

О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГАЗА, ВЫТЕСНЯЕМОГО ПОРШНЕМ, БЕЗ УЧЕТА ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ

Н. Н. Кочина, Н. С. Мельникова

(Москва)

Рассматривается задача об одномерном неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, движущимся со скоростью $v = ct^m$, без учета противодействия.

Для случая $m = 0$ при наличии противодействия эта задача была решена Л. И. Седовым [1,2] в 1945 г. и Тейлором [3] в 1946 г.

Решение задачи о расширении поршня со скоростью $v = ct^m$ для трех значений $m = -0.5, -0.1, 1$ дано Н. Л. Крашенинниковой [4].

В настоящей работе задача рассмотрена для широкого диапазона чисел m с качественным исследованием уравнений для разных m , причем выяснено, что в зависимости от соотношения между ν , γ и m получается разная картина движения.

Если считать, что движение газовых масс при сильном взрыве моделируется расширением цилиндра или сферы со скоростью $v = ct^m$, при $\nu = 2$ или $\nu = 3$ получаем решение задачи о сильном взрыве с учетом вытеснения воздуха продуктами взрыва.

1. Пусть в покоящемся газе в начальный момент времени начинает двигаться плоский поршень или газ, начинает раздвигаться цилиндром или сферой со скоростью $v = ct^m$, где $m > -1$. Начальным давлением p_1 в покоящемся газе пренебрегаем.

Уравнения одномерного неустановившегося движения идеального нетеплопроводного газа имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\gamma} + v \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где γ — показатель адиабаты, $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для случая плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Из определяющих параметров задачи

$$[r] = L, \quad [t] = T, \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [c] = LT^{-m-1}$$

можно составить только одну безразмерную комбинацию

$$\lambda = \frac{ct^{m+1}}{r} \quad (1.2)$$

и, следовательно, задача будет автомодельной.

Для искомых функций v , ρ и p можно написать формулы [1]

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \rho_1 R(\lambda), \quad p = \rho_1 \frac{r^2}{t^2} P(\lambda) \quad (1.3)$$

Подставим v , p и ρ из (1.3) в (1.1) и введем вместо P новую функцию $z = \gamma P / R$, тогда система (1.1) преобразуется к виду [1,4]

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z [2(V-1) + v(\gamma-1)V] (V-m-1)^2}{(V-m-1) [V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z]} - \frac{z \{(\gamma-1)V(V-1)(V-m-1) + 2z(V-m-1 + m/\gamma)\}}{(V-m-1) [V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z]} \quad (1.4)$$

$$\frac{dR}{dV} = \frac{R}{(V-m-1)} \left\{ \frac{[(V-m-1)^2 - z] vV}{V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z} - 1 \right\} \quad (1.5)$$

$$\frac{d\lambda}{dV} = \lambda \frac{(V-m-1)^2 - z}{V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z} \quad (1.6)$$

Из условий на ударной волне получаем выражения для V_2 , z_2 и R_2 за фронтом ударной волны (перед фронтом $V_1 = z_1 = 0$, $R_1 = 1$):

$$V_2 = \frac{2(m+1)}{\gamma+1}, \quad [z_2 = \frac{2\gamma(\gamma-1)(m+1)^2}{(\gamma+1)^2}, \quad R_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (1.7)$$

Найдем граничные условия на поршне:

$$v_* = \frac{dr_*}{dt} = \frac{r_*}{t} V_* = ct^m, \quad \text{или} \quad r_* = \frac{c}{m+1} t^{m+1}$$

Из (1.2) и (1.3) получаем

$$V_* = m+1, \quad \lambda_* = m+1 \quad (1.8)$$

(звездочкой отмечены величины, отнесенные к поршню).

Таким образом, задача сводится к интегрированию системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4) — (1.6) для искомых функций z , λ и R при граничных условиях (1.7) и (1.8).

2. Для решения задачи необходимо провести качественное исследование уравнения (1.4) и найти из уравнения (1.6) направление возрастания параметра λ вдоль интегральных кривых. В число интегральных кривых входят прямые $V = m+1$ и $z = 0$.

Оказывается, что в области $0 \leq V \leq m+1$, $z > 0$ уравнение (1.4) может иметь следующие особые точки.

1) Точка $O(V=0, z=0)$ — узел. В окрестности точки O интегральные кривые имеют вид:

$$V + \frac{2m}{(m+1)\gamma} z = Cz^{1/2} \quad (2.1)$$

2) Точка $C(V=m+1, z=0)$ — сложная особая точка. Асимптотическая формула имеет вид:

$$(V-m-1)^{2m} = Cz^{v(m+1)} [vz - m\gamma(V-m-1)]^{2m+v(\gamma-1)(m+1)} \quad (2.2)$$

3) Точка $D(V=m+1, z=\infty)$. Вблизи этой точки

$$z = C(m+1-V)^{\frac{2m}{2m+v\gamma(m+1)}} \quad (2.3)$$

4) Точка $E(V = -2m/v\gamma, z = \infty)$

5) Точка $G(V=1, z=0)$

6) Точка Fi получается пересечением кривых

$$z = \frac{\{[2(V-1) + v(\gamma-1)V] (V-m-1) - (\gamma-1)V(V-1)\}}{2(V-m-1 + m/\gamma)} (V-m-1)$$

$$z = \frac{V(V-1)(V-m-1)}{2m/\gamma + vV}$$

При изменении параметра m от -1 до ∞ характер этих особенностей меняется, причем получаются четыре характерных случая.

Первый случай $m > 0$. Точки O, C, G — узлы, точки D и F — седла, точки E нет. Интегральная кривая задачи о поршне [проходящая через точку (V_2, z_2)] входит в точку C , где асимптотика имеет вид

$$z = C(m + 1 - V)^{\frac{2m}{2m + \nu\gamma(m+1)}} \quad (2.4)$$

Решение задачи имеется для всех m .

Случай $m = 0$ был рассмотрен Л. И. Седовым [1,2]. Точки O, C и A ($V = 0, z = 1$) — узлы, F и D — седла. Прямая $V = 1$ не входит в число интегральных кривых. Так как в этом случае задача автомодельна при любом p_1 , т. е. при любом z_1 , решение задачи в плоскости (V, z) дается отрезком любой интегральной кривой между точками $(1, z_*)$ и (V_2, z_2) , причем V_2 и z_2 связаны соотношением

$$z_2 = (1 - V_2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} V_2 \right)$$

Второй случай $m'' < m < 0$. Здесь

$$m'' = -\frac{\nu(\gamma - 1)}{2 + \nu(\gamma - 1)} \quad (2.5)$$

Точки O, D — узлы, E — седло. В точку C входят три интегральные кривые: прямые $V = m + 1$ и $z = 0$ и некоторая разделяющая кривая, входящая под углом $-m\gamma/\nu$; следовательно, эта точка соответствует двум седлам.

Точек Fi — нечетное число (одна обязательно есть), причем ближайшая к точке C будет узлом, а дальше чередуются седла и узлы. При

$$m = m' = -\frac{\nu}{2 + \nu} \quad (2.6)$$

поле интегральных кривых совпадает с полем для сильного взрыва. Уравнение интегральной кривой (совпадающей в этом случае с разделяющей кривой, входящей в точку C) в плоскости (V, z) имеет вид [1]:

$$z = \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{V^2 [V - 2 / (2 + \nu)]}{[2 / (2 + \nu) \gamma - V]} \quad (2.7)$$

Точка (V_2, z_2) при $m = m'$ попадает на разделяющую кривую, при $m > m'$ лежит между прямой $V = m + 1$ и разделяющей кривой, при $m < m'$ лежит между разделяющей кривой и осью z .

Если $\gamma < 2$, значение $m = m'$ не принадлежит к рассматриваемому диапазону значений m и решение задачи о поршне существует. Интегральная кривая входит в точку D .

Если $\gamma > 2$, при $m < m'$, двигаясь по интегральной кривой от точки (V_2, z_2) в сторону возрастания параметра λ , мы не попадаем ни в точку C , ни в точку D , где $V = m + 1$, следовательно, решение задачи о поршне в этом случае не существует. Остановимся подробнее на случае $m = m'$. Точка F имеет координаты

$$V = \frac{2}{2 + \nu(\gamma - 1)}, \quad z = \frac{2\nu\gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{[2 + \nu(\gamma - 1)]^2 [\nu + 2(\gamma - 1)]}$$

Точка (V_2, z_2) при $\nu = 1$ или $\nu = 2$, а также при $\nu = 3$, если $\gamma < 7$, лежит между точками E и F ; при $\nu = 3, \gamma = 7$ точка (V_2, z_2) совпадает

с точкой F , а при $\nu = 3$, $\gamma > 7$ она лежит между точками F и C ; следовательно, при $\nu = 3$, $\gamma \geq 7$ решение задачи о поршне существует.

При $\gamma > 7$ решение дается отрезком интегральной кривой (2.7) между точками (V_2, z_2) и C , т. е. совпадает с соответствующим решением задачи о сильном взрыве. На границе поршня давление и плотность равны нулю; следовательно, поршень можно заменить пустой полостью.

При $\gamma = 7$ решение задачи о сильном взрыве в плоскости (V, z) дается особой точкой $(V_2 = 0.1, z_2 = 0.21)$, решение же задачи о поршне дается отрезком интегральной кривой (2.7) между этой точкой и точкой C . В точке (V_2, z_2) $\lambda = 0$, следовательно, ударная волна сразу уходит на бесконечность.

Таким образом, при $\gamma < 2$ решение задачи о поршне существует для всех m в рассматриваемом диапазоне; при $\gamma > 2$ в случаях $\nu = 1$ или $\nu = 2$ и при $2 < \gamma < 7$ в случае $\nu = 3$ оно не существует для $m'' < m \leq m'$, а при $\gamma \geq 7$ и $\nu = 3$ для $m'' < m < m'$, где m' и m'' взяты согласно (2.5) и (2.6).

Третий случай $m''' < m < m''$. Здесь

$$m''' = -\frac{\nu\gamma}{2 + \nu\gamma} \quad (2.8)$$

Точки O, C, D — углы, E — седло, точки F нет. Рассмотрим сначала случай $\gamma < 2$.

Значение параметра $m = m'$ принадлежит к рассматриваемому диапазону чисел m . При этом значении m решение задачи о поршне дается отрезком интегральной кривой (2.7) между точками (V_2, z_2) и C . Однако при движении от точки (V_2, z_2) к C параметр λ убывает.

Такого рода движение представляет собой при $t < 0$ движение за фронтом ударной волны, происходящей от периферийного взрыва.

Этот случай был рассмотрен Г. Л. Гродзовским [5].

При $m > m'$ существует решение как с расходящейся ударной волной (причем интегральные кривые входят в точку D), так и со сходящейся, при $m''' < m \leq m'$ решение существует только со сходящейся волной (движения за фронтом сходящейся волны при $t < 0$ можно представить себе происходящими от периферийного взрыва с учетом движения продуктов взрыва).

При $\gamma > 2$ движения будут только со сходящейся ударной волной.

Четвертый случай — $-1 < m \leq m'''$. Точки O и C — узлы, D — седло. Решения существуют только со сходящейся ударной волной. Во всех случаях сходящейся ударной волны интегральные кривые входят в точку C .

Таким образом, из изложенного в настоящем разделе можно сделать следующие выводы.

- 1) При $m > m'$ решение задачи о поршне существует для всех ν и γ .
- 2) При $\nu = 3$, $\gamma \geq 7$ решение задачи о поршне существует также при $m = m'$. Если $\gamma \neq 7$, оно совпадает с решением задачи о сильном взрыве.
- 3) Решение задачи о периферийном взрыве с учетом движения продуктов взрыва существует для $-1 < m < m'''$.

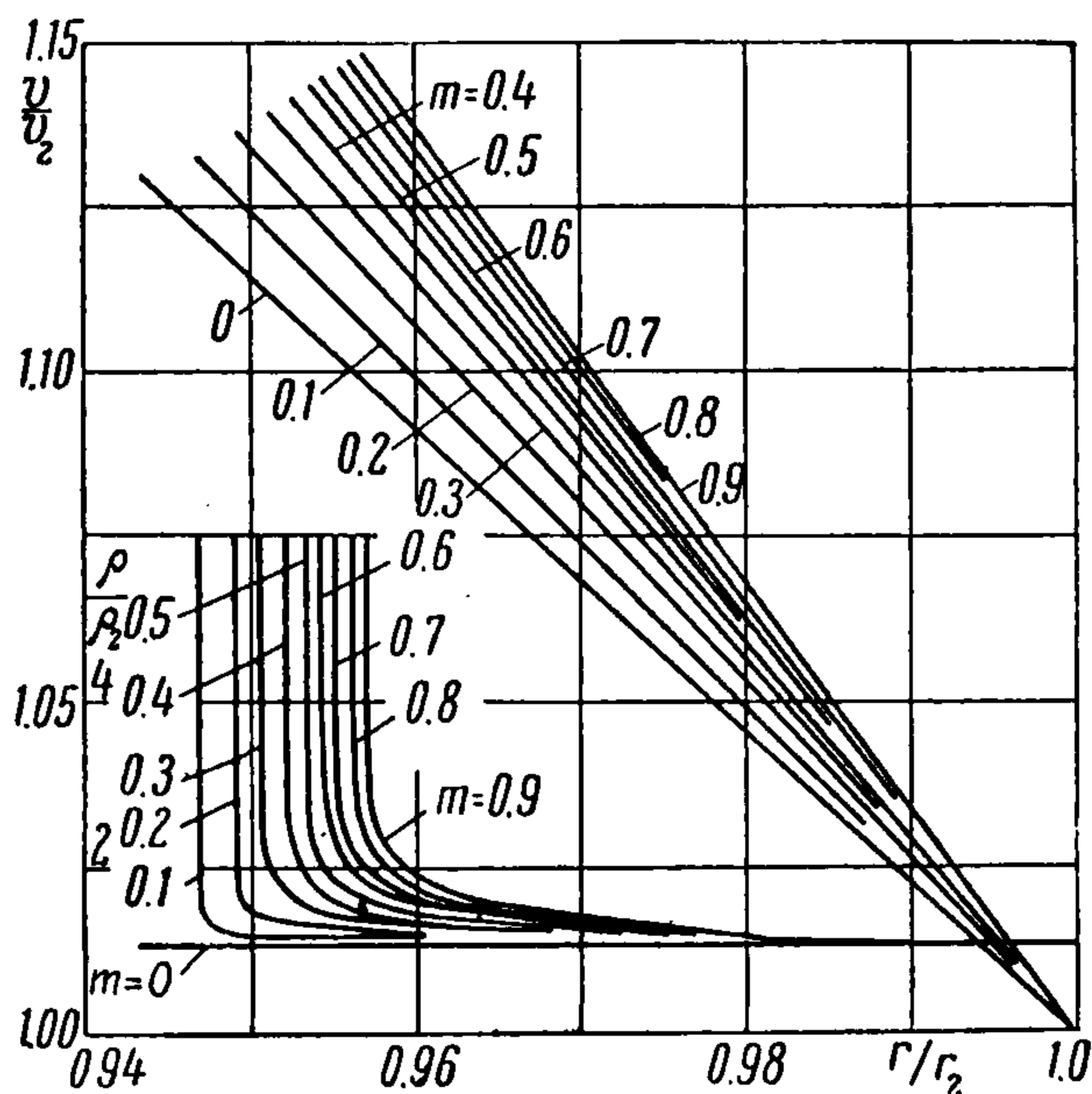
4) При $\gamma < 2$ для каждого m существует решение задачи о поршне либо с расходящейся, либо со сходящейся ударной волной.

5) При $\gamma > 2$ для $m'' < m < m'$ не существует решения задачи о поршне ни с расходящейся, ни со сходящейся ударной волной.

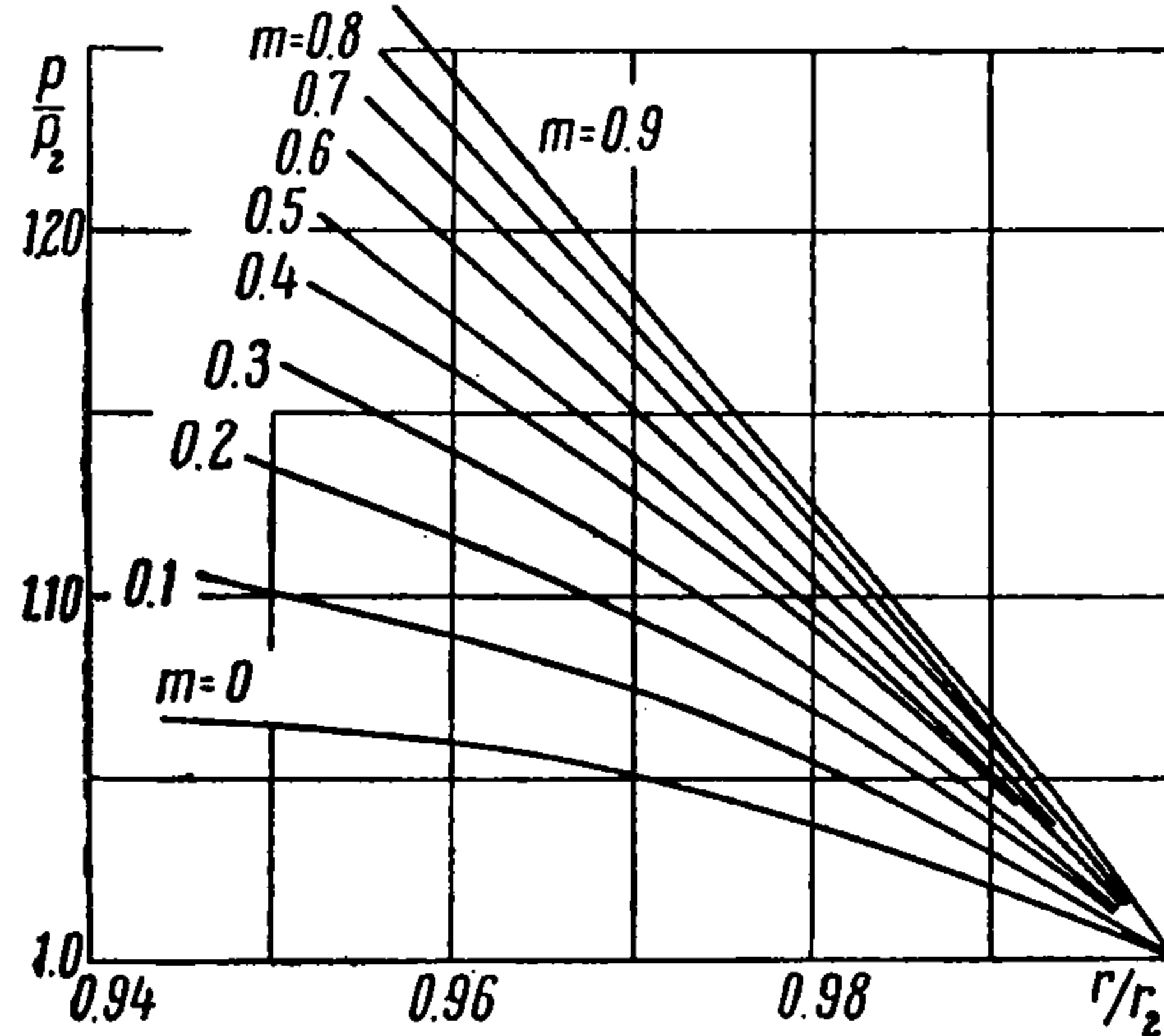
6) При $\nu = 1, 2$ и при $\nu = 3$, $2 < \gamma < 7$ не существует решения задачи о поршне ни с расходящейся, ни со сходящейся ударной волной также для $m = m'$.

Первый из этих выводов был получен С. С. Григоряном [6], а также Ли и Кубота [7], при этом рассматривались значения параметра $m' < m < 0$.

Отметим [7,8,9], что задача об установившемся обтекании тонкого плоского ($\nu = 1$) или осесимметричного ($\nu = 2$) тела с большой сверхзвуковой скоростью эквивалентна задаче об одномерном неустановившемся движении газа, вытесняемого соответственно плоским или цилиндрическим поршнем со скоростью $U = V \operatorname{tg} \alpha$. При этом координату x по направлению потока надо заменить на Vt ; α — угол между направлением потока и касательной к обтекаемому телу. Решения со сходящимися ударными волнами дают обтекания полых тонких тел с протоками.



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, рассмотренная задача о поршне при $m' < m \leq 0$ эквивалентна задаче об обтекании с большой сверхзвуковой скоростью тонких затупленных плоских профилей ($\nu = 1$) или тел вращения ($\nu = 2$) формы $r \sim x^{m+1}$

При этом ударная волна подобна обтекаемому телу.

В случае сходящейся ударной волны расстояние от ударной волны до оси симметрии меньше соответствующего расстояния для обтекаемого тела.

Г. Л. Гродзовским [5] был рассмотрен случай подобного обтекания тела, вызывающего параболическую ударную волну $x = kr^2$.

3. Приводим некоторые результаты интегрирования системы уравнений (1.4) — (1.6) при граничных условиях (1.7) и (1.8) для значений m от -0.9 до $+0.9$, изменяющихся на 0.1 при $\nu = 3$ и $\gamma = 1.4$.

На фиг. 1 — 8 построены графики функции v/v_2 , ρ/ρ_2 , p/p_2 (значком 2 отмечены характеристики движения непосредственно за фронтом удар-

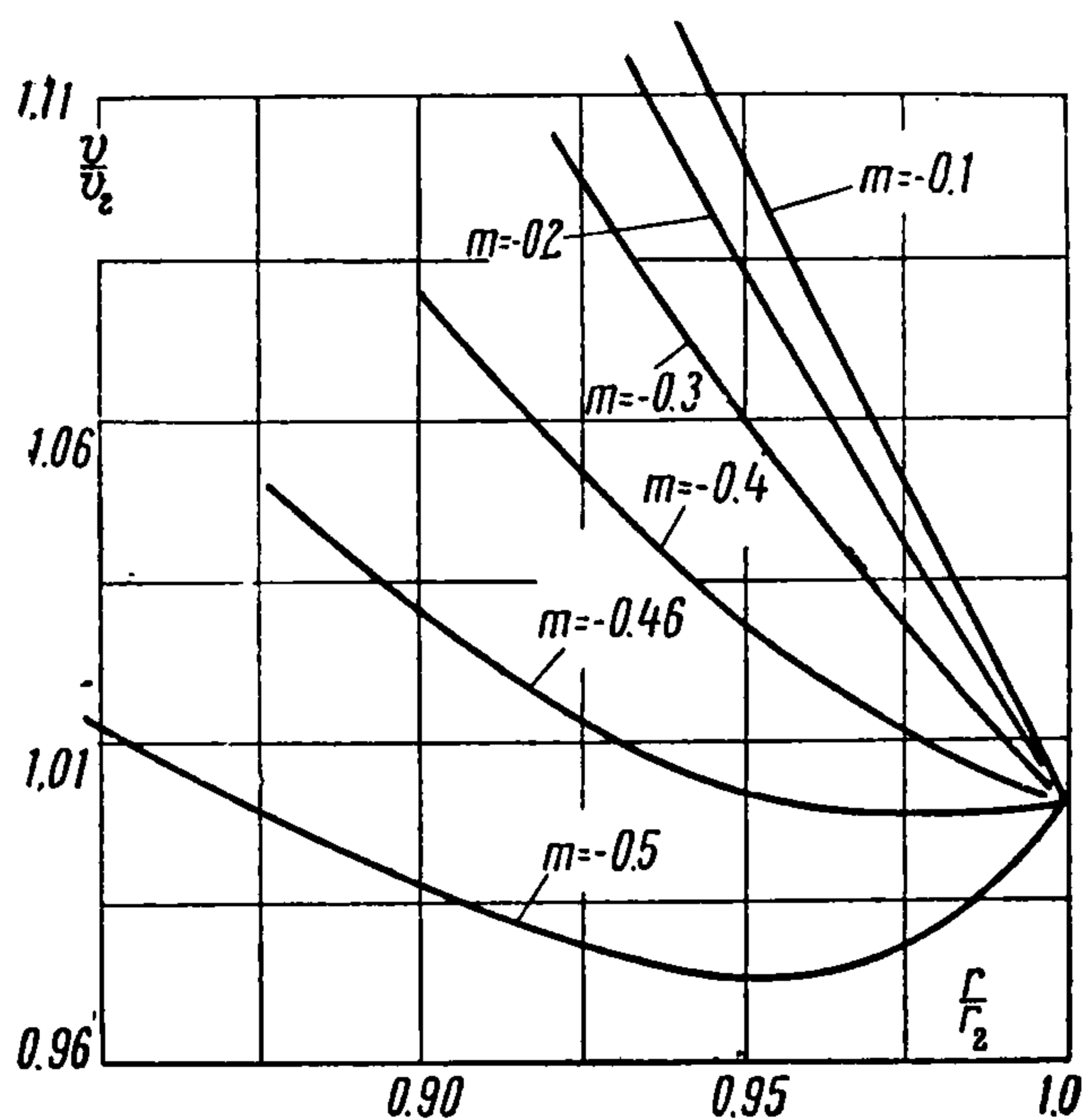
ной волны). Из соотношений (1.2) и (1.3) следует, что

$$\frac{v}{v_2} = \frac{\lambda_2 V}{\lambda V_2}, \quad \frac{\rho}{\rho_2} = \frac{R}{R_2}, \quad \frac{p_2}{p_2'} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2 \frac{zR}{z_2 R_2}, \quad \frac{T_2}{T_2'} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2 \frac{z}{z_2}, \quad \frac{r}{r_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

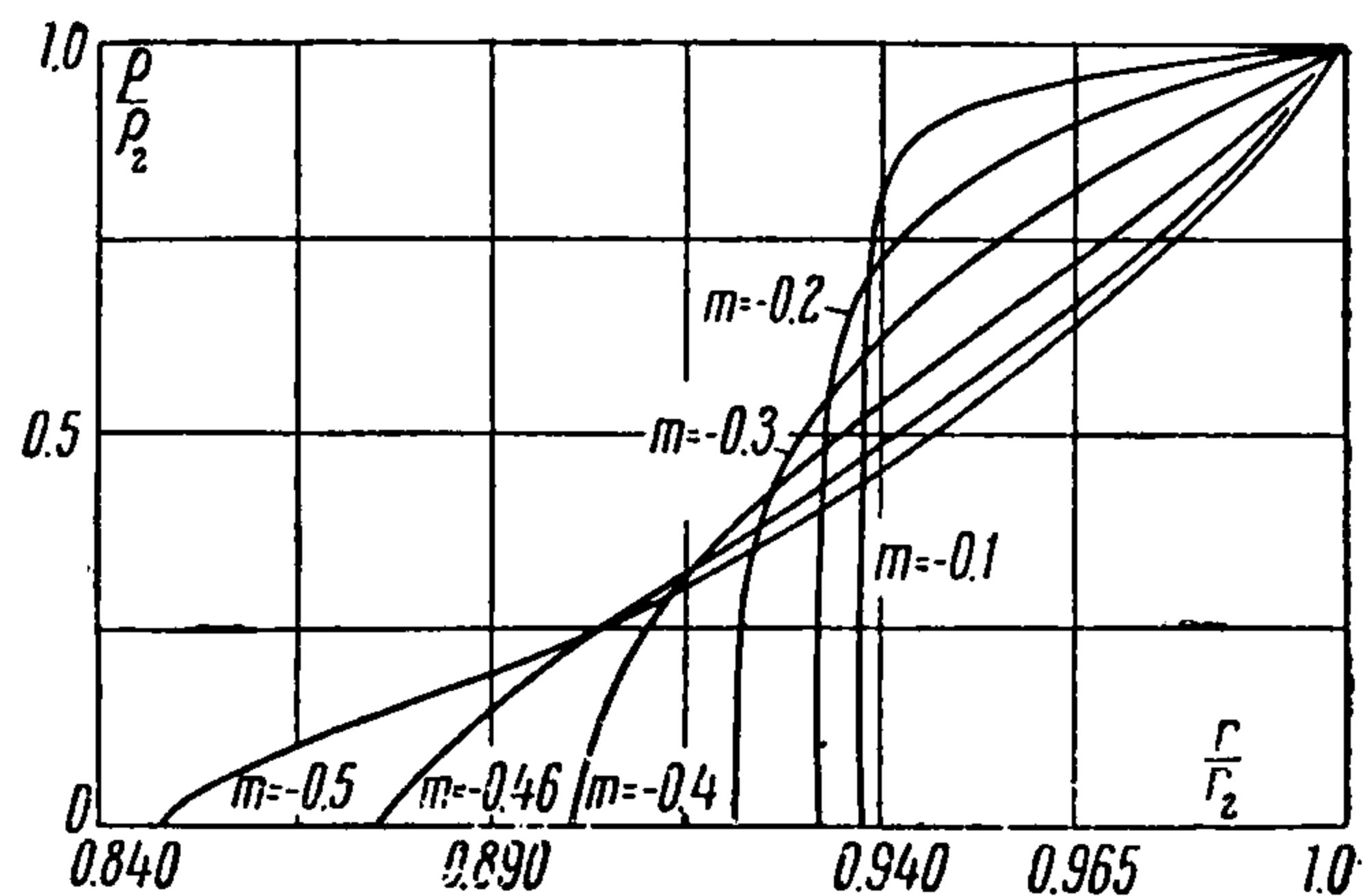
Полученные графики показывают, каким образом характеристики движения зависят от параметра m .

В связи с рассмотренными в предыдущем разделе четырьмя характерными случаями поведения полей интегральных кривых и сделанными для $\gamma < 2$ выводами получаем три типа графиков, а именно, фиг. 1 и 2 соответствуют случаю 1, фиг. 3 — 5 — случаю 2 и случаю 3 для $m' < m < m''$, фиг. 6 — 8 — случаю 3 для $m''' < m < m'$ и случаю 4. Следова-

тельно, фиг. 1 — 5 отвечают движению с расходящейся, фиг. 6 — 8 — со сходящейся ударной волной.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из графиков видно, что скорость частиц газа, прилегающих к поршню, больше, чем скорость частиц газа непосредственно за ударной волной.

Относительное расстояние между ударной волной и поршнем $(r_2 - r_*)/r_2$ слабо зависит от m , причем с ростом m растет.

Как известно [1], для автомодельного движения радиус фронта ударной волны r_2 , ее скорость D и давление за фронтом ударной волны p_2 определяются формулами

$$p_2 = \frac{2\rho_1}{\gamma + 1} D^2, \quad r_2 = \frac{ct^m}{\lambda_2}, \quad D = \frac{dr_2}{dt} = \frac{(m+1) ct^m}{\lambda_2}$$

Отсюда ясно, что при $m > 0$ скорость фронта D возрастает с ростом t от нуля до бесконечности. Поэтому пренебречь противодавлением p_1 по сравнению с давлением p_2 на фронте можно только при больших t .

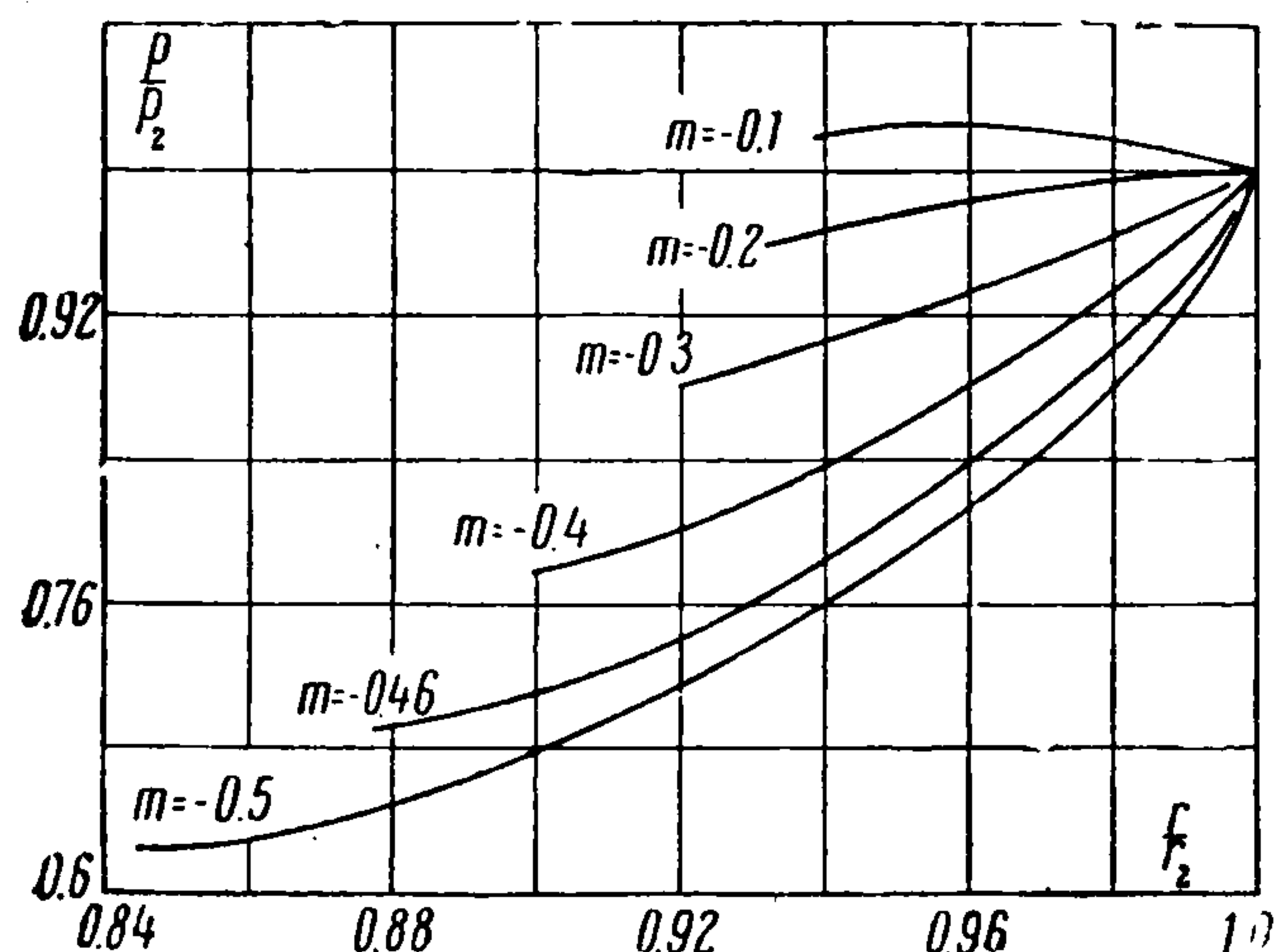
Из графиков видно, что для этого случая давление на поршне превышает в каждый момент времени давление на фронте ударной волны. Плотность на поршне бесконечна, температура бесконечно мала, а давление конечно (фиг. 1, 2).

При $m = 0$ ударная волна и поршень движутся с постоянной скоростью. Давление, плотность и температура на поршне конечны.

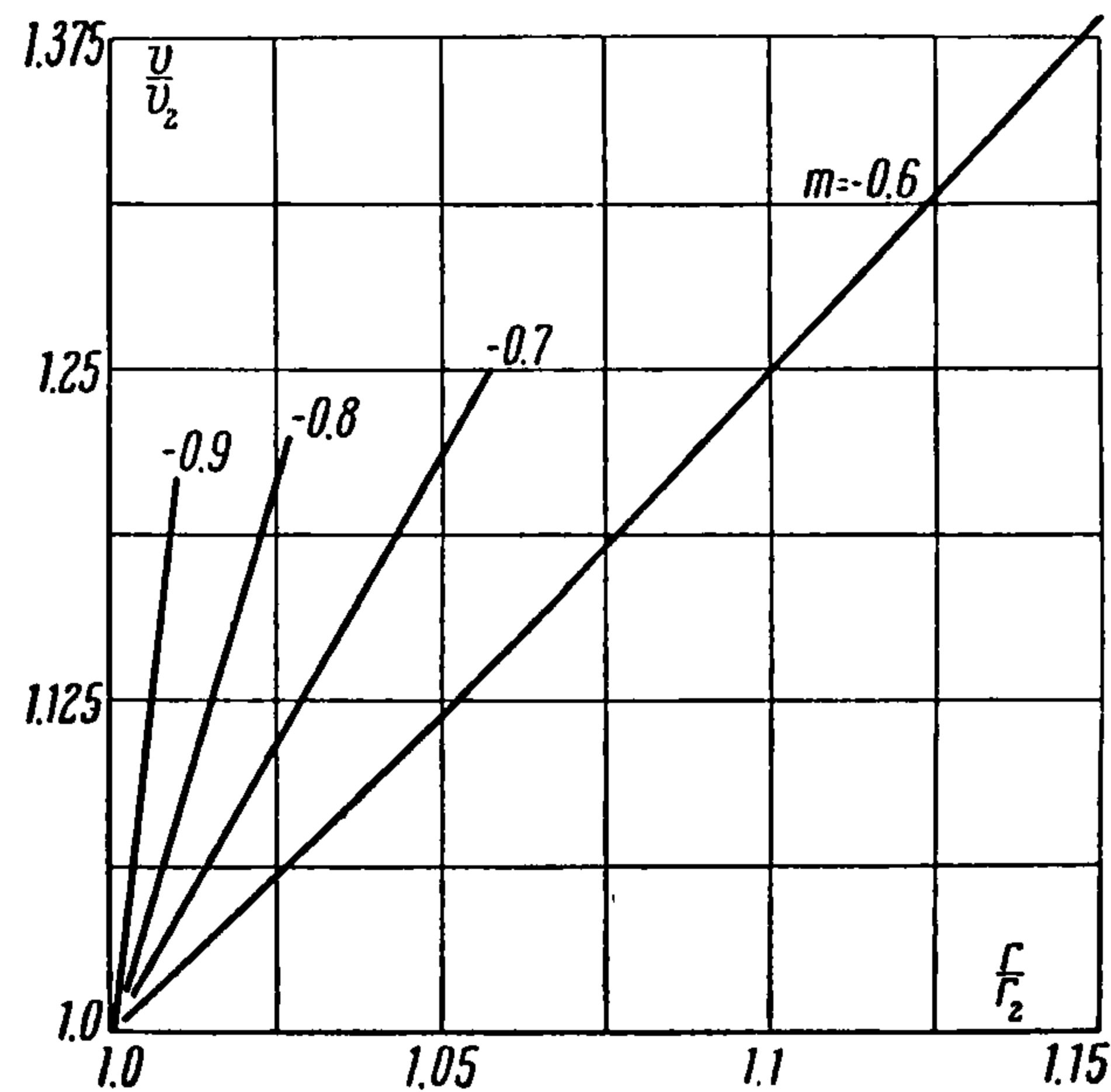
В этом случае движение будет автомодельным и при наличии противодействия $p_1 \neq 0$, так как $[c] = LT^{-1}$, $[\rho_1] = ML^{-3}$, $[p_1] = ML^{-1}T^{-2}$ и, следовательно, $[c^2] = [p_1/\rho_1]$.

Решение задачи о движении газа, вытесняемого сферой, расширяющейся с постоянной скоростью, дано впервые в 1945 г. Л. И. Седовым [2].

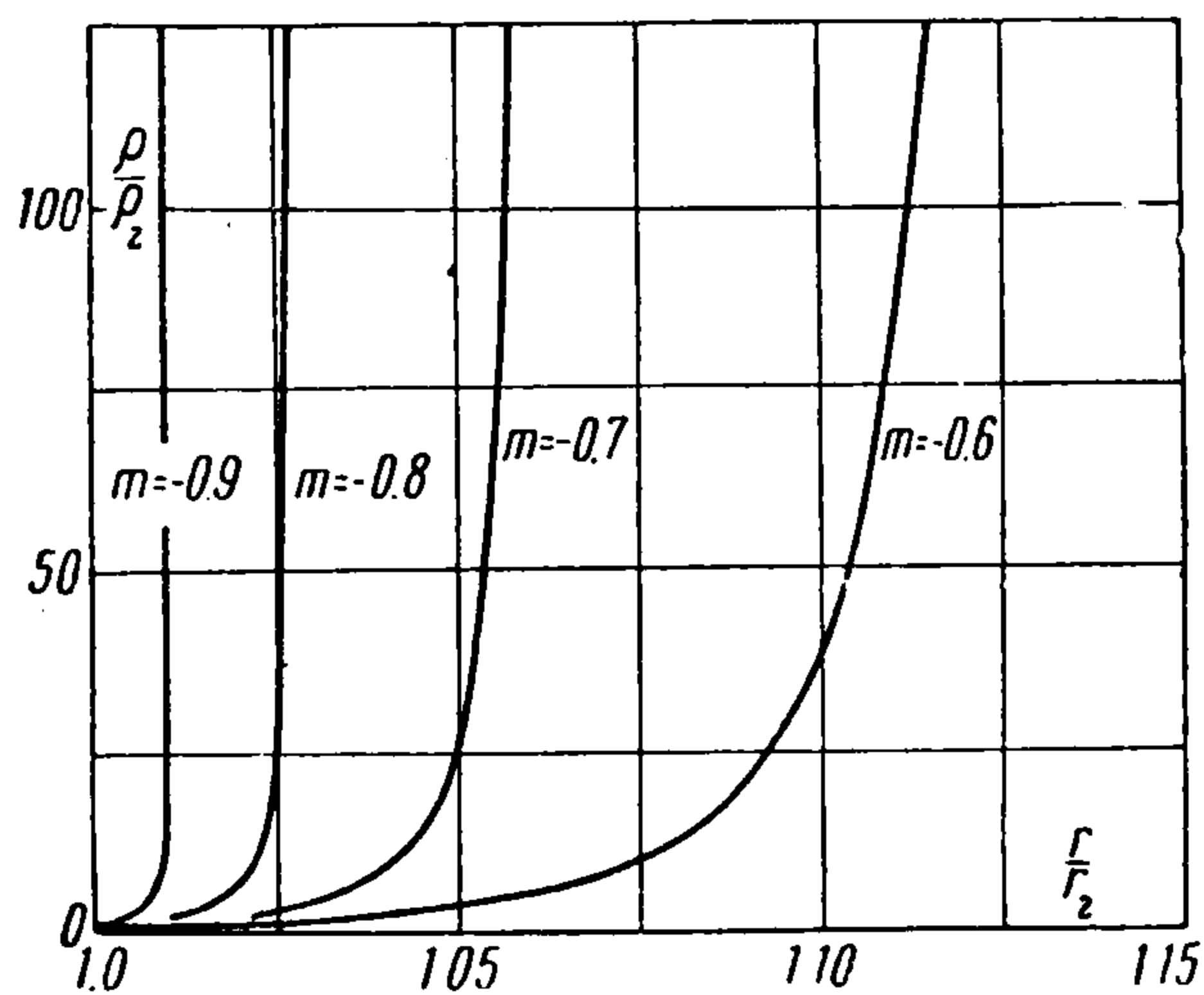
При $m < 0$ скорость ударной волны убывает с течением времени от бесконечности до нуля, поэтому противодействием можно пренебречь в моменты времени, близкие к начальному, когда давление на фронте ударной волны велико.



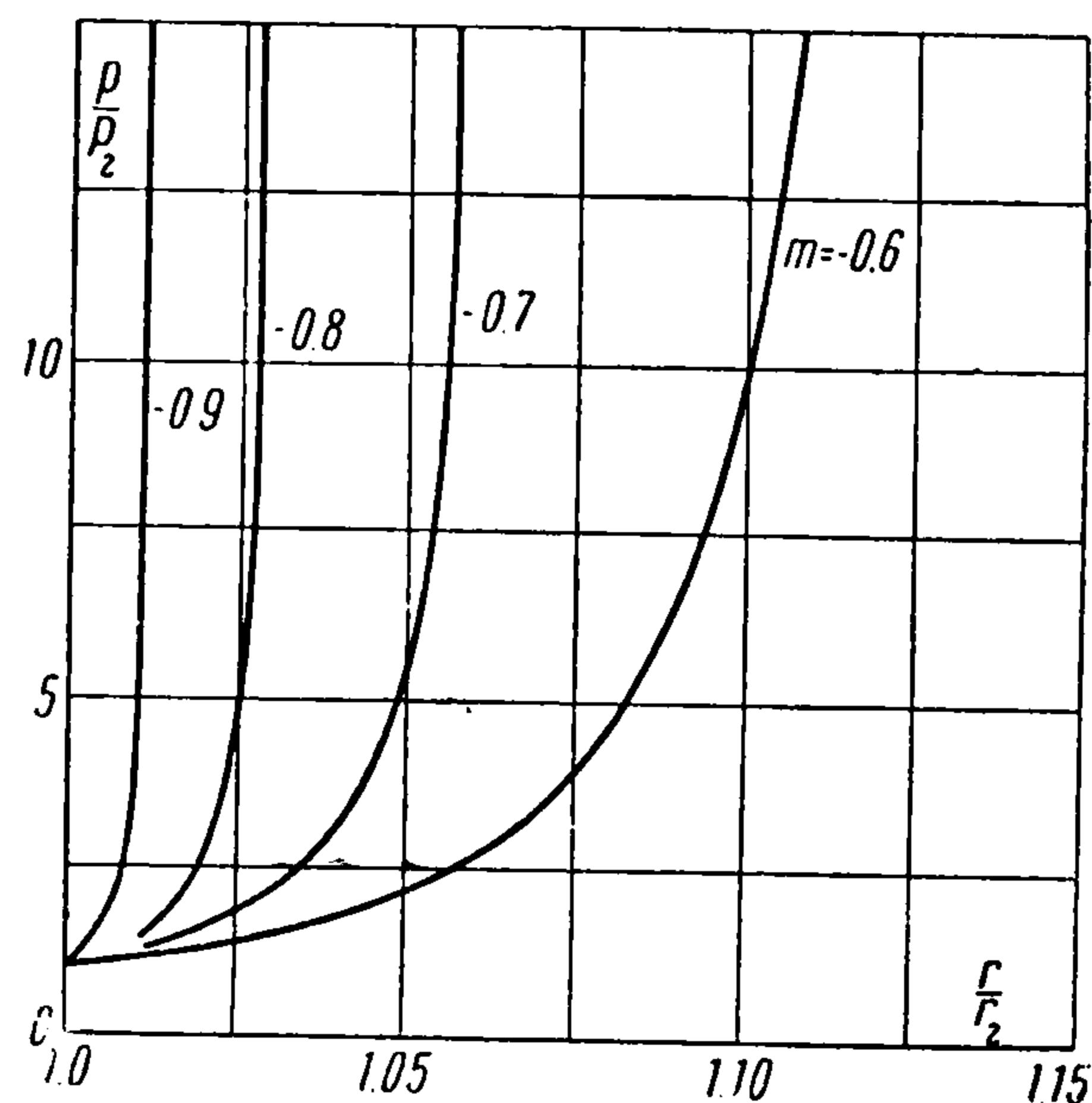
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Для $m = -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.46, -0.5$ ($m' < m < 0$) плотность на поршне стремится к нулю, температура — к бесконечности, давление конечно (фиг. 3—5).

Для $m = -0.1$ давление на поршне больше, чем на ударной волне, для остальных случаев меньше.

Для $m = -0.6, -0.7, -0.8, -0.9$ ($-1 < m \leq m'$) картина движения получается другой. В этом диапазоне параметра m радиус ударной волны r_2 оказывается меньше радиуса поршня r_* , т. е. $\lambda_2 > m + 1$.

Следовательно, скорость ударной волны

$$D = (m + 1) / ct^m \lambda_2 < v_* = ct^m$$

меньше скорости поршня.

В этом случае нужно считать, что газовые массы заполняют внешность сферы радиуса

$$r_* = \frac{ct^m}{m + 1}$$

расширяющейся с течением времени. Ударная волна отстает от поршня. Возмущенное движение занимает область

$$\frac{ct^m}{\lambda_2} < r < \frac{ct^m}{m + 1}$$

а внутри сферы радиуса

$$r_2 = \frac{ct^m}{\lambda_2}$$

газ покоится, давление равно нулю, а плотность — начальной плотности ρ_1 .

Плотность на поршне бесконечна, температура равна нулю, давление конечно (фиг. 6 — 8).

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, такое движение можно рассматривать происходящим при $t < 0$ от периферийного взрыва с учетом движения продуктов взрыва.

Для $m = -0.6$ расчет производился по формулам, дающим точное решение задачи о сильном взрыве. (Заметим, что численные значения характеристик движения в случае $m = -0.6$ не совпадают с соответствующими значениями, полученными в работе [5]).

Поступила 1 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
2. С е д о в Л. И. О некоторых неуставившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.
3. T a y l o r G. J. The air wave surrounding an expanding sphere. Proc. Roy. Soc., A 186, No 100, 1946.
4. К р а ш е н и н н и к о в а Н. Л. О неуставившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. Известия АН СССР, ОТН, № 8, 1955.
5. Г р о д з о в с к и й Г. Л. Автомодельное движение газа при сильном периферийном взрыве. ДАН СССР, т. 111, № 5, 1956.
6. Г р и г о р я н С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неуставившихся движений газа (автомодельные движения), ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958
7. L e e s Lester and K u b o t a Toshi. Inviscid Hypersonic Flow Over Blunt-Nosed Slender Bodies. JAS, vol. 24, № 3, 1957.
8. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М., Б у н и м о в и ч А. И., М и х а й л о в а М. П. Теоретическая гидромеханика. Сборник статей, № 4, 1949.
9. Ч е р н ы й Г. Г. Влияние малого затупления передней кромки профиля на его обтекание при большой сверхзвуковой скорости. ДАН СССР, т. CXIV, № 4, 1957.