

О ТЕЧЕНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕХОДА В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

О. С. Рыжов

(Москва)

Особенность перехода через скорость звука в плоском сопле, т. е. в случае, когда касательная к линии перехода совпадает с направлением характеристик, проходящих через ось канала, была отмечена С. А. Христиановичем^[1]. Позднее Ф. И. Франкль, опираясь на преобразование годографа, детально исследовал характер плоского потока около линии перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым^[2]. Применяя прямой метод, С. В. Фалькович получил главный член решения в виде полинома третьей степени, что значительно упростило весь расчет переходной части сопла^[3]. Недавно получен интеграл, описывающий течение в окрестности поверхности перехода в круглых соплах^[4]. В настоящей работе на основе этого решения исследуются некоторые свойства осесимметрических течений. В основе исследования лежит метод С. В. Фальковича, так как в этом случае не надо прибегать к преобразованию годографа.

§ 1. Аналитические сопла. Уравнения осесимметрических околозвуковых газовых течений в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$-(\kappa + 1)UU_x + a_*V_r + a_*V/r = 0, \quad U_r = V_x \quad (1.1)$$

где U и V являются добавками вдоль осей x и r к скорости, равной критической скорости a_* и направленной вдоль x ; κ — показатель адиабаты Пуассона; индексы означают частное дифференцирование.

Известно, что не во всяком сопле осуществляется течение без скачков уплотнения вблизи наиболее узкого сечения канала^[1,2]. Поэтому при расчете сопел не задаются наперед формой стенок, а задают вдоль оси сопла распределение скорости в виде аналитических функций, определяя при помощи уравнений движения соответствующий им скоростной потенциал. Две найденные таким образом линии тока, симметричные относительно оси x , принимаются затем за стенки сопла.

Заметим теперь, что, переходя от точных уравнений газовой динамики к «укороченным» уравнениям (1.1), мы имеем дело по существу с линейной теорией, хотя уравнения (1.1) и нелинейны. Но отсюда следует, что единственным числовым параметром, характеризующим газовый поток на оси сопла, является величина

$$U_x = C_0 \quad \text{при } x = 0, r = 0 \quad (V = 0 \quad \text{при } r = 0) \quad (1.2)$$

В работе^[4] показано, что система уравнений (1.1) допускает непрерывную группу преобразований:

$$U_*(x, r) = \alpha^{2(n-1)} U(\alpha x, \alpha^n r), \quad V_*(x, r) = \alpha^{3(n-1)} V(\alpha x, \alpha^n r) \quad (1.3)$$

(где α и n — произвольные постоянные) не изменяющую вида уравнений.

Если в формулах (1.3) положить $n = 1/2$, то начальные данные (1.2) будут также инвариантны по отношению к указанной группе преобразований подобия. Отсюда заключаем, что величины $r^{-2}U$ и $r^{-3}V$ могут зависеть только от одной переменной $\xi = xr^{-2}$. Таким образом, течение в аналитическом сопле в окрестности его центра будет автомодельным. Для нахождения его положим

$$u = (x + 1)U/a_*, \quad v = (x + 1)V/a_* \quad (1.4)$$

Тогда уравнения (1.1) примут вид:

$$-uu_x + v_r + v/r = 0, \quad u_r = v_x \quad (1.5)$$

Решение системы уравнений (1.5) будем в соответствии с вышеизложенным искать в виде

$$u = r^2 f(\xi), \quad v = r^3 g(\xi), \quad \xi = x/r^2 \quad (1.6)$$

Функции f и g удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ff' - 4g + 2\xi g' = 0, \quad 2\xi f' + g' - 2f = 0 \quad (1.7)$$

Исключая из системы (1.7) функцию g , получим для определения функции f дифференциальное уравнение второго порядка

$$(f - 4\xi^2)f'' + f'^2 + 4\xi f' - 4f = 0 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) обладает простым частным решением, которое будем называть «основным»:

$$f = \frac{1}{4} A^2 + A\xi \quad (1.9)$$

где A — произвольная постоянная, равная по величине производной u_x в центре сопла. Используя равенства (1.6) и (1.9), находим

$$u = Ax + \frac{1}{4} A^2 r^2, \quad v = \frac{1}{2} A^2 xr + \frac{1}{16} A^3 r^3 \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) описывают течение в окрестности поверхности перехода в круглых соплах. Предполагая, что скорость течения возрастает вдоль оси x , имеем $A > 0$.

§ 2. Исследование потока в окрестности центра сопла. Одним из основных свойств течений в плоских соплах Лавалья является установленная Ф. И. Франклем неоднозначность отображения физической плоскости на плоскость годографа в окрестности линии перехода через скорость звука. Именно, при полном обходе вокруг начала координат в физической плоскости область между двумя характеристиками в плоскости годографа проходится трижды^[2]. Мы покажем в этом параграфе, что неоднозначное соответствие плоскостей xr и uv имеется и в осесимметрическом случае. Действительно, рассмотрим якобиан $j = D(u, v)/D(x, r)$ преобразования (1.10). Равенство нулю этого якобиана определяет в плоскости xr линию ветвления (L -кривую), вдоль которой взаимно однозначное соответствие физической плоскости и плоскости годографа нарушается. Поскольку $j = 1/2 A^3 (x - 1/8 Ar^2)$, то уравнение L -кривой будет

$$x = \frac{1}{8} Ar^2 \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что, как и в плоском случае, L -кривая выпукла в сторону набегающего потока. Изображением линии ветвления в плоскости годографа является S -кривая, уравнение которой записывается в виде

$$u = \frac{3}{2} v^{3/2} \quad (2.2)$$

Чтобы уяснить расположение линии ветвления в физической плоскости и в плоскости годографа, найдем еще уравнения характеристик, проходящих через центр сопла, и линий $u = 0$ и $v = 0$. Характеристики определяются дифференциальным уравнением

$$(dx/dr)^2 = u = Ax + \frac{1}{4} A^2 r^2 \quad (2.3)$$

Отсюда имеем формулы для характеристик, проходящих через центр сопла и касающихся линии перехода; такие характеристики будем в дальнейшем называть особыми:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{8} A (1 + \sqrt{5}) r^2 && (c^{\circ+}\text{-характеристика}) \\ x &= \frac{1}{8} A (1 - \sqrt{5}) r^2 && (c^{\circ-}\text{-характеристика}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя формулы (2.4) в равенства (1.10), получим характеристики в плоскости годографа (Γ -характеристики)

$$u = 4^{1/2} v^{3/2} \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) следует, что обе c° -характеристики физического пространства отображаются на разные ветви одной и той же полукубической параболы в плоскости годографа. Напишем теперь уравнение линии перехода; в плоскости годографа линией перехода является ось $u = 0$, в физической плоскости ее уравнение будет

$$x = -\frac{1}{4} Ar^2 \quad (2.6)$$

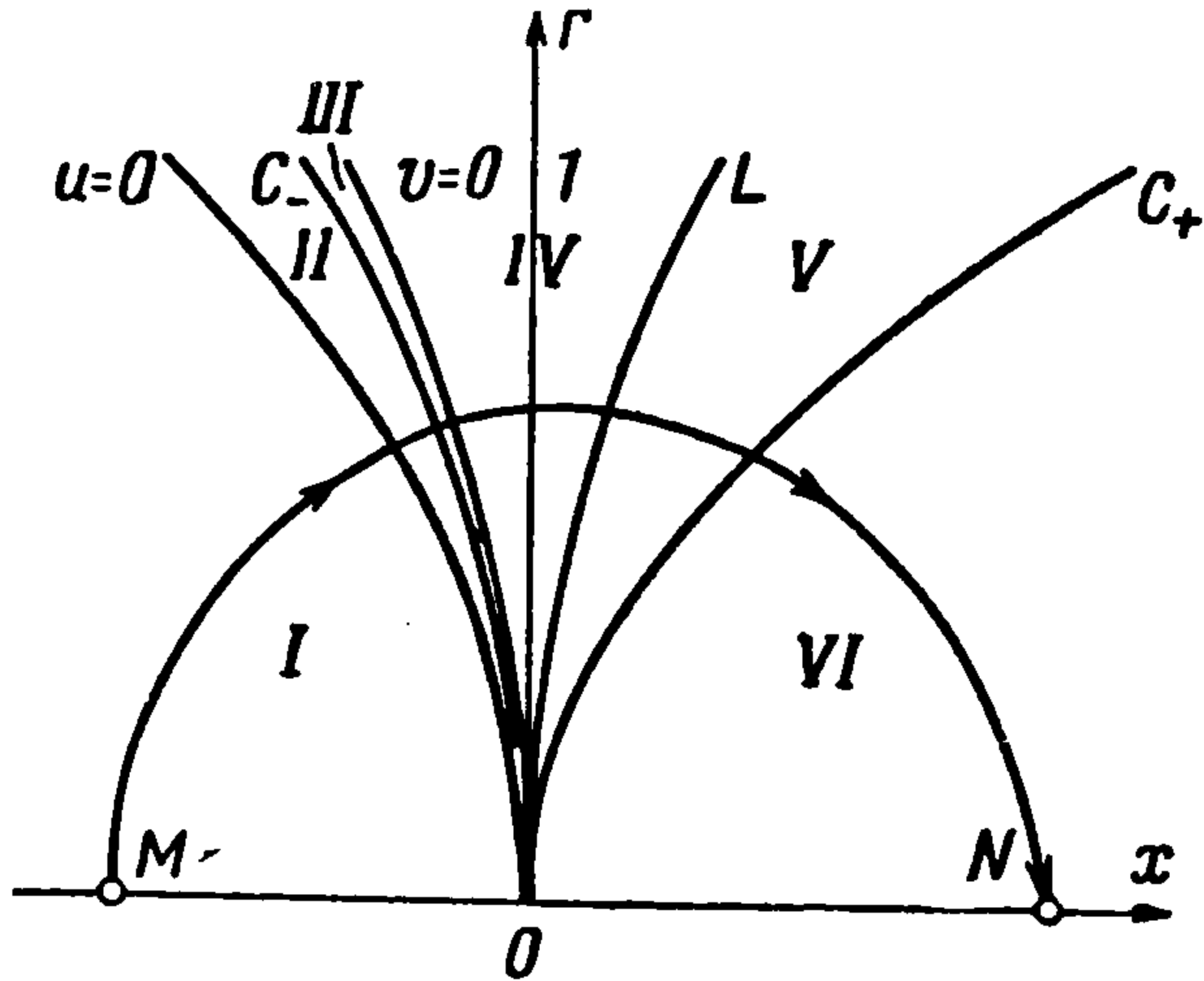
Уравнение линии, на которой исчезает радиальная составляющая скорости, в плоскости годографа имеет вид $v = 0$, а в физической плоскости

$$x = -\frac{1}{8} Ar^2 \quad (2.7)$$

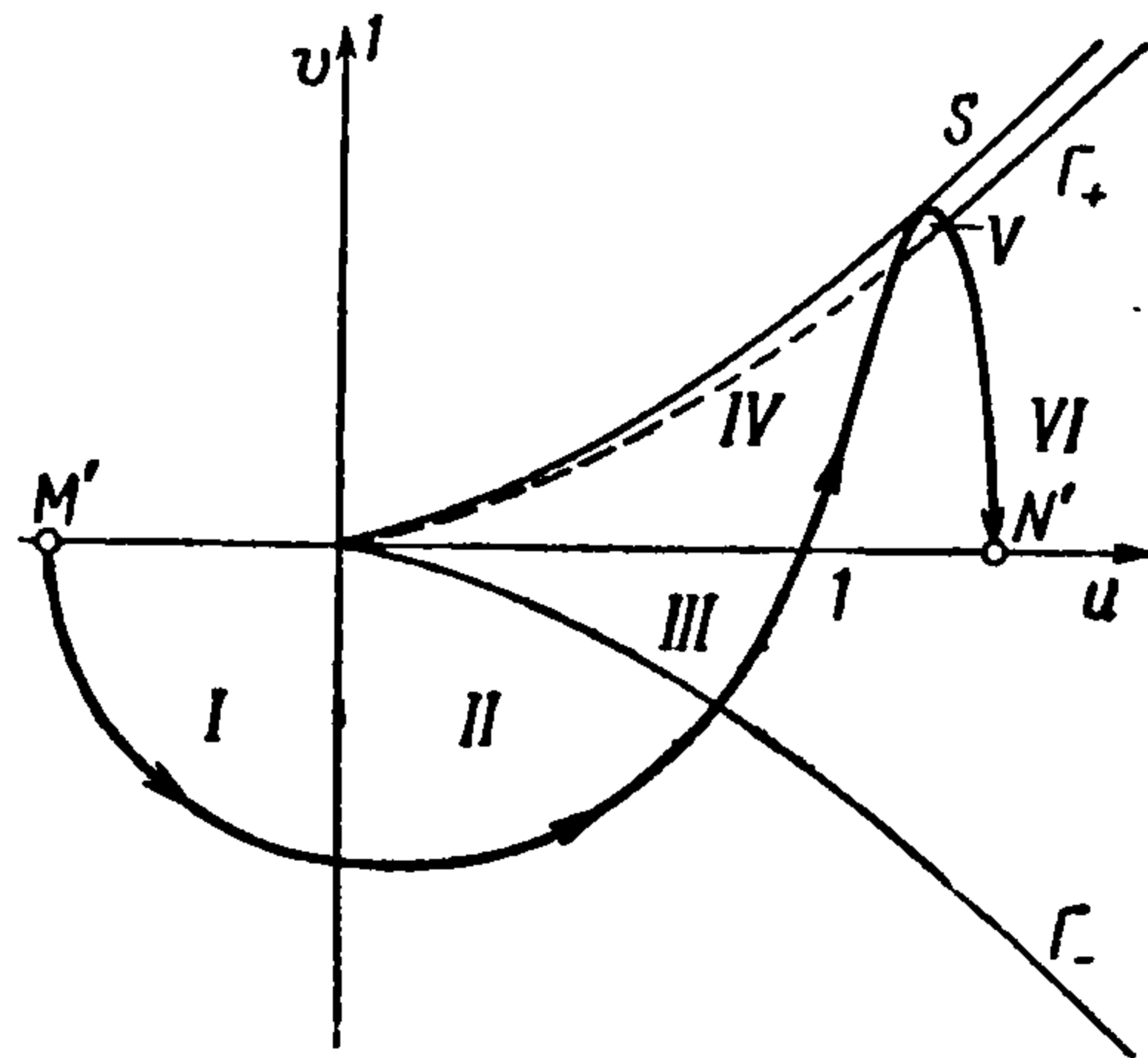
Из формул (2.6) и (2.7) видно, что линии перехода и $v = 0$ выпуклы, как и в плоских соплах, в сторону сверхзвуковых скоростей. Радиус кривизны линии ветвления равен в случае потока с осевой симметрией, как это следует из равенств (2.1) и (2.7), не радиусу кривизны линии перехода, а радиусу кривизны линии, на которой скорость потока параллельна оси сопла.

Окрестность центра сопла изображена на фиг. 1, где показано относительное расположение линии перехода через скорость звука, характеристик, линии нулевой радиальной скорости и линии ветвления. Поскольку значения r могут быть только большими или равными нулю, то надо рассматривать только верхнюю полуплоскость физических переменных. Отображение окрестности начала координат в плоскости uv , имеющее вид складчатой поверхности, изображено на фиг. 2. Соответствующие

области на фиг. 1 и 2 обозначены одинаковыми цифрами. Области IV, V и VI плоскости xr отображаются на одну и ту же область плоскости uv .



Фиг. 1



Фиг. 2

Замечание. Отметим, что линия ветвления в рассматриваемом случае не совпадает с характеристикой, проходящей через центр сопла, как это имело место в плоских потоках. Это обстоятельство связано с тем, что уравнения движения (1.1) в осесимметрическом случае не являются приводимыми из-за появления добавочного члена в уравнении неразрывности.

Из формул (2.4), (2.6) и (2.7) видно, что соответствующие кривые в осесимметрическом случае располагаются ближе к вертикальной прямой, нежели в плоском случае, если в обоих течениях производная u_x в центре сопла одинакова. Поток в круглом сопле при этом условии более равномерный, чем в плоском. С этой точки зрения построение круглых сопел выгоднее, чем плоских, с одинаковой скоростью разгона дозвукового потока в сверхзвуковой.

§ 3. Сопла с поверхностями слабых разрывов. 1°. Рассмотрим теперь случай, когда вдоль линий Маха, исходящих из центра сопла, образуются слабые разрывы, т. е. разрывы первых производных составляющих скорости по координатам. С этой целью положим в областях I и II величину A в формулах (1.10) равной некоторому значению A_1 , а в области VI — значению A_2 , причем $A_1 \neq A_2$. Предполагая, что оба предельных значения производной u_x в центре сопла при стремлении к пределу слева и справа положительны, имеем $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$. Тогда в областях I и II будем иметь

$$u = A_1 x + \frac{1}{4} A_1 r^2, \quad v = \frac{1}{2} A_1^2 x r + \frac{1}{16} A_1^3 r^3 \quad (3.1)$$

а в области VI соответственно

$$u = A_2 x + \frac{1}{4} A_2 r^2, \quad v = \frac{1}{2} A_2^2 x r + \frac{1}{16} A_2^3 r^3 \quad (3.2)$$

Уравнения c° -характеристик, используя равенства (2.3), (3.1) и (3.2), можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{8} A_1 (1 - \sqrt{5}) r^2 && c^\circ_- \text{-характеристика} \\ x &= \frac{1}{8} A_2 (1 + \sqrt{5}) r^2 && c^\circ_+ \text{-характеристика} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим теперь, что полученные равенства совпадают с линиями $\xi = \text{const}$ (см. § 1), поэтому решение уравнений движения (1.5) в областях III, IV и V можно искать по-прежнему в виде (1.6), сводя, таким образом, задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (1.8). На c° -характеристиках верны равенства

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8} A_1^2 (3 - \sqrt{5}) r^2 && \text{на } c^\circ_- \text{-характеристике} \\ u &= \frac{1}{8} A_2^2 (3 + \sqrt{5}) r^2 && \text{на } c^\circ_+ \text{-характеристике} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Используя формулы (1.6), (3.3) и (3.4), получим два граничных условия для интегрирования уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} f = f_1 &= \frac{1}{8} A_1^2 (3 - \sqrt{5}) && \text{при } \xi = \xi_1 = \frac{1}{8} A_1 (1 - \sqrt{5}) \\ f = f_2 &= \frac{1}{8} A_2^2 (3 + \sqrt{5}) && \text{при } \xi = \xi_2 = \frac{1}{8} A_2 (1 + \sqrt{5}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$, то из равенств (3.5) следует

$$\xi_1 < 0, \quad \xi_2 > 0 \quad (3.6)$$

2°. Можно еще более упростить качественное исследование поставленной задачи об образовании слабых разрывов вдоль линий Маха, если воспользоваться инвариантностью уравнения (1.8) по отношению к группе преобразований подобия $\Phi(\xi) = \alpha^{-2} f(\alpha\xi)$, где α — любая не равная нулю постоянная. Полагая поэтому

$$f = \xi^2 F(\eta), \quad \frac{dF}{d\eta} = \Psi, \quad \eta = \ln|\xi| \quad (3.7)$$

запишем уравнение (1.8) в виде

$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{\Psi^2 + 7\Psi F + 6F^2 - 8\Psi - 4F}{\Psi(4 - F)} \quad (3.8)$$

Основная задача состоит теперь в исследовании уравнения (3.8). Общая картина поля его интегральных кривых представлена на фиг. 3, где виден характер особых точек, кривых Ψ_1^* и Ψ_2^* , на которых значения производной $d\Psi/dF$ равны нулю, а также прямых $F = 4$ и $\Psi = 0$, где производная $d\Psi/dF$ обращается в бесконечность.

Для поставленных целей нужны особые точки

$$A(0, 0), \quad C[4, -2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)], \quad D[4, -2\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)]$$

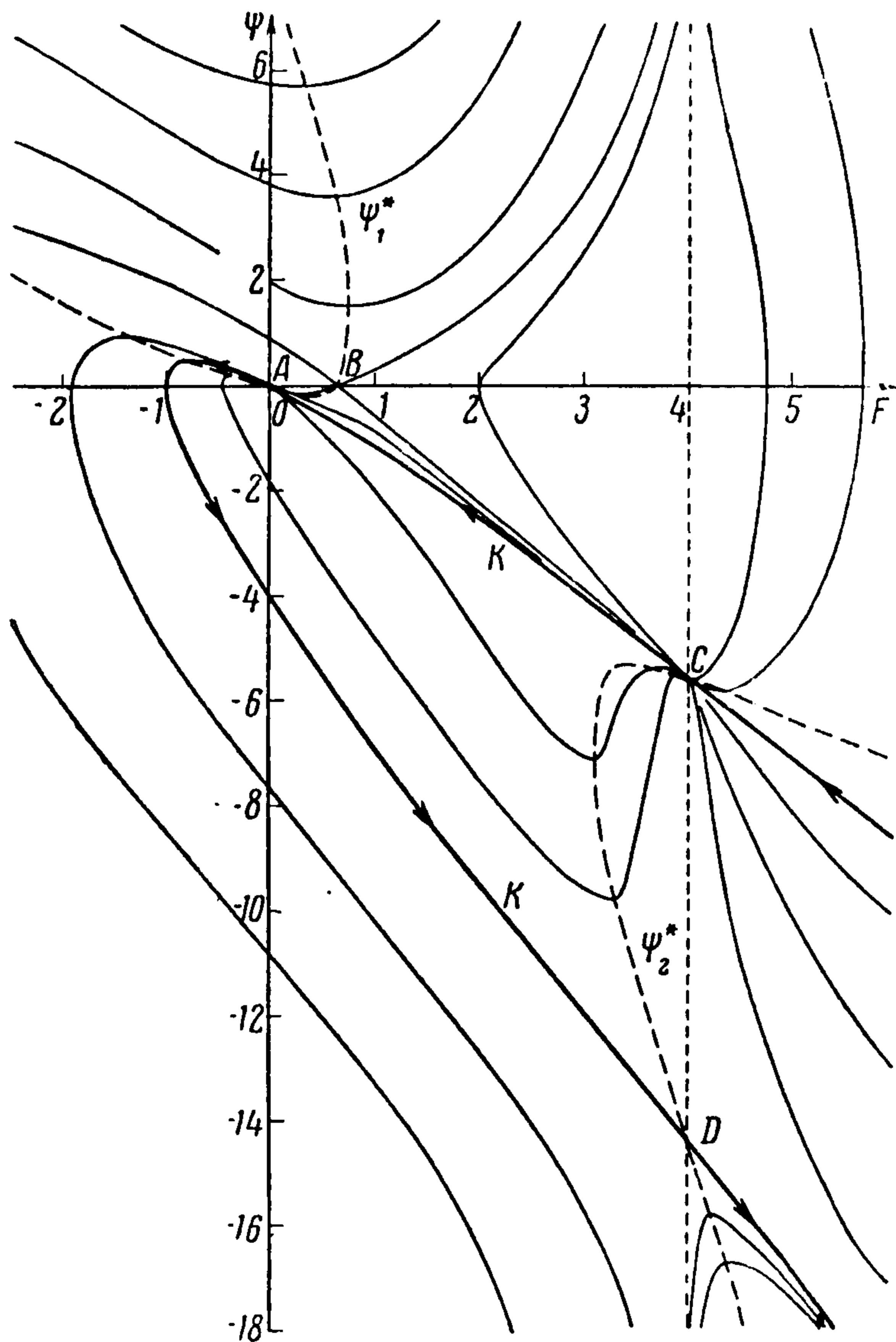
и бесконечно удаленная особая точка E , которая достигается при движении вниз вдоль прямой $\Psi = -2F$. Можно показать, что точка A соответствует оси x ; точка C соответствует c_+° -характеристике, а точка D соответствует c_-° -характеристике, определяемым равенствами (3.3); точка E соответствует оси r . Из равенств (1.6) и (3.6) следует, что звуковой линии соответствует ось ординат, области сверхзвуковых скоростей — полуплоскость, лежащая справа от этой оси, дозвуковых — левая полуплоскость. Если двигаться вдоль некоторой интегральной кривой в плоскости $F\Psi$, то соответствующие линии $\xi = \text{const}$ будут описывать определенную область физического пространства. Отсюда ясно, что значения ξ на рассматриваемой кривой не должны иметь экстремумов, так как в противном случае мы получили бы многозначную физическую плоскость xr , в которой течение накладывается само на себя. Линия, для которой значение ξ экстремально, является предельной линией. Используя равенства (3.7) и (3.8), легко видеть, что с этой точки зрения переход через прямую $F = 4$ невозможен. Исключение составляют лишь интегральные кривые, проходящие через особые точки C и D .

Используя формулы (3.7), имеем

$$f' = \xi(2F + \Psi) \quad (3.9)$$

Отсюда можно получить уравнение интегральной кривой K , являющейся изображением в плоскости $F\Psi$ основного решения (1.9); это уравнение не зависит от постоянной A

$$\Psi = -2(1 + F \mp \sqrt{1 + F}) \quad (3.10)$$



Фиг. 3

Если двигаться в физическом пространстве из области дозвуковых скоростей в область сверхзвуковых скоростей, то по кривой (3.10) движение будет происходить в направлении, указанном на фиг. 3 стрелкой.

Рассмотрим теперь течения со слабыми разрывами вдоль характеристик, исходящих из центра сопла. В этом случае течение в областях I и II будет по-прежнему изображаться участком K -кривой, расположенным между точками A и D , а течение в области VI — участком K -кривой, лежащим между точками C и A , поскольку уравнение (3.10) не зависит ни от величины A_1 , ни от величины A_2 . На характеристиках значения f непрерывны, а значения f' имеют разрывы. Отсюда сле-

дует, что значения F должны быть также непрерывными и равными 4, а значения Ψ должны претерпевать разрывы первого рода. Поэтому, двигаясь со стороны дозвуковых скоростей по отрезку K -кривой и достигая точки D , мы получаем единственную возможность осуществления течения со слабыми разрывами, переходя скачком из точки D в точку C . Из точки C можно затем двигаться вдоль любой интегральной кривой, заключенной между двумя ветвями K -кривой, до точки E , а затем возвратиться по продолжению этой кривой опять в точку C . В предельном случае движение будет происходить по K -кривой, проходимой в обратном направлении: т. е. из точки D скачком в точку C , из этой точки по K -кривой в точку E , затем по ее продолжению в точку D и опять скачком в точку C .

Из рассмотрения поля интегральных кривых уравнения (3.8) можно вывести ряд интересных свойств потоков, имеющих слабые разрывы.

Поскольку течение за s°_+ -характеристикой отображается на отрезок K -кривой между точками C и A , то отсюда следует, что на s°_+ -характеристике не возникает разрывов первых производных от составляющих ско-

рости потока по координатам, даже если они имелись на c°_- -характеристике. Таким образом, слабые разрывы (т. е. разрывы первых производных) не отражаются от центра сопла даже в том случае, если сопло обладает осевой симметрией. Это свойство связано с вырождением уравнений движения в этой точке в уравнения параболического типа. Исключение в этом отношении представляет лишь предельный случай, когда течение между особыми характеристиками отображается на K -кривую, проходимость в обратном направлении. В этом случае слабые разрывы образуются как на c°_- -характеристике, так и на c°_+ -характеристике. Если двигаться из точки C по интегральной кривой, расположенной выше сепаратрисы K , то на c°_+ -характеристике производная f' обращается в бесконечность.

3°. Перейдем теперь к выяснению характера интегральных кривых уравнения (1.8), [которые соответствуют рассмотренным выше кривым в плоскости $F\Psi$. Прежде всего заметим, что величина разрыва производной u_x на c°_- -характеристике не может быть произвольной. Действительно, вычисляя по формуле (3.9) значение f' при приближении к c°_- -характеристике слева, имеем

$$f_1' = -\frac{A_1}{2}(3 - \sqrt{5}) \quad (3.11)$$

Отсюда, обозначая через $[u_x]$ величину разрыва производной u_x на c°_- -характеристике, получим

$$[u_x] = -\frac{1}{2}A_1(5 - \sqrt{5}) < 0$$

Таким образом, задавая поток слева от c°_- -характеристики, мы можем получить справа от нее разные потоки, но с одинаковым значением скачка $[u]$ вдоль границы потоков.

Рассмотрим теперь интегральную кривую уравнения (1.8), которой соответствует некоторая кривая в плоскости $F\Psi$, начинающаяся и кончающаяся в точке C . На c°_+ -характеристике при подходе к ней справа (и слева) имеем

$$f_2' = A_2 \quad (3.12)$$

Равенства (3.5), (3.11) и (3.12), которые должны удовлетворяться на концах интервала при интегрировании уравнения (1.8), можно представить в виде

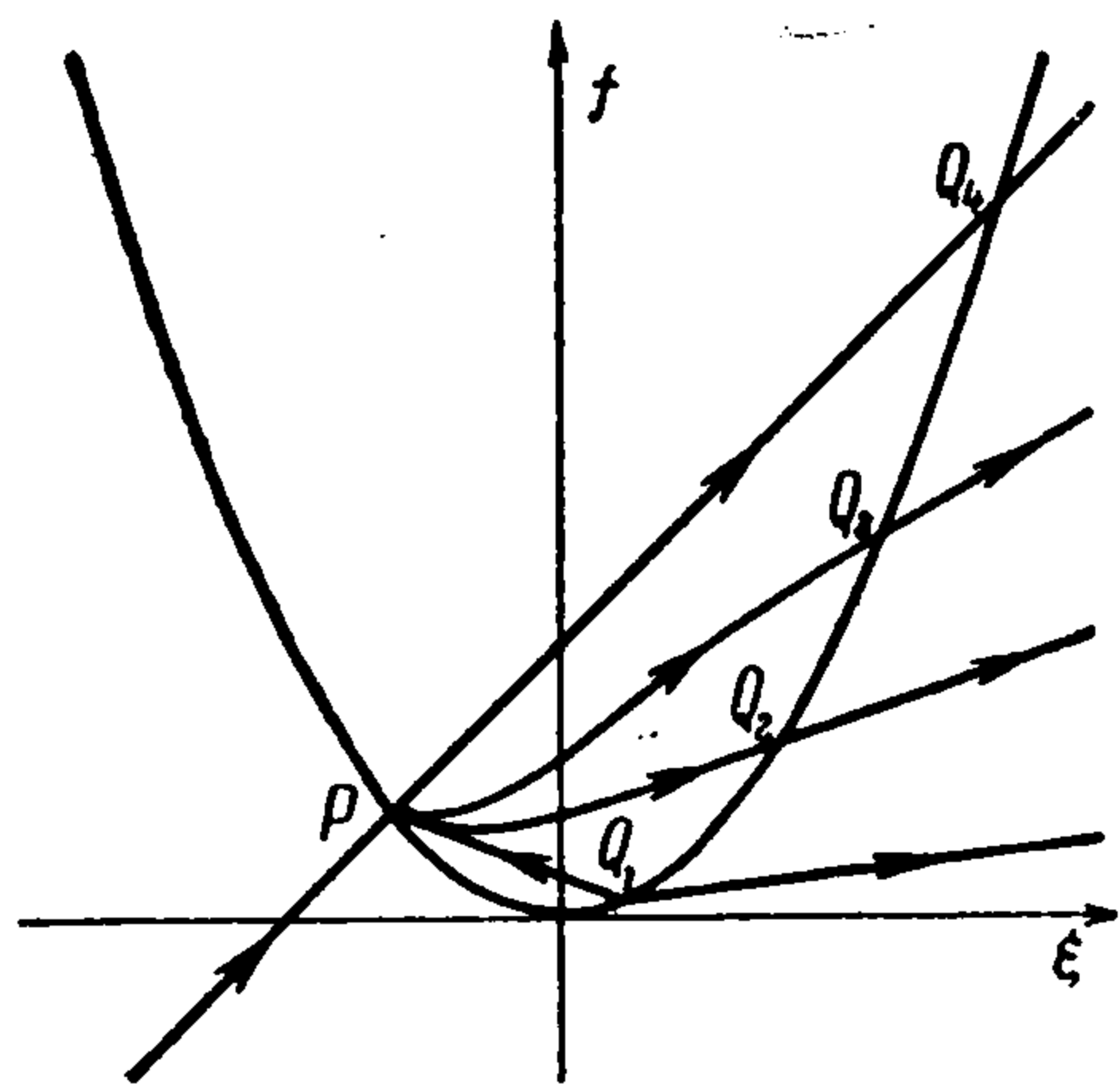
$$\begin{aligned} f_1 &= 4\xi_1^2, & f_1' &= 2(\sqrt{5} - 1)\xi_1 & \text{при } \xi &= \xi_1 \\ f_2 &= 4\xi_2^2, & f_2' &= 2(\sqrt{5} - 1)\xi_2 & \text{при } \xi &= \xi_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выполнение последних четырех равенств делается возможным благодаря тому, что концы интервала $P(\xi_1, f_1)$ и $Q(\xi_2, f_2)$ являются особыми точками уравнения (1.8), через которые проходит бесчисленное множество интегральных кривых с одинаковым наклоном. Действительно, вычисляя корни f'^* выражения $f'^2 + 4\xi f' - 16\xi^2 = 0$, имеем

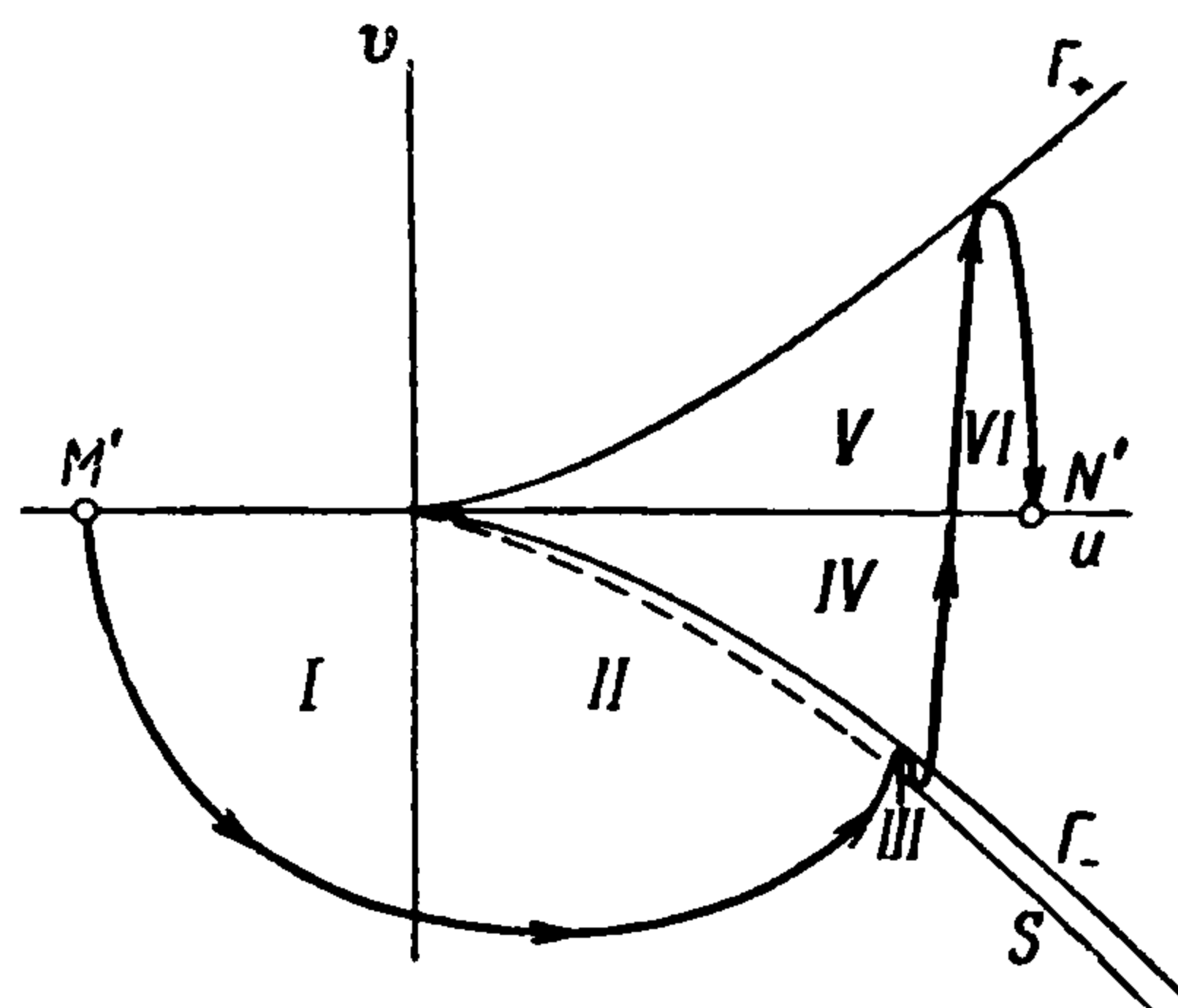
$$f'_{1,2} = 2(\pm\sqrt{5} - 1)\xi \quad (3.14)$$

Это следует также и из того, что точка C — особая для уравнения (3.8). Используя неравенства (3.6), из формул (3.13) можно получить $f_1' < 0$, $f_2' > 0$, т. е. функция f не является монотонной в рассматриваемом интервале. В соответствии с этим величина скорости u сначала убывает,

а затем возрастает в области между особыми характеристиками вдоль линий $r = \text{const}$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Перейдем теперь к исследованию предельного случая, когда течение в плоскости $F\Psi$ изображается K -кривой, проходимой в обратном направлении. В этом случае уравнение (1.8) имеет простое решение:

$$f = \frac{1}{8} A_1^2 (7 - 3\sqrt{5}) - \frac{1}{2} A_1 (3 - \sqrt{5}) \xi \quad (3.15)$$

Величина A_2 выражается через постоянную A_1 формулой

$$A_2 = \frac{1}{2} (7 - 3\sqrt{5}) A_1 \quad (3.16)$$

Из формулы (3.15) следует, что в этом предельном случае f' всюду меньше нуля, т. е. вдоль прямых $r = \text{const}$ скорость в области течения, ограниченной особыми характеристиками, монотонно убывает.

Поскольку течения, отображающиеся в плоскости $F\Psi$ на K -кривую, проходимую в прямом и обратном направлениях, являются предельными, то отсюда легко получить неравенства

$$1 \leq \frac{A_1}{A_2} \leq \frac{2}{7 - 3\sqrt{5}} \quad (3.17)$$

Картина течения интегральных кривых в плоскости ξ/f изображена на фиг. 4. Обе граничные точки $P(\xi_1, f_1)$ и $Q_i(\xi_{2i}, f_{2i})$ лежат на параболе $f = 4\xi^2$, как это непосредственно следует из равенств (3.13). Прямая $f = \frac{1}{4} A_1^2 + A_1 \xi$, соответствующая непрерывному потоку, и прямая $f = \frac{1}{8} A_1^2 (7 - 3\sqrt{5}) - \frac{1}{2} A_1 (3 - \sqrt{5}) \xi$, соответствующая потоку с разрывами первых производных на обеих особых характеристиках, являются предельными. Все остальные интегральные кривые уравнения (1.8), выходящие из точки P и имеющие ограниченную производную на концах рассматриваемого интервала, расположены между ними.

Интересно отметить, что в случае потока со слабыми разрывами на обеих особых характеристиках линии $u = \text{const}$ в области между ними выпуклы в сторону набегающего потока.

Линия нулевой радиальной скорости также выпукла в сторону дозвуковых скоростей и дается равенством

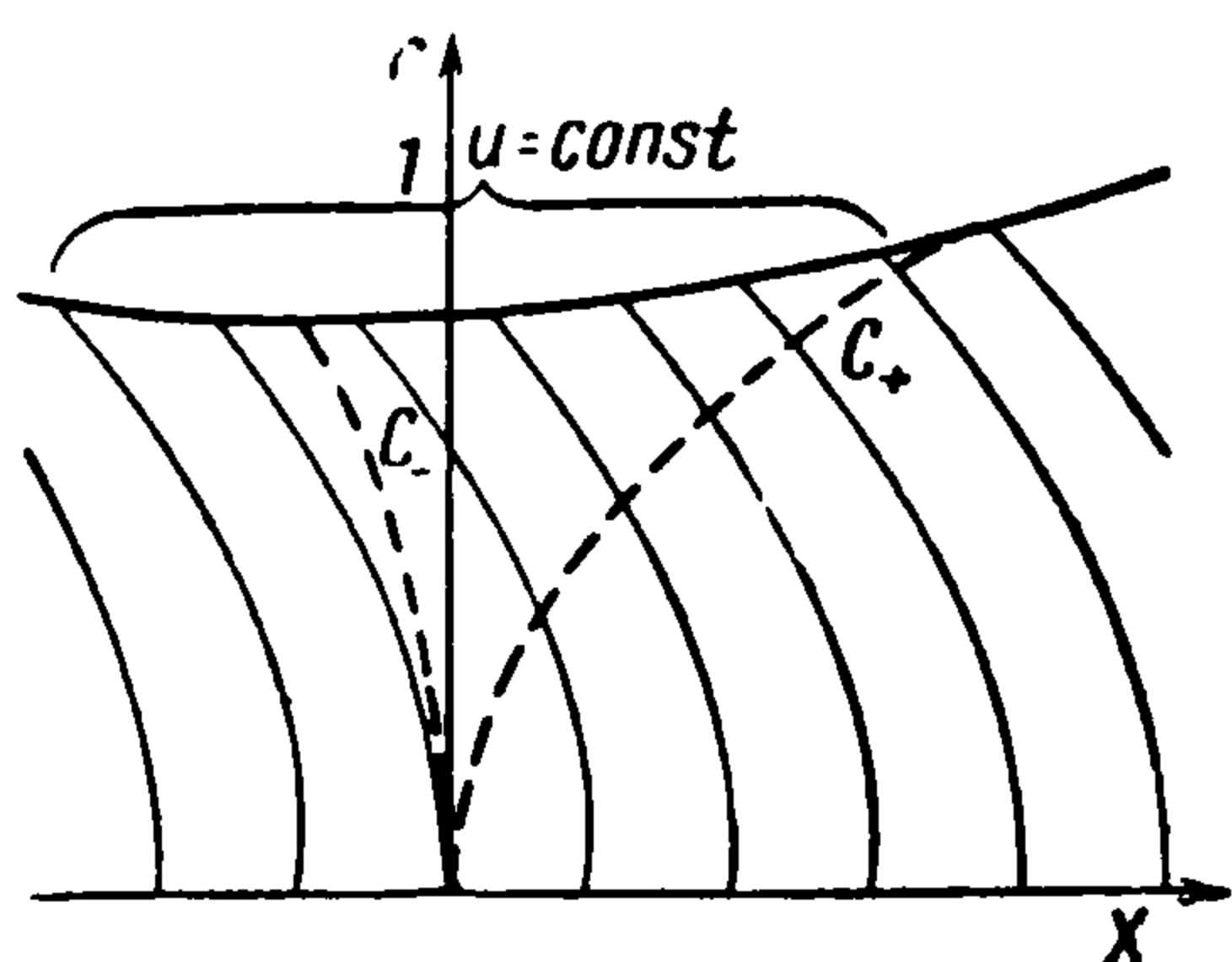
$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{16} A_1 r^2$$

Линия ветвления, описываемая формулой

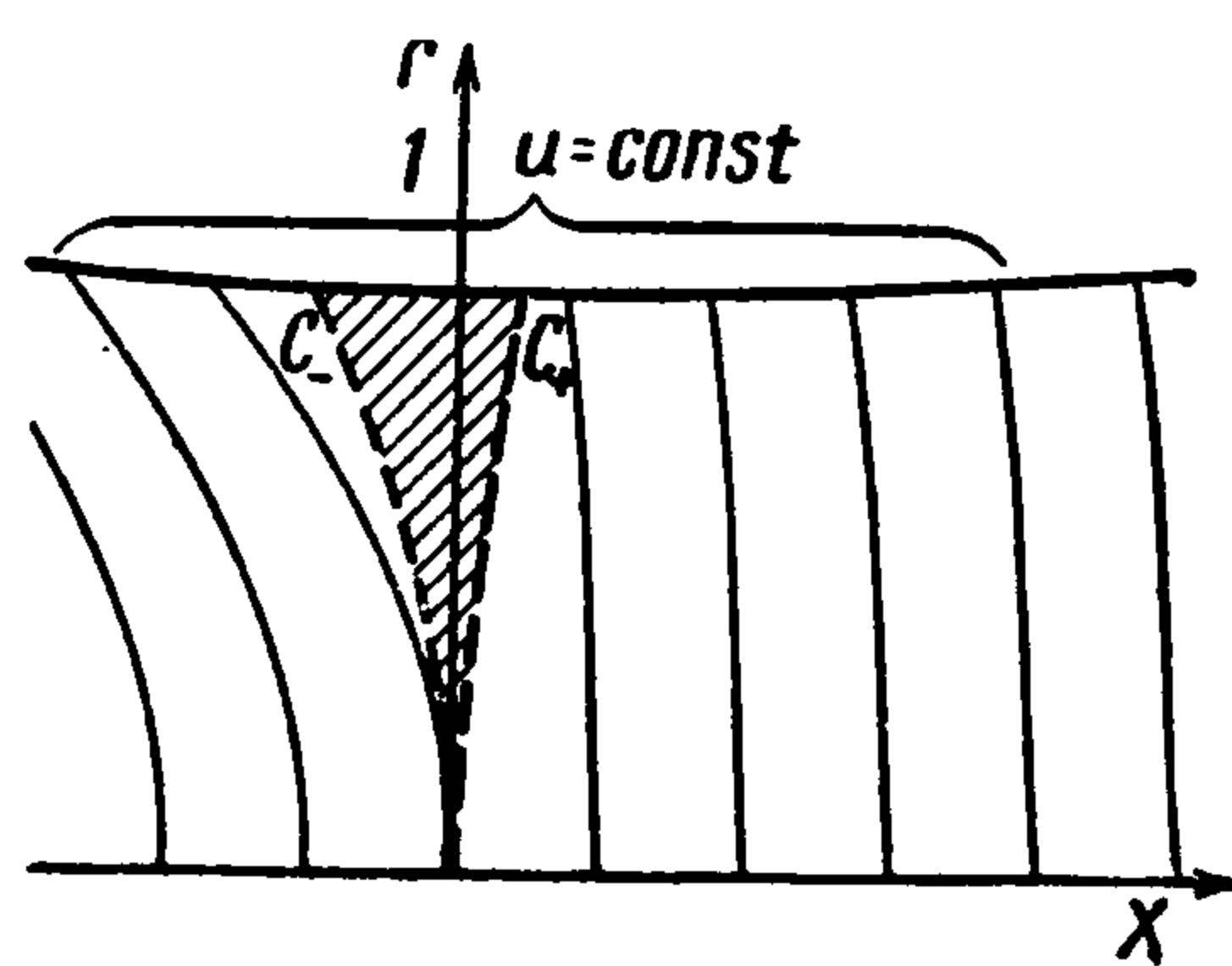
$$x = -\frac{3 - \sqrt{5}}{16} A_1 r^2$$

наоборот, выпукла в сторону сверхзвуковых скоростей. Нетрудно убедиться, кроме того, что якобиан j меняет знак и на обеих особых s° -харак-

теристиках. Поэтому отображение окрестности центра сопла на плоскость uv будет в этом случае значительно сложнее, чем в случае течений в аналитических соплах; оно показано на фиг. 5.



Фиг. 6



Фиг. 7

Картины течений в физической плоскости для случаев непрерывного потока и потока с предельно возможными слабыми разрывами изображены соответственно на фиг. 6 и 7.

На этих фигурах видно, что образование горловины сопла (т. е. самой узкой его части) в случае потоков с разрывами производных на характеристиках сильно затягивается.

§ 4. Плоские сопла. Остановимся вкратце на некоторых свойствах течений в плоских соплах. В этом случае из уравнения неразрывности надо исключить член v/r . Решение уравнений движения можно искать по-прежнему в виде (1.7). Уравнение, аналогичное уравнению (1.8), примет тогда вид [3]:

$$(f - 4\xi^2) f'' + f'^2 + 2\xi f' - 2f = 0 \quad (4.1)$$

С. В. Фалькович приводит общий интеграл полученного уравнения [3].

Нам представляется, однако, полезным для выяснения некоторых свойств изучаемых течений снова воспользоваться методом «фазовой» плоскости $F\Psi$, указанным в § 3.

Так как уравнение (4.1) отличается от уравнения (1.8) только коэффициентами при двух последних членах, то оно также инвариантно по отношению к группе преобразований, отмеченной выше. Воспользовавшись формулами (3.7), приведем его к виду

$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{\Psi^2 + 7\Psi F + 6F^2 - 10\Psi - 6F}{\Psi(4 - F)} \quad (4.2)$$

Общая картина поля интегральных кривых уравнений (4.2) изображена на фиг. 8, где использованы обозначения предыдущего параграфа. Основное решение уравнения (4.1) можно представить в виде [3]

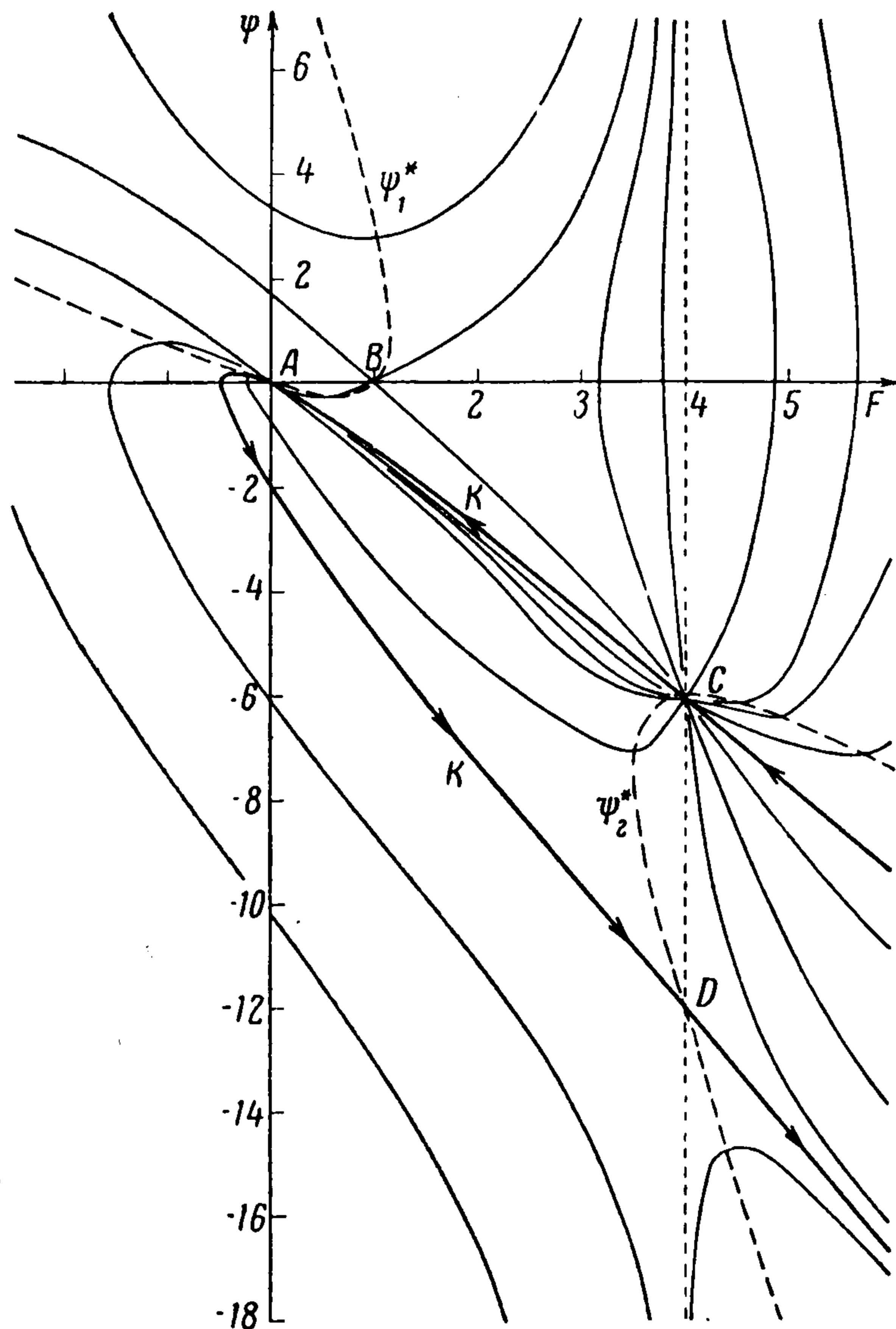
$$f = \frac{1}{2}A^2 + A\xi \quad (4.3)$$

Изображение основного решения в плоскости $F\Psi$ мы будем называть по-прежнему K -кривой; ее уравнение будет

$$\Psi = -(1 + 2F \mp \sqrt{1 + 2F}) \quad (4.4)$$

Движение по K -кривой в направлении, указанном стрелкой (фиг. 8), соответствует течению в аналитическом сопле. По-прежнему течения с разрывами первых производных от составляющих скорости потока по координатам на линиях Маха изображаются в плоскости $F\Psi$ кривыми, выходящими и кончающимися в точке C . В предельном случае течение,

имеющее слабые разрывы, будет отображаться на K -кривую, проходящую в обратном направлении. Если двигаться из точки C по интегральной кривой, расположенной над кривой K , то в соответствующем течении в физической плоскости функция f' обращается в бесконечность.



Фиг. 8

Отсюда легко вывести свойства, указанные впервые Ф. И. Франклем [2], которые, как это показано выше, имеют место и для случаев потоков в круглых соплах. Повторяя рассуждения § 3, можно заключить, что слабых разрывов, вообще говоря, вдоль линии Маха, исходящих из центра сопла и направленных вниз по потоку, не образуется. Исключение составляет лишь предельный случай течения, которое отображается на K -кривую, проходящую в обратном направлении; в таком течении разрывы первых производных имеют место на обеих c° -характеристиках. В этом случае решение уравнения (4.1) имеет вид:

$$f = \frac{1}{8} A_1^2 - \frac{1}{2} A_1 \xi \quad (4.5)$$

Постоянная A_2 выражается тогда через A_1 равенством

$$A_2 = \frac{1}{4} A_1 \quad (4.6)$$

Отсюда имеем [2]

$$1 \leq A_1 / A_2 \leq 4 \quad (4.7)$$

Легко также показать, что в случае течений, изображаемых в плоскости $F\psi$ кривой, начинающейся и кончающейся в точке C ,

$$f_1' = 2\xi_1 < 0, \quad f_2' = 2\xi_2 > 0$$

Отсюда следует по-прежнему, что скорость вдоль прямой $r = \text{const}$ сначала убывает, а затем только возрастает в области между линиями Маха, которые исходят из центра сопла. В случае течения, имеющего разрывы первых производных на обеих особых c° -характеристиках, скорость в области между ними монотонно убывает, что видно непосредственно из равенства (4.5). Далее, величина разрыва $[u_x]$ на c° -характеристике, если задана постоянная A_1 , выражается через нее однозначно. Поведение решений уравнения (4.1) будет качественно таким же, что и кривых,

приведенных на фиг. 4, а картины течений в физической плоскости xr для потоков в аналитических соплах и в соплах со слабыми разрывами на обеих особых c° -характеристиках будут аналогичными изображенным на фиг. 6 и 7. Характер же отображения плоскости xr на плоскость uv во всех рассматриваемых случаях будет одним и тем же, так как в случае плоских течений газа в плоскости годографа существует фиксированная сетка характеристик, которая не зависит от решения уравнений (1.1). Из характера течения интегральных кривых в плоскости $F\psi$ в окрестности точки C можно видеть, что разрывы первых производных на особой c° -характеристике (которые мы всюду называли слабыми разрывами) будут отражаться от центра плоского сопла по c_+° -характеристике в виде разрывов вторых производных от составляющих скорости потока по координатам. От центра круглого сопла слабые разрывы будут отражаться по c_+° -характеристике в виде разрывов третьих производных. В этом смысле утверждение о том, что слабые разрывы не отражаются от центра сопла, которое было сделано выше, неточно.

Остановимся в заключение на особенности рассматриваемых плоских течений, связанной с тем, что c° -характеристики $x = 1/2 A r^2$ совпадают с линией ветвления. Из уравнения (2.3) можно получить, что производная d^2r/dx^2 , которая определяет кривизну c -характеристик, обращается в нуль на линии L . Поэтому каждая c -характеристика одного семейства имеет точку перегиба на рассматриваемой особой c° -характеристике другого семейства. Это свойство связано с неоднозначностью функций $x(u, v)$, $r(u, v)$ в области, ограниченной ветвями полукубической параболы $v^2 = 4/9 u^3$. Для каждой ветви функций $x(u, v)$, $r(u, v)$ в этой области направление вогнутости c -характеристик не изменяется вплоть до линии ветвления, что соответствует результатам С. А. Христиановича [1].

Каждая из особых характеристик $r = \pm \sqrt{2x/A}$ является и геометрическим местом точек, в которых достигают экстремальных значений величины u и v вдоль неособых c -характеристик, поскольку при неоднозначном отображении физической плоскости на плоскость годографа Γ -характеристики одного из семейств проходятся в прямом и обратном направлении. Это свойство связано с тем, что c° -характеристика одного семейства является последней] характеристикой, соединяющей любую неособую c -характеристику другого семейства с линией перехода [5].

Автор признателен С. А. Христиановичу за многочисленные беседы, из которых возникла настоящая работа.

Поступила 5 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Х р и с т и а н о в и ч С. А. О сверхзвуковых течениях газа. Труды ЦАГИ, № 543, 1941.
2. Ф р а н к л ь Ф. И. К теории сопел Лавалья. Известия АН СССР, серия математическая, т. 9, № 5, 1945.
3. Ф а л ь к о в и ч С. В. К теории сопла Лавалья. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
4. Р ы ж о в О. С. Некоторые вырожденные околосзвуковые течения. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.
5. Н и к о л ь с к и й А. А., Т а г а н о в Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения, ПММ, т. X, вып. 4, 1946.