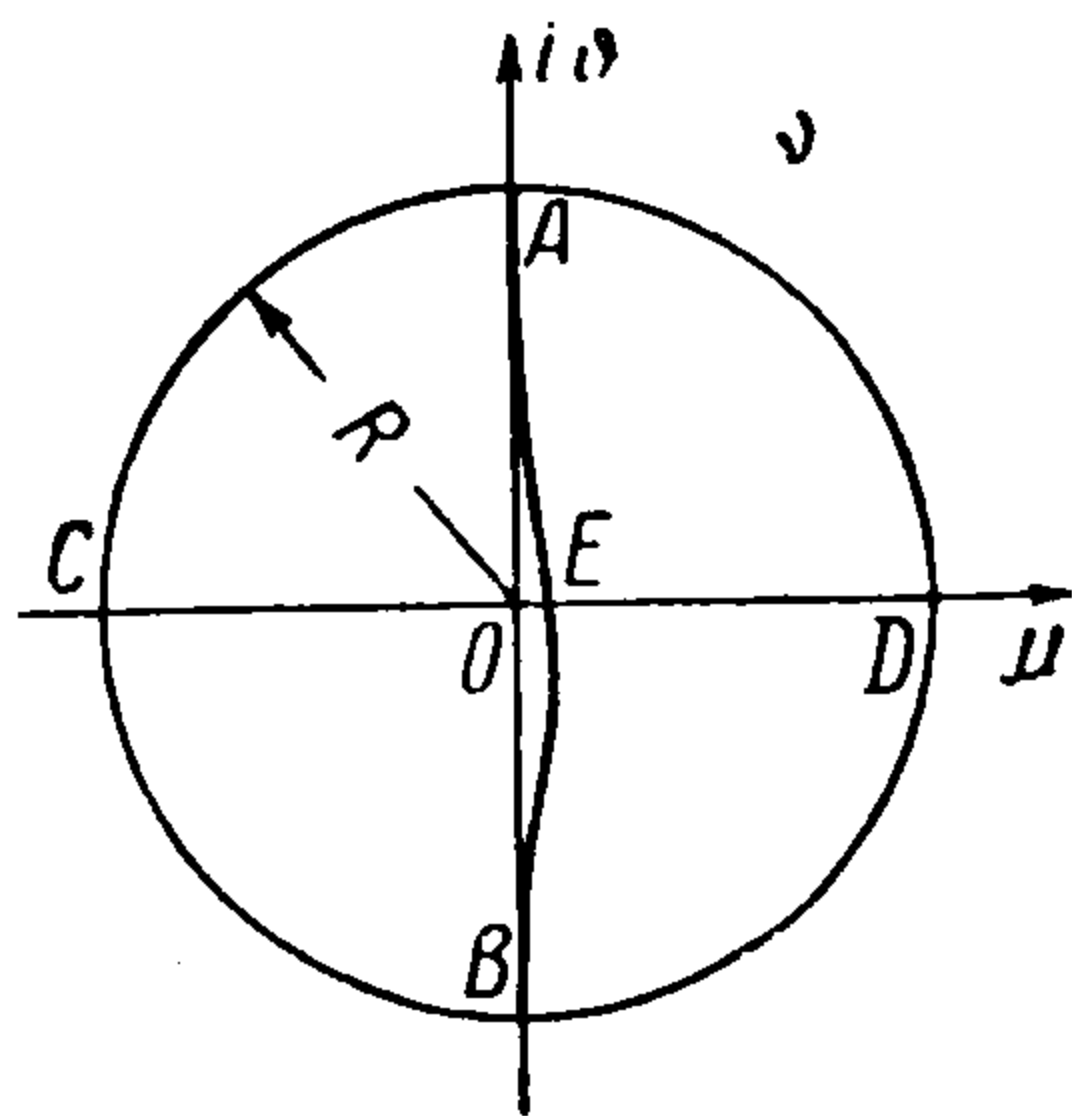
$$2\tau\psi'_\nu(\tau) = \nu \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s} \right)^{1/4} (1-\tau)^{\beta/2-1/4} e^{\nu s} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|\nu|}\right) \right\} \quad (2.8)$$

Кроме того, применяя формулу Стирлинга [10], имеем ($n \rightarrow \infty$)

$$\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = \frac{1}{V\pi n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (2.9)$$

Подстановка всего найденного в (2.6), как и следовало ожидать, приводит к расходимости ряда. Таким образом, $x(\tau) \rightarrow -\infty$ при $\theta \rightarrow 0$ и (2.3) определяет вполне физически возможное течение. Остается однозначно связать плоскости xu и $\tau\theta$, что достигается выполнением условия (1.4), определяющего c^2 . А для этого нужно знать функцию тока $\Psi(\tau, \theta)$ в диапазоне $[0, \tau_s]$. Но точка $\tau = \tau_0$, $\theta = 0$ является особой, в результате чего область сходимости ряда (2.3) ограничена окружностью $\tau = \tau_0$ на плоскости годографа или кривой EN на физической плоскости. Поэтому предварительно требуется аналитически продолжить ряд (2.3) через окружность $\tau = \tau_0$. В этом как раз и заключается основная трудность применяемого метода.

§ 3. Аналитическое продолжение ряда (2.3) в область $\tau > \tau_0$. Аналитическое продолжение проводится подбором вспомогательного интеграла типа Барнеса [10]. Рассмотрим



Фиг. 3

$$W = \frac{c^2}{2\pi^{3/2} i} \left(\frac{B}{\xi} + \frac{\sigma - s_0}{2\pi} \right) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma\left(1 - \frac{\nu}{\xi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\xi}\right) \times$$

$$\times \frac{\exp[-\nu(s_0 + i\theta) + i\nu\delta]}{1 + \zeta\nu} \Psi_\nu(\tau) d\nu \quad (3.1)$$

где путь интегрирования AEB выбирается так, чтобы простые полюсы $n\xi$ ($n = 1, 2, \dots$) располагались правее, а все остальные левее этого пути.

С целью исключения возможности появления полюсов второго порядка будем считать ξ иррациональным, а s_0 таким, чтобы $\zeta = (\sigma - s_0)/2\pi$ не совпадало с $n + 1$ и $(n - 1/2)\xi$. Тогда слева от AEB подынтегральное

выражение (3.1) $J(\nu, \theta, \tau)$ имеет простые полюсы в точках $\nu = -(n+1)$, $\nu = -(n-1/2)\xi$ и $\nu = -2\pi/(\sigma - s_0)$. Покажем, что (3.1) при $\tau < \tau_0$ превращается в (2.2). Для этого замкнем путь AEB полуокружностью ADB радиуса $R = N\xi + 1/2$, расположенной справа от мнимой оси и не содержащей особых точек при N — целом (фиг. 3). Оценивая $J(\nu, \theta, \tau)$ на полуокружности ADB большого радиуса $|\nu| = R \rightarrow \infty$ при помощи асимптотики гамма-функций [10] и (2.7), легко получить

$$|J(\nu, \theta, \tau)| \sim \frac{4\pi^2}{\sigma - s_0} (R\xi)^{-1/2} \exp\{\mu(s - s_0) - \vartheta(\delta \pm \delta - \theta)\}$$

где минус для $\vartheta < 0$, а плюс для $\vartheta > 0$.

Таким образом, интеграл (3.1) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ и $\tau < \tau_0$, $0 < \theta < 2\gamma$. Поэтому теорема о вычетах [10] для области $AEBDA$ дает

$$W = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(1 + \frac{Bn-1}{1+\zeta n\xi}\right) \exp\{-n\xi(s_0 + i\theta)\} \psi_{n\xi}(\tau) = W^{(1)}$$

Полученный ряд сходится для любых θ и $\tau < \tau_0$. С другой стороны, дополним путь интегрирования AEB полуокружностью ACB того же радиуса, расположенной слева от мнимой оси. Тогда аналогично можно показать, что интеграл (3.1) на кривой ACB исчезает при $R \rightarrow \infty$, для $\tau_0 < \tau < \tau_s$ и $0 < \theta < 2\delta$ и теория вычетов приводит к следующему:

$$W^{(2)} = -c^2 \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{(n+1/2)\psi_{-(n+1/2)\xi}(\tau)}{1-(n+1/2)\xi/z} \exp\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi(s_0 + i\theta)\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}} \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma\left(1+\frac{n}{\xi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{\xi}\right) \frac{nC_n\psi_n(\tau)}{1-n/z} \exp[n(s_0 + i(\theta - \delta))]\right\} \left(B + \frac{\xi}{z}\right) - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1+\frac{z}{\xi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{\xi}\right) \frac{z}{\xi} \exp[s_0 + i(\delta - \theta)] z\psi_{-z}(\tau)$$

Здесь ¹ $\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = 1$ при $n=0$, $\frac{2\pi}{\sigma - s_0} = z$

Отсюда функция тока для $\tau > \tau_0$ имеет вид:

$$\psi^{(2)}(\tau, \theta) = -c^2 \left(B + \frac{\xi}{z}\right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{(n+1/2)}{1-(n+1/2)\xi/z} \exp\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\xi}{z}\right] \times \right. \\ \times \psi_{-(n+1/2)\xi}(\tau) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\theta - \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}} \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma\left(1+\frac{n}{\xi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{\xi}\right) \frac{nC_n}{1-n/z} e^{ns_0} \times \\ \times \psi_n(\tau) \sin n(\delta - \theta) - 2\sqrt{\pi} \Gamma\left(1+\frac{z}{\xi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{\xi}\right) \frac{\exp(zs_0)}{(\sigma - s_0)\xi} \psi_{-z}(\tau) \times \\ \left. \times \sin\left(2\pi\frac{\delta - \theta}{\sigma - s_0}\right) \right\} \quad (3.2)$$

и, как непосредственно видно, удовлетворяет условию (1.3). Причем ряд сходится для любых θ и $\tau_0 < \tau < \tau_s$. В частном случае $\tau_0 = \tau_s$, используя асимптотику [18], можно показать, что интеграл (3.1) имеет смысл в характеристическом треугольнике KPB' с дугой 2δ (фиг. 2).

¹ Вычет $\psi_\nu(\tau)$ в полюсе $\nu = -n$ равен $-nC_n\psi_n(\tau)$, где

$$C_n = \frac{\Gamma(a_n)\Gamma(n-b_n+1)}{\Gamma(a_n-n)\Gamma(1-b_n)\Gamma^2(n+1)}$$

Чтобы найти распределение скоростей на переднем скате ромба, интегрируем (2.5) вдоль $\theta = \delta$; после подстановки (2.3) и (3.2) имеем для $0 \leq \tau \leq \tau_0$

$$x^1(\tau, \tau_0) = \frac{c^2}{w_{\max}} \cos \delta \left(B + \frac{\xi}{z} \right) E(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{n^2 \xi e^{-n\xi s_0}}{n^2 \xi^2 - 1} \frac{G_{n\xi}(\tau)}{1 + n\xi/z}$$

для $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_s$

$$\begin{aligned} x^{(2)}(\tau, \tau_0) &= \frac{c^2}{w_{\max}} \cos \delta \left(B + \frac{\xi}{z} \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{1}{(n+1/2)^2 \xi^2 - 1} \times \right. \\ &\times \frac{(n+1/2)^2 \xi \exp[(n+1/2)\xi]/s_0}{1 - (n+1/2)\xi/z} [E(\tau) G_{-(n+1/2)\xi}(\tau) - E(\tau_0) G_{-(n+1/2)\xi}(\tau_0)] + \\ &+ \frac{1}{\xi V \pi} \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\xi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{\xi}\right) \frac{n^2 C_n e^{ns_0}}{(1 - n/z)(n^2 - 1)} [E(\tau) G_n(\tau) - E(\tau_0) G_n(\tau_0)] - \\ &- \frac{1}{\xi V \pi} \Gamma\left[1 + \frac{2\pi}{\xi(\sigma - s_0)}\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{z}{\xi}\right] \frac{e^{zs_0}}{1 - z^{-2}} [E(\tau) G_{-z}(\tau) - E(\tau_0) G_{-z}(\tau_0)] \left. \right\} + \\ &+ x^{(1)}(\tau_0, \tau_0) \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда, выполняя условие (1.4), получаем уравнение $x^{(2)}(\tau_s, \tau_0) = l$ для определения c^2 . Просуммировав коэффициент местного давления

$$C_p = \frac{p - p_1}{1/2 \rho_1 w_0^2} = \frac{1 - \tau_0}{(\beta + 1) \tau_0} \left\{ \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_0} \right)^{\beta+1} - 1 \right\}$$

(p_1, ρ_1 — давление и плотность набегающего потока) вдоль щеки ромба OA , находим коэффициент лобового давления на единицу размаха крыла:

$$C_x = \frac{\text{tg } \delta}{l} \left[\int_0^{\tau_0} C_p \frac{dx^{(1)}}{d\tau} d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau_s} C_p \frac{dx^{(2)}}{d\tau} d\tau \right]_{\theta = \pi/\xi}$$

Интеграция последнего по частям и подстановка (3.3) дают

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{\kappa - 1}{\kappa} \text{tg } \delta \frac{1 - \tau_0}{\tau_0} \left\{ \left(\frac{1 - \tau_s}{1 - \tau_0} \right)^{\beta+1} - 1 \right\} + \\ &+ \frac{c^2}{w_{\max}} \left(B + \frac{\xi}{z} \right) \frac{2 \sin \delta}{l \tau_0 (1 - \tau_0)^\beta} \left\{ V \tau_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{n \xi e^{-n\xi s_0}}{n^2 \xi^2 - 1} \frac{n \psi_{n\xi}(\tau_0)}{1 + n\xi/z} + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{(n+1/2)^2 \xi e^{(n+1/2)\xi s_0}}{(n+1/2)^2 \xi^2 - 1} \frac{1}{1 - z^{-1} (n+1/2)\xi} \left[V \tau_s \psi_{-(n+1/2)\xi}(\tau_s) - \right. \\ &- V \tau_0 \psi_{-(n+1/2)\xi}(\tau_0) + \frac{E(\tau_0)}{2(\beta+1)} G_{-(n+1/2)\xi}(\tau_0) ((1 - \tau_s)^{\beta+1} - (1 - \tau_0)^{\beta+1}) \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{\xi V \pi} \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\xi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{\xi}\right) \frac{n^2 C_n e^{ns_0}}{(n^2 - 1)(1 - n/z)} \left[V \tau_s \psi_n(\tau_s) - V \tau_0 \psi_n(\tau_0) + \right. \\ &+ \frac{E(\tau_0)}{2(\beta+1)} G_n(\tau_0) ((1 - \tau_s)^{\beta+1} - (1 - \tau_0)^{\beta+1}) \left. \right] - \\ &- \frac{1}{\xi V \pi} \Gamma\left[1 + \frac{2\pi}{(\sigma - s_0)\xi}\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{(\sigma - s_0)\xi}\right] \frac{e^{zs_0}}{1 - z^{-2}} \left[V \tau_s \psi_{-z}(\tau_s) - V \tau_0 \psi_{-z}(\tau_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{E(\tau_0)}{2(\beta+1)} G_{-z}(\tau_0) ((1 - \tau_s)^{\beta+1} - (1 - \tau_0)^{\beta+1}) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Расчеты (3.3) производились [19, 20] для $\xi = 11.6129$ и $\tau = 0.8, 0.12$, чему соответствуют ромб с углом раствора $2\gamma = 31^\circ$ и число Маха набегающего потока $M_0 = 0.660, 0.826$. Результаты нанесены на фиг. 4.

§ 4. Обтекание ромба потоком газа со скоростью звука на бесконечности. В предельном случае, когда $\tau_0 = \tau_s (s_0 = \sigma)$, функция тока (2.3) принимает вид:

$$\psi^*(\tau, \theta) = c^2 B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} n e^{-n\xi\sigma} \psi_{n\xi}(\tau) \sin(n\xi\theta) \quad (4.1)$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно для $0 \leq \tau < \tau_s$ и любых θ и имеет особенность в точке $\tau = \tau_s, \theta = 0$. С целью выяснения ее характера совершим тождественное преобразование:

$$\begin{aligned} \Psi^*(\tau, \theta) = c^2 B \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} n e^{-n\xi\sigma} \psi_{n\xi}(\tau) - \frac{\alpha \xi^{1/2}}{\sqrt{\pi}} n^{1/2} \frac{\psi_{n\xi}(\tau)}{\psi_{n\xi}(\tau_s)} \right\} \times \\ \times \sin(n\xi\theta) + c^2 B \xi^{1/2} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2} \times \frac{\psi_{n\xi}(\tau)}{\psi_{n\xi}(\tau_s)} \sin(n\xi\theta) \end{aligned}$$

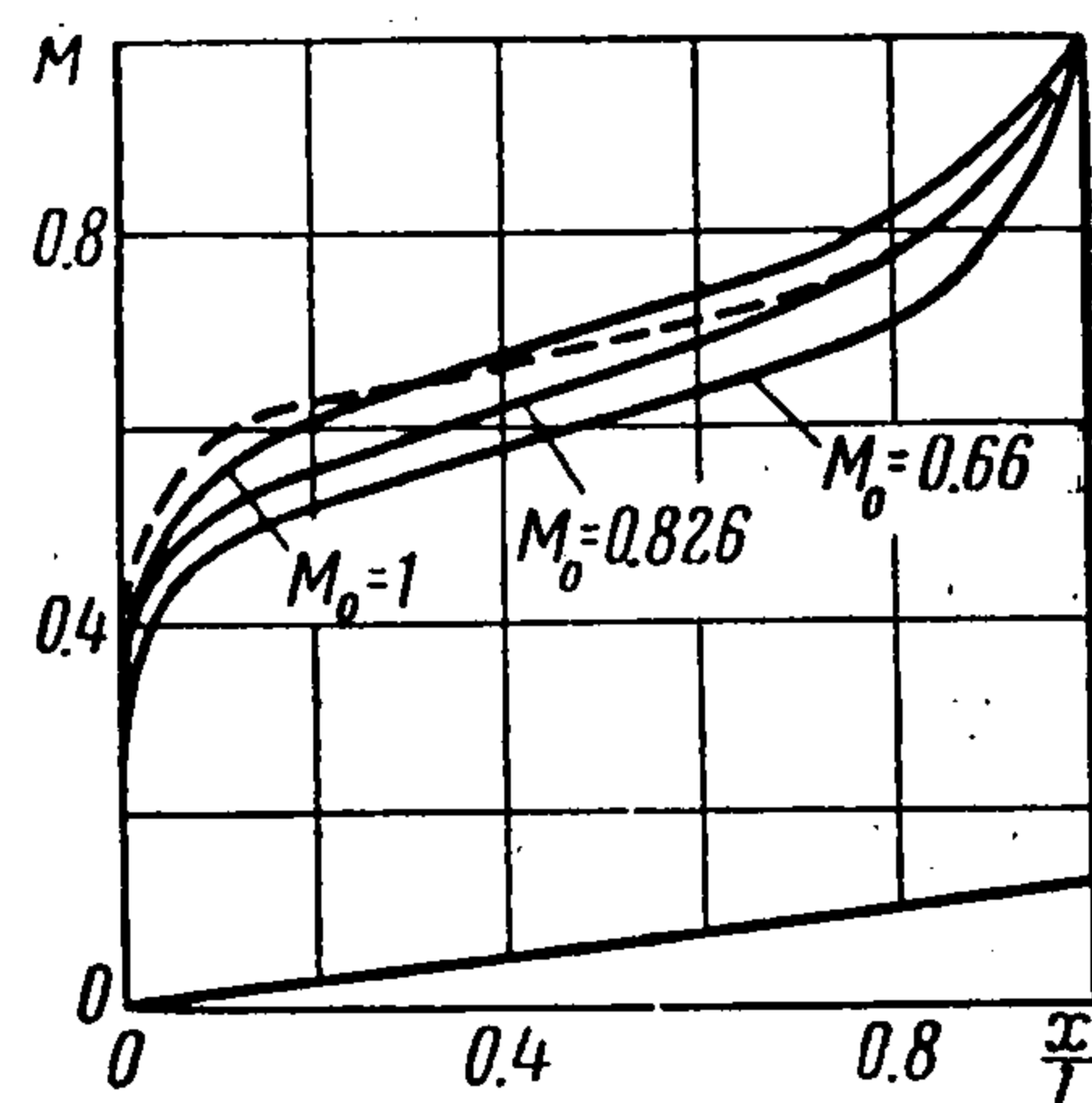
Здесь

$$\alpha = 2^{2(x-1)} (x+1)^{-\frac{x+2}{6(x-1)}} \frac{1}{\pi^{1/2}} 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \quad (4.2)$$

есть коэффициент в выведенных нами [16] асимптотических ($\nu \rightarrow +\infty$) формулах, которые для околосвуковых τ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_\nu(\tau) = \alpha \nu^{1/2} e^{\nu\sigma} \frac{v(\nu^{1/2}\eta)}{v(0)}, \quad 2\tau\psi'_\nu(\tau) = -\alpha(x+1)^{1/2} \nu^{1/2} e^{\nu\sigma} \frac{v'(\nu^{1/2}\eta)}{v(0)} \\ \psi_{-\nu}(\tau) = \alpha \nu^{1/2} e^{-\nu\sigma} \left\{ \frac{1}{2\nu^2(0)} [v(0)u(\nu^{1/2}\eta) - u(0)v(\nu^{1/2}\eta)] + \frac{v(\nu^{1/2}\eta)}{2v(0)} (\sqrt{3} + \text{ctg } \nu\pi) \right\} \\ 2\tau\psi'_{-\nu}(\tau) = -\alpha(x+1)^{1/2} \nu^{1/2} e^{-\nu\sigma} \left\{ \frac{1}{2\nu^2(0)} [v(0)u'(\nu^{1/2}\eta) - u(0)v'(\nu^{1/2}\eta)] + \right. \\ \left. + \frac{v'(\nu^{1/2}\eta)}{2v(0)} (\sqrt{3} + \text{ctg } \nu\pi) \right\} \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь $u(s)$ и $v(s)$ — два линейно-независимых решения уравнения Эйри $U''(s) - sV(s) = 0$, табулированные В. А. Фоком [11]. Если воспользоваться (2.9), то сходимость первого ряда (4.2) при $\tau = \tau_s$ будет видна. Отсюда интересующая нас особенность целиком представляется вторым рядом, который совпадает с главным членом особого решения Ф. И. Франкля [1] (1.11). Таким образом, хотя в приближенной постановке задачи условия в сверхзвуковой области течения остаются неудовлетворенными, особенность, которая соответствует набегающему звуковому потоку, оказывается выбранной правильно. Поэтому [1] функция тока (4.1) регулярна на характеристиках $B'F$ (фиг. 2) и определяет течение, где все линии тока пересекают звуковую линию. Полагая в $x^{(1)}(\tau, \tau_0)$ из (3.3) $\tau = \tau_s (s_0 = \sigma)$, получим формулу распределения скоростей на переднем скате ромба. Причем



Фиг. 4

условие (1.4) для определения масштабного коэффициента c^2B следует в рассматриваемом случае понимать в предельном смысле:

$$\left(\frac{c^2B \cos \delta}{w_{\max}}\right)^{-1} = \frac{E(\tau_s)}{l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{n^2 \xi}{n^2 \xi^2 - 1} e^{-n\xi\sigma} G_{n\xi}(\tau_s - \varepsilon)$$

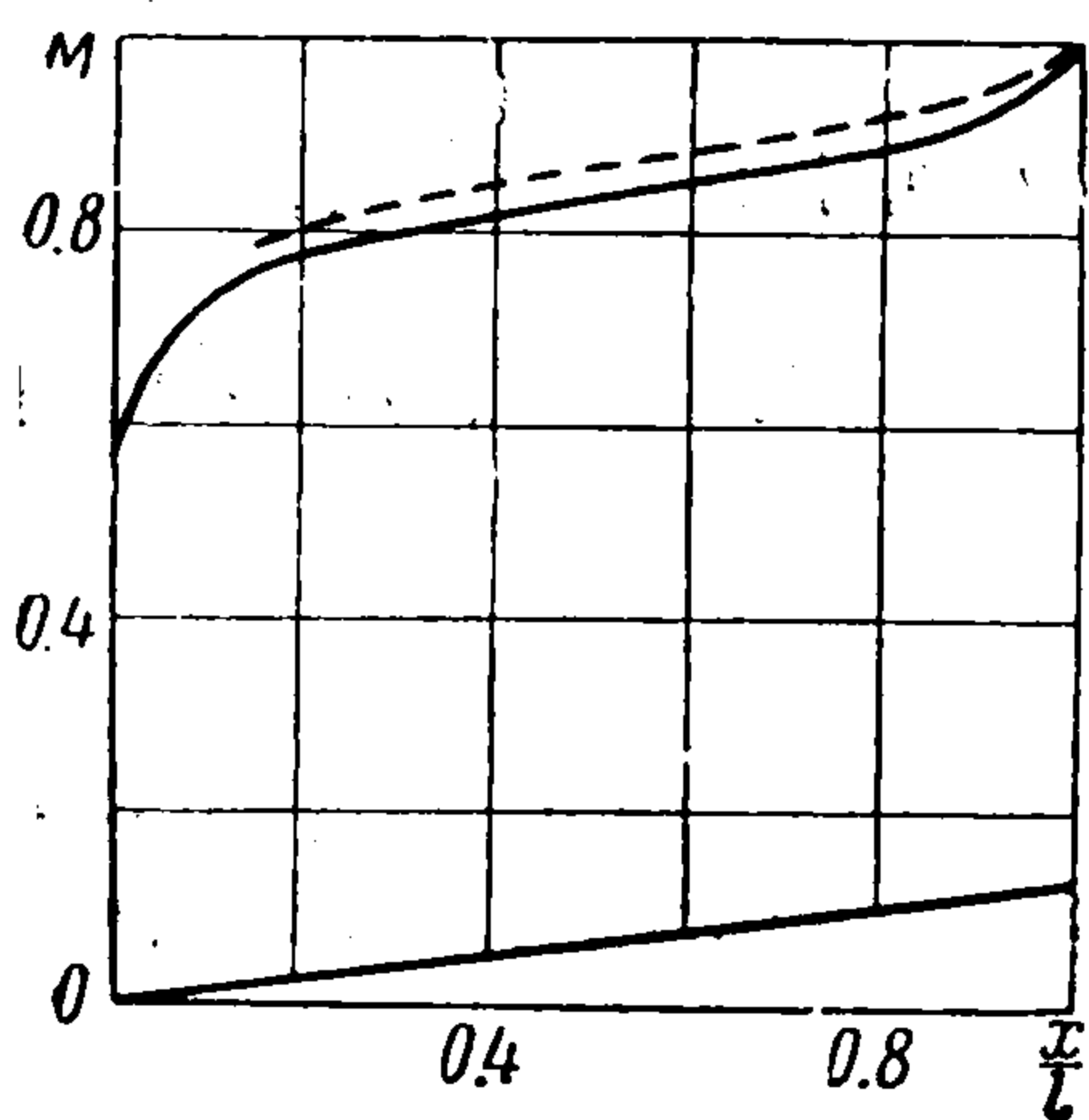
Чтобы осуществить переход к пределу, приведем последнее к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{c^2B \cos \delta}{w_{\max}}\right)^{-1} &= \frac{E(\tau_s)}{l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{n^2 \xi}{n^2 \xi^2 - 1} e^{-n\xi\sigma} \times \right. \\ &\quad \times G_{n\xi}(\tau_s - \varepsilon) + \frac{\alpha(\kappa+1)^{1/3} n^{1/3}}{\xi^{1/3} \pi^{1/2} V(0)} v \left[n^{2/3} \xi^{2/3} \frac{(\kappa+1)^{4/3}}{2(\kappa-1)} \varepsilon \right] \left. - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha E(\tau_s) (\kappa+1)^{1/3}}{l V \pi \xi^{2/3} v(0)} \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{2/3} v'(n^{2/3} \xi^{2/3} \eta) \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

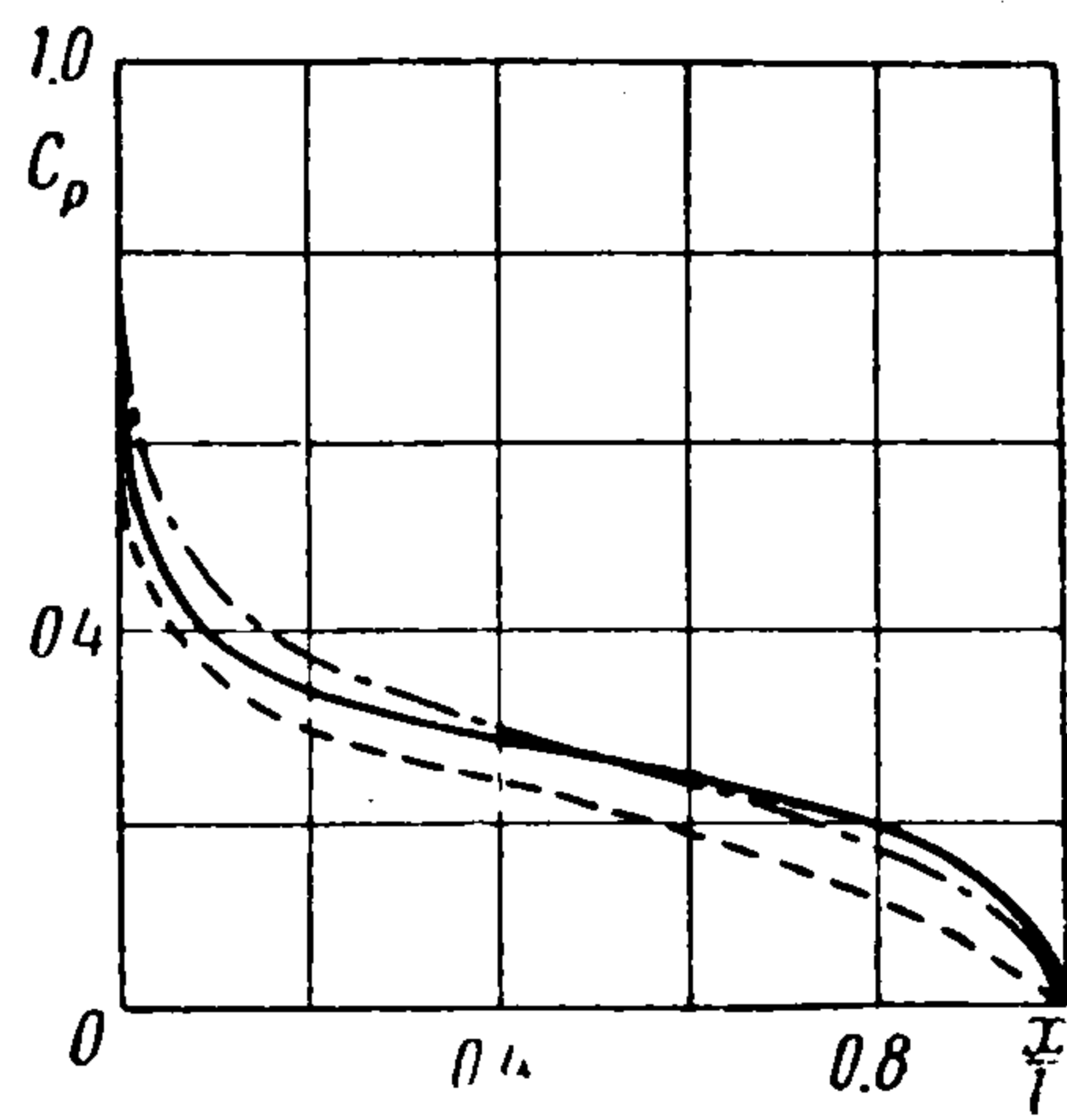
Если применить (2.9) и (4.3), то можно убедиться в справедливости перестановки знака \lim и Σ для первого ряда. Последний же предел был вычислен нами [3] раньше:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{2/3} v'(n^{2/3} \xi^{2/3} \eta) = -v'(0) (2^{4/3} - 1) \zeta\left(-\frac{1}{3}\right) \quad (4.5)$$

где ζ — дзета-функция [10]. Отсюда (4.4) и (4.5) определяют c^2B . Что касается коэффициента лобового давления, то он находится из (3.4) простой подстановкой $\tau_0 = \tau_s$.



Фиг. 5



Фиг. 6

Кривая распределения скоростей на ромбе $\xi = 11.6129$ ($\delta \approx 15^\circ.5$) в случае звукового обтекания приводится на фиг. 7. Там же нанесены (пунктиром) результаты Л. В. Овсянникова [8] для ромба $\delta = 15^\circ$.

Если исследуется обтекание тонкого ромба, то ξ велико и функции Чаплыгина можно заменить их асимптотическими представлениями (4.3), т. е.

$$x^*(\tau) = \frac{c^2B}{w_{\max}} \frac{E(\tau)}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} e^{-n\xi\sigma} G_{n\xi}(\tau) \quad (4.6)$$

$$C_x^* = \left[\frac{c^2B \alpha (\kappa+1)^{1/3}}{w_{\max} \xi^{1/3} l V \tau_s (1-\tau_s)} \right] \left[\frac{\delta^{5/3}}{(\kappa+1)^{2/3}} \right] \frac{2}{\pi^{2/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)!!}{n^{5/3} 2^n n!} \quad (4.7)$$

где

$$\left[\frac{c^2 B \alpha (\kappa + 1)^{1/3}}{w_{\max} \xi^{1/3} l \sqrt{\tau_s} (1 - \tau_s)} \right]^{-1} = - \frac{v'(0)}{v(0)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} n^{1/2} - \frac{n^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \right] (-1)^{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{2^{1/2} - 1}{\sqrt{\pi}} \zeta \left(-\frac{1}{3} \right) \right\}$$

Графики распределения скоростей и давлений на ромбе 10%-ной относительной толщины даны соответственно на фиг. 5 и 6. С целью сравнения на них пунктиром нанесены результаты эксперимента [17], на фиг. 6 еще и результаты теоретического исследования Гудерлея [7] для ромба той же самой толщины. Относительно C_x^* заметим, что (4.7) дает

$$C_x^* = 1.77 \frac{\delta^{5/3}}{(\kappa + 1)^{1/3}} \quad ; \quad \left(C_x^* = 1.75 \frac{\delta^{5/3}}{(\kappa + 1)^{1/3}} \right)$$

Здесь в скобках указан результат Гудерлея [7].

§ 5. Околовзвукое обтекание тонкого ромба. Чтобы получить из общих результатов § 3 случай обтекания тонкого ромба околовзвукowym потоком газа, нужно считать ξ^{-1} и $\tau_s - \tau_0$ малыми величинами. Последнее позволяет применить в (1.4) и (3.4) асимптотические формулы (4.3). Возникшие комбинации скорости набегающего потока $\tau_0(s_0)$ и угла ромба $\delta(\xi)$ выражаем через параметр околовзвукowego подобия

$$k_0 = \frac{1 - M_0^2}{[(\kappa + 1) \delta]^{3/2}}$$

Далее, чтобы коэффициент лобового давления отвечал закону трансзвукового подобия [14], т. е. имел вид:

$$C_x = \frac{\delta^{5/3}}{(\kappa + 1)^{1/3}} f(k_0)$$

отбросим в применяемой асимптотике (4.3) члены

$$\operatorname{ctg} \left(n + \frac{1}{2} \right) \xi \pi, \quad \operatorname{ctg} \frac{2\pi^2}{\sigma - s_0}$$

Тогда с точностью до ξ^{-1} и $\tau_s - \tau_0$ будем иметь

$$C_x = \left\{ \frac{c^2 (B + 1/3 k_0^{3/2}) \alpha (\kappa + 1)^{1/3}}{w_{\max} l \xi^{1/3} \sqrt{\tau_s} (1 - \tau_s)^\beta} \right\} \frac{\delta^{5/3}}{(\kappa + 1)^{1/3}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} n^{1/2} \times \right. \\ \times \frac{1}{1 + 1/3 n k_0^{3/2}} \exp \left(\frac{2}{3} n \pi k_0^{3/2} \right) v(n^{1/2} \pi^{1/2} k_0) + \frac{1}{2v(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{\exp \left[-2/3 (n + 1/2) \pi k_0^{3/2} \right]}{1 - 1/3 (n + 1/2) k_0^{3/2}} \left[\sqrt{3} v(0) - \frac{1}{v(0)} [v(0) u \{ (n + 1/2)^{1/2} \pi^{1/2} k_0 \} - \right. \\ \left. - u(0) v \{ (n + 1/2)^{1/2} \pi^{1/2} k_0 \}] - \sqrt{3} v \{ (n + 1/2)^{1/2} \pi^{1/2} k_0 \} \right] - \frac{3^{1/2} e^{-2\pi}}{2 \sqrt{\pi} v(0) k_0^{1/4}} \times \\ \left. \times \Gamma \left(1 + \frac{3}{k_0^{3/2}} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{k_0^{3/2}} \right) \left[\sqrt{3} v(0) - \frac{1}{v(0)} [v(0) u \{ (3\pi)^{1/2} \} - u(0) u \{ (3\pi)^{1/2} \}] - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{3} v \{ (3\pi^2)^{1/2} \} \right] \frac{2}{\pi^{1/2} v(0)} \right\}$$

где

$$\left\{ \frac{c^2 (B + 1/3 k_0^{3/2}) \alpha (\kappa + 1)^{1/3}}{w_{\max} l \xi^{1/3} V \tau_s (1 - \tau_s)^\beta} \right\}^{-1} = \frac{-1}{v(0)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} v' (n^{2/3} \pi^{1/3} k_0) \times$$

$$\times \frac{n^{5/6} \exp(2/3 n \pi k_0^{3/2})}{1 + 1/3 n k_0^{3/2}} - \frac{1}{2v(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{(n+1/2)^{5/6}}{1 - 1/3 (n+1/2) k_0^{3/2}} \times$$

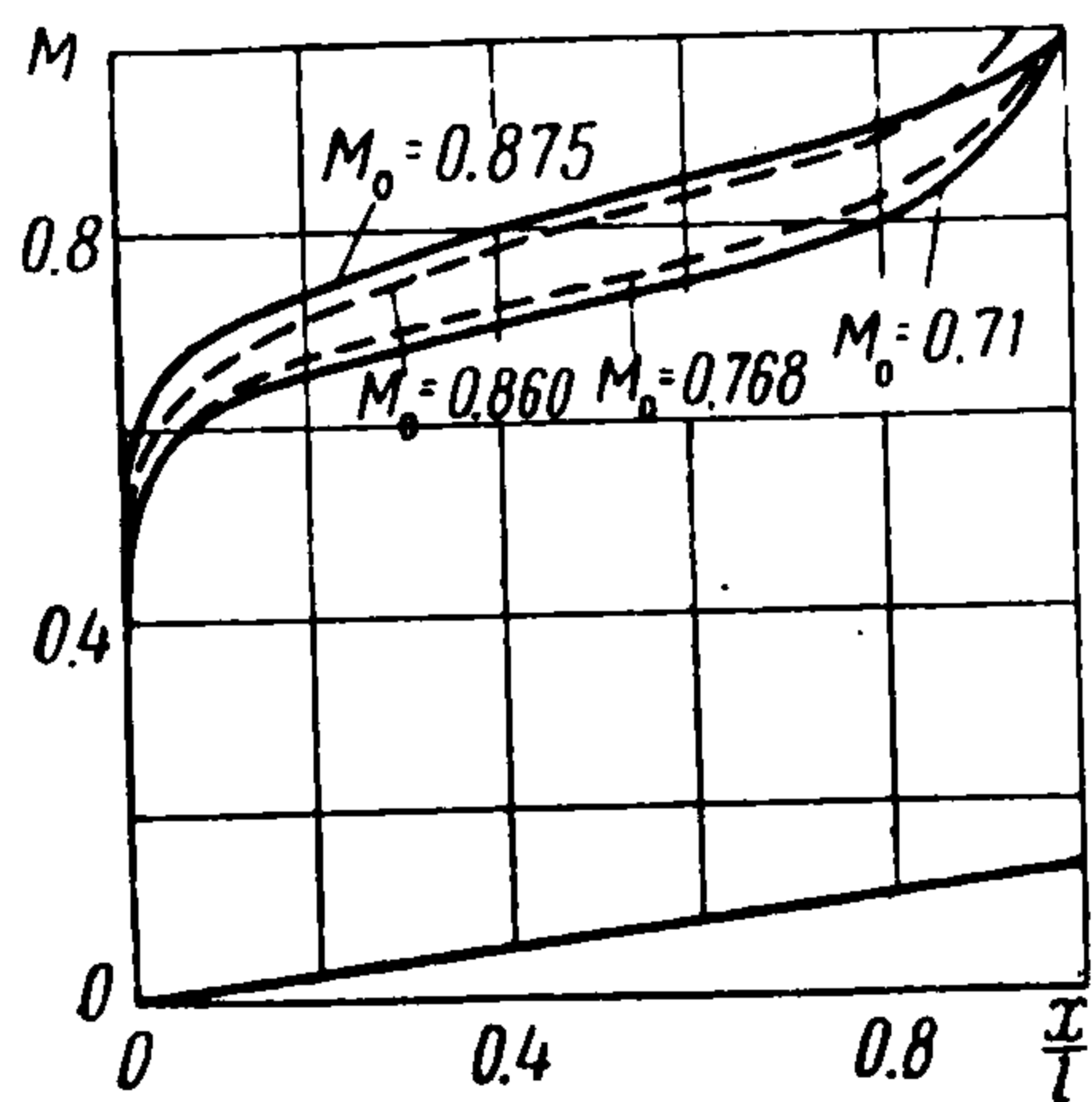
$$\times \exp \left[-\frac{2}{3} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi k_0^{3/2} \left\{ -\frac{1}{v(0)} \left[v(0) u' \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^{2/3} \pi^{1/3} k_0 \right] - u(0) \times \right. \right. \right.$$

$$\times v' \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^{2/3} \pi^{1/3} k_0 \right] \left. \left. + v'(0) \sqrt{3} + \frac{1}{v(0)} - \sqrt{3} v' \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^{2/3} \pi^{1/3} k_0 \right] \right\} + \right.$$

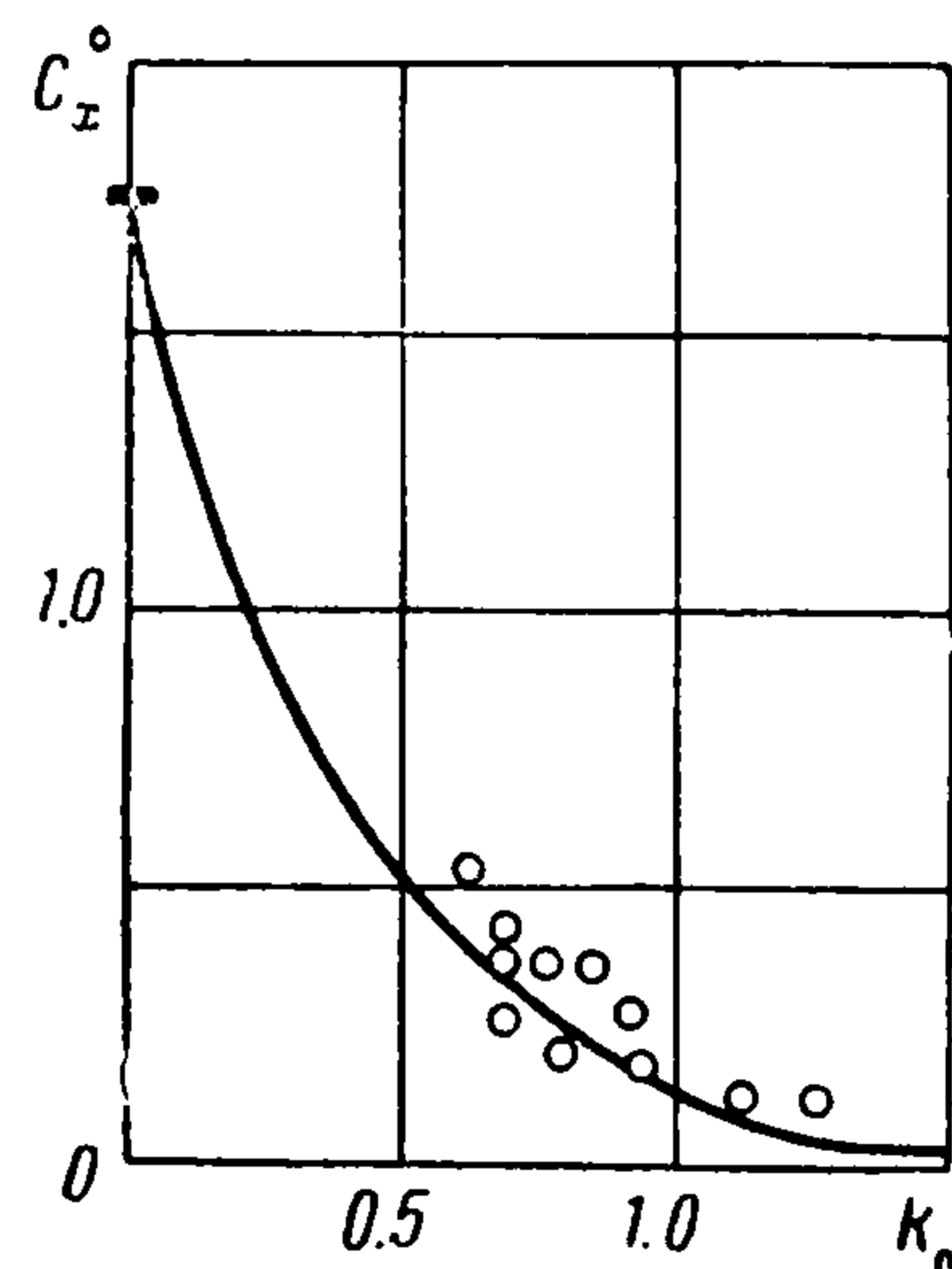
$$\left. + \frac{3^{5/6} e^{-2\pi}}{2 \sqrt{\pi} v(0) k_0^{5/4}} \Gamma(1 + 3k_0^{-3/2}) \Gamma\left(\frac{1}{2} - 3k_0^{-3/2}\right) \left\{ V'(0) \sqrt{3} + \frac{1}{v(0)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sqrt{3} v' \left[(3\pi)^{2/3} \right] - \frac{1}{v(0)} \left[v(0) u' \left[(3\pi)^{2/3} \right] - u(0) v' \left[(3\pi)^{2/3} \right] \right] \right\}$$

На фиг. 4 дано вычисленное нами распределение скоростей на ромбе $\delta = 7^\circ.5$. С целью сравнения (пунктиром) нанесены экспериментальные кривые [12] для клина ($\delta = 7^\circ.5$) с полубесконечной пластинкой. Фиг. 8



Фиг. 7



Фиг. 8

представляет $C_x^0 = C_x (\kappa + 1)^{1/3} / \delta^{5/3}$ как функцию k_0 и экспериментальные точки [12]. Кроме того, нами при помощи довольно громоздких выкладок показано, что для выведенных выше формул имеет место

$$\left. \frac{dC_x}{dk_0} \right|_{k_0=0} = -2 \frac{\delta^{5/3}}{(\kappa + 1)^{1/3}}, \quad \left. \frac{dM}{dM_0} \right|_{M_0=1} = 0$$

на поверхности ромба, где M — местное число Маха. Этот факт установлен экспериментально [12, 17].

Особый интерес в случае околосвукового режима обтекания представляет форма звуковой линии. Последняя позволяет судить о размерах и поведении местной сверхзвуковой зоны около точки А (фиг. 1). Интегрируя (2.5) вдоль $\tau = \tau_s$, находим с точностью до ξ^{-1} координаты линии перехода в системе с началом в точке А:

$$y_s = \frac{1}{a_* (1 - \tau_s)^\beta} \Psi^{(2)}(\tau_s, \theta), \quad x_s = \frac{2\tau_s}{a_* (1 - \tau_s)^\beta} \int_{\delta}^{\theta} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_s} d\theta \quad (5.1)$$

где a_* — критическая скорость звука. В рамках принятого приближения (2.11) примет вид:

$$\Psi^{(2)}(\tau, \theta) = -c^2 \left(B + \frac{1}{3} k_0^{3/2} \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{n+1/2}{1-1/3(n+1/2)k_0^{3/2}} e^{(n+1/2)\xi s_0} \times \right. \\ \times \Psi_{-(n+1/2)\xi}(\tau) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\theta - \frac{3}{V\pi k_0^{3/2}} \Gamma\left(1 + \frac{3}{k_0^{3/2}}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{k_0^{3/2}}\right) \times \\ \left. \times e^{2S_0} \psi_{-z}(\tau) \sin\left[\frac{3}{k_0^{3/2}}(\pi - \xi\theta)\right] \right\}$$

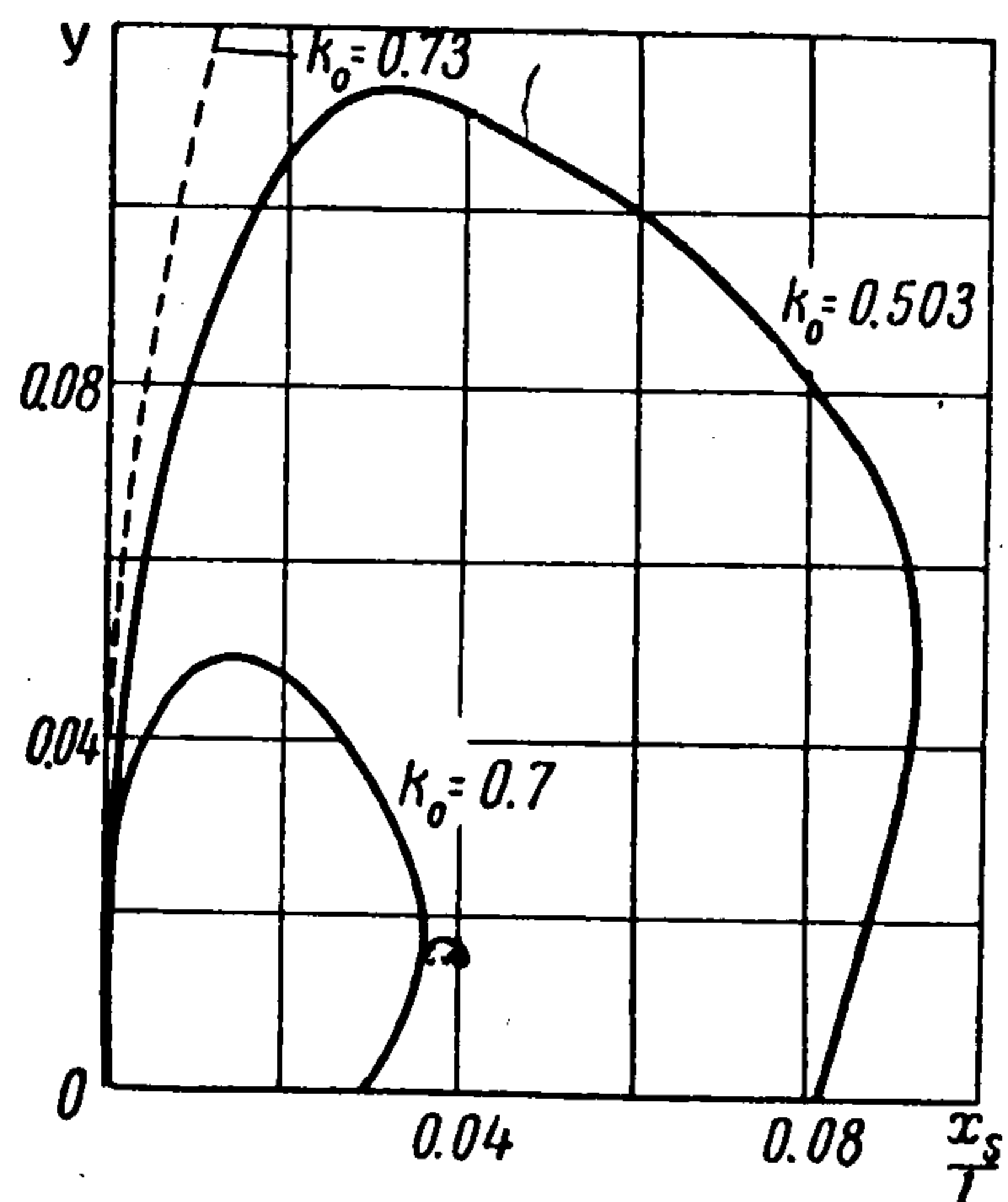
Внося последнее в (5.1) и применяя асимптотику (4.3), необходимо отбросить члены с $\text{ctg}(n+1/2)\xi\pi$ и $\text{ctg}[2\pi^2/(\sigma-s_0)]$, чтобы не нарушить закон трансзвукового подобия [4]. В результате будем иметь в параметрической форме уравнения звуковой линии

$$Y = y_s(x+1)^{1/3} \delta^{1/3} = -\frac{c^2(B+1/3 k_0^{3/2}) \alpha \pi^{1/2} V\sqrt{3}}{2a_* \xi^{1/2} (x+1)^{-1/3} (1-\tau_s)^\beta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \times \right. \\ \times \exp\left[-\frac{2}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi k_0^{3/2}\right] \times \frac{(n+1/2)^{7/2}}{1-1/3(n+1/2)k_0^{3/2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\theta + \\ \left. + \frac{3^{7/2} e^{-2\pi}}{V\pi k_0^{7/4}} \Gamma\left(1 + \frac{k_0^{3/2}}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} k_0^{3/2}\right) \sin\left[\frac{3}{k_0^{3/2}}\left(1 - \frac{\theta}{\delta}\right)\right] \right\} \\ x_s = \frac{c^2(B+1/3 K_0^{3/2}) \alpha (x+1)^{1/3} [V\sqrt{3}v'(0) + 1/v(0)]}{2a_* \xi^{1/2} v(0) (1-\tau_s)^\beta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{5/2} \times \right. \\ \times \frac{\exp[-2/3(n+1/2)\pi k_0^{3/2}]}{1-1/3(n+1/2)k_0^{3/2}} \left[(-1)^{n+1} + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \frac{\theta}{\delta} \right] + \\ \left. + \frac{3^{5/2} e^{-2\pi}}{V\pi k_0^{5/4}} \Gamma\left(1 + 3k_0^{-3/2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - 3k_0^{-3/2}\right) \left[\cos\frac{3\pi}{k_0^{3/2}}\left(1 - \frac{\theta}{\delta}\right) - 1 \right] \right\}$$

Полученные кривые нанесены на фиг. 9, где пунктиром дан результат эксперимента [12] для клина с полубесконечной пластинкой вниз по потоку. Вполне понятно, возмущения затухают с удалением от профиля, так что $d = \max y_s = y_s(\min \theta)$ определяет как раз диаметр местной сверхзвуковой зоны в зависимости от k_0 . На фиг. 10 соответствующий результат, вычисленный нами для ромба 12%-ной относительной толщины, сравнивается с экспериментом [15] (пунктир) для авиационного профиля той же самой толщины. Причем непосредственно видно, что сверхзвуковая зона растет с увеличением скорости набегающего потока и простирается до бесконечности, когда $M_0 = 1$. И, как следует из характера выбранной нами особенности Франкля, в этом случае звуковая линия вдали от профиля имеет форму

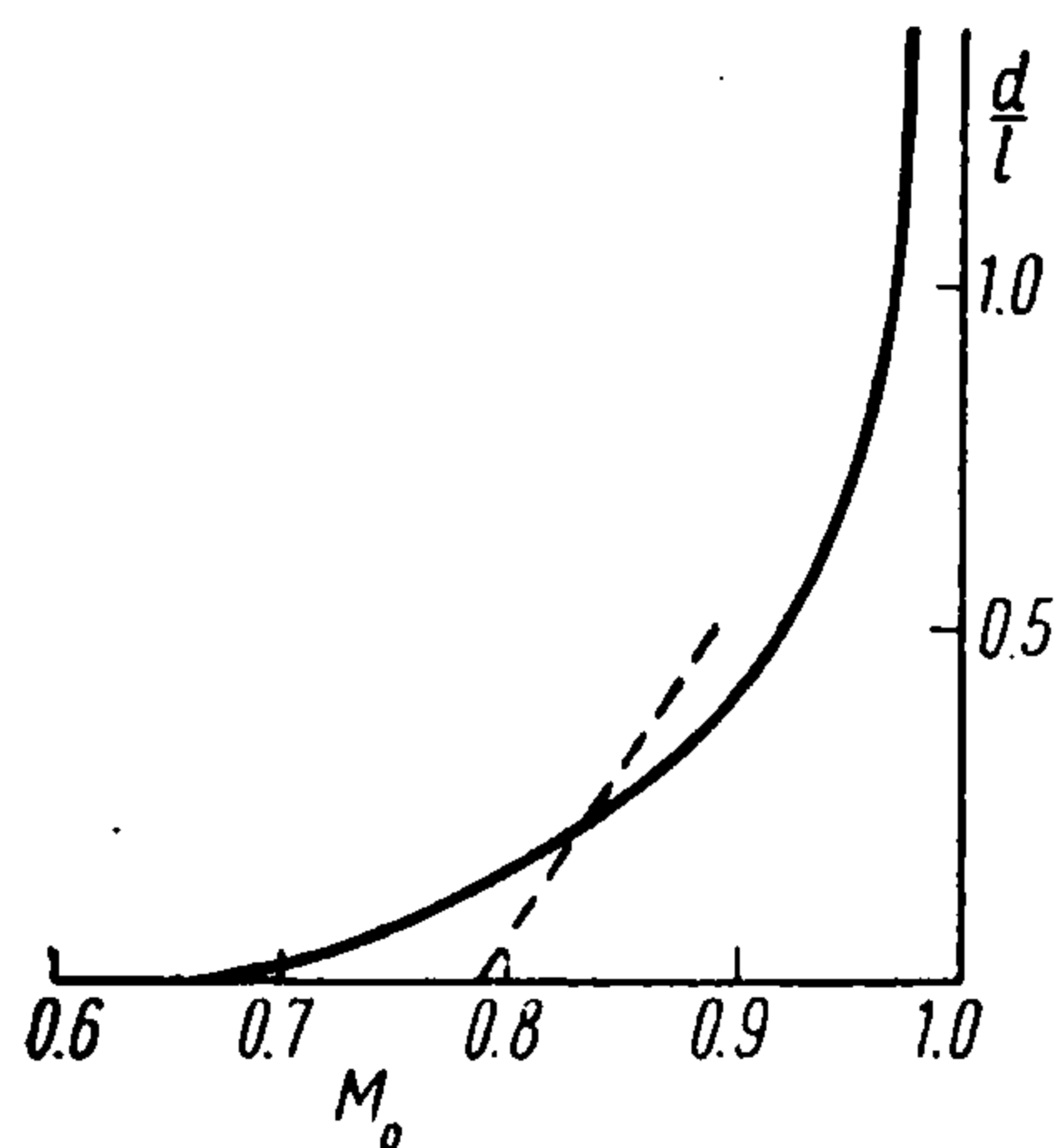
$$y_s = Cx_s^{3/4}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что «обобщающая функция» (1.12) дает не только правильную качественную картину обтекания ром-



Фиг. 9

ба во всем диапазоне $0 \leq M_0 \leq 1$, но приводит к таким количественным результатам, которые хорошо согласуются с экспериментом. Конечно,



Фиг. 10

мы не можем ожидать единственного выбора $f_v(\tau_0)$, так как задача решалась в приближенной постановке и условия в сверхзвуковой области остались неудовлетворенными. Однако, когда скорость набегающего потока невелика, то сверхзвуковая зона мала и ее влиянием можно пренебречь. Что же касается приближения к звуковому режиму обтекания, то в силу правильного характера особенности функции тока для этого режима наше решение и здесь с достаточной степенью точности описывает истинный поток около ромба. Кроме того, нами показано [13],

что удовлетворение условия (1.5) поворота потока в точке А (фиг.1) приводит лишь к ничтожному изменению аэродинамических характеристик течения.

Поступила 23 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука, ДАН СССР, т. 57, № 7, 1947.
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях, ГИТТЛ, 1949.
3. Коул Д. Сопротивление конечного клина при больших дозвуковых скоростях, Механика ИИЛ, вып. 4, 1952.
4. Trilling L. and Walker K. On the Transonic Flow Past a Finite Wedge. Journal of Math. and Physics, v. 32, No 1, 1953.
5. Фалькович С. В. К теории сопел Лавая, ПММ, т. 10, вып. 4, 1946.
6. Асланов С. К. О величине местной сверхзвуковой зоны при обтекании клина потоком сжимаемого газа, ПММ, т. 19, вып. 3, 1955.
7. Гудерлей Г. Йосихара Х. Обтекание клинообразного профиля при числе M , равном единице, Механика ИИЛ, вып. 3, 1951.
8. Овсянников Л. В. О движении клиновидного профиля со скоростью звука, Труды ЛКВВИА, вып. 33, 1950.
9. Макки А., Пэк Д. Обтекание конечных клиньев околосзвуковым потоком газа, Механика ИИЛ, вып. 5, 1953.
10. Уиттекер Е., Ватсон Г. Курс современного анализа, ч. II, ГТТИ, 1934.
11. Фок В. А. Таблицы функций Эйри, 1946.
12. Липман Г. и Брисон А. Обтекание клиновидных профилей потоком газа с околосзвуковыми скоростями, Механика ИИЛ, вып. 3, 1951.
13. Асланов С. К. Сопротивление клиновидного профиля, обтекаемого потоком звуковой скорости, ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.
14. Карман Т. Закон подобия для трансзвукового потока, Сб. Газовая динамика ИИЛ, 1950.
15. Карман Т. Сверхзвуковая аэродинамика, ИИЛ, 1948.
16. Асланов С. К. Асимптотика функций Чаплыгина и их производных, ПММ, т. 20, вып. 2, 1957.
17. Sirieix M., Golaz P. et Rebuffet P. Resultats experimentaux obtenus au voisinage de la vitesse du son sur une maquette d'aile a profil losangique, Comptes Rendus de l'Academie de sciences. Tome 235, № 7, 1952.
18. Lighthill M. The hodograph transformation in trans-sonic flow, Proceedings of the Royal Society, vol. 191, № 1026, 1947.
19. Ferguson D. and Lighthill M. The hodograph transformation in trans-sonic flow, Proceedings of the Royal Society, vol. 192, p. 135, 1948.
20. Cherry T. Tables and approximate formulae for hypergeometric functions of high order, occurring in gas-flow theory. Proceedings of the Royal Society, vol. 217, № 1129, 1953.