

## ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

М. Н. Коган

(Москва)

§ 1. Введение. Применяемые в аэродинамике уравнения Навье — Стокса справедливы, строго говоря, для течений, характерный размер которых  $L$  много больше длины свободного пробега молекул  $\lambda$ .

Для больших  $\lambda$  (т. е. для менее плотных газов) или меньших  $L$  (т. е. для течений с большими градиентами) движение газа нельзя, вообще говоря, трактовать как движение сплошной среды, а нужно учитывать его молекулярную структуру. Движение одноатомного газа (в котором тройные столкновения молекул чрезвычайно редки, а взаимодействие молекул сказывается лишь при столкновениях молекул, происходящих в промежутки времени, малые в сравнении с временем между столкновениями) в кинетической теории газов принято характеризовать функцией распределения  $f(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(x_i, \xi_i)$ .

Функция распределения нормируется таким образом, что выражение  $f(x_i, \xi_i) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = f d\mathbf{q}$  представляет собой число молекул в единице объема вокруг точки  $x_i$ , движущихся со скоростями между  $\xi_i$  и  $\xi_i + d\xi_i$ . Через функцию распределения выражаются гидродинамические величины:

$$\rho(x_i, t) = mn = m \iiint f(x_i, t, \xi_i) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = m \int f d\mathbf{q} \quad (\text{плотность}) \quad (1.1)$$

$$u_i(x_i, t) = \frac{1}{n} \int f \xi_i d\mathbf{q} \quad (\text{средняя скорость молекул}) \quad (1.2)$$

$$\frac{3}{2} kT(x_i, t) = \frac{m}{2n} \int f c^2 d\mathbf{q} \quad (\text{температура}) \quad (1.3)$$

$$p = knT \quad (\text{давление}) \quad (1.4)$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана,  $m$  — масса молекулы,  $n$  — число молекул в единице объема и  $c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ , где  $c_i = \xi_i - u_i$  — скорость молекул относительно координат, движущихся со средней скоростью молекул  $u_i$ . Выражения типа

$$\int f(x_i, t, \xi_i) c_i^\alpha c_i^\beta c_i^\gamma d\mathbf{q}$$

называют моментами. Простую физическую трактовку имеют моменты

$$P_{ij} = m \int f c_i c_j d\mathbf{q} = p_{ij} + p \delta_{ij} \quad (\text{тензор напряжений}) \quad (1.5)$$

$$\delta_{ij} \quad (\text{символ Кронекера})$$

$$q_i = \frac{m}{2} \int f c^2 c_i d\mathbf{q} \quad (\text{вектор потока энергии}) \quad (1.6)$$

Функция распределения в отсутствие массовых сил удовлетворяет уравнению Больцмана

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial t_i} = 2\pi \iiint (f^* f' - f f^*) g b db d\mathbf{q}^* = \Phi \quad (1.7)$$

Правая часть уравнения Больцмана дает изменение числа молекул со скоростями в интервале  $[\xi_i, \xi_i + d\xi_i]$  вследствие столкновения с молекулами, обладающими скоростями в интервале  $[\xi_i^*, \xi_i^* + d\xi_i^*]$ .

В (1.7)  $g = |\mathbf{q} - \mathbf{q}^*|$  — модуль относительной скорости сталкивающихся молекул,  $b$  — прицельное расстояние. Интегрирование ведется по всевозможным скоростям  $\mathbf{q}^*$  налетающих молекул и по прицельным расстояниям от  $b = 0$  до некоторого  $b_{\max}$  такого, что при  $b > b_{\max}$  можно считать потенциал взаимодействия молекул  $\varphi$  равным нулю<sup>1</sup>. Штрихи над  $f$  и  $f^*$  в правой части (1.7) показывают, что эти функции берутся соответственно для скоростей  $\xi_i'$  и  $\xi_i''$  молекул после столкновения. Эти скорости определяются скоростями молекул до столкновения, их прицельным расстоянием и законом взаимодействия молекул. Структура правой части уравнения даже для простейших законов взаимодействия молекул оказывается очень сложной, что составляет одну из основных трудностей применения уравнения (1.7).

Если уравнение (1.7) умножить на  $m$ ,  $m\xi_i$  или  $\frac{1}{2}m\xi_i^2$  и проинтегрировать по  $q$ , то интеграл в правой части тождественно пропадает [1, 2], а в левой части получим соответственно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (\text{уравнение сохранения массы}) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{уравнения движения}) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p) + \frac{2}{3} P_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{уравнение потока тепла}) \quad (1.10)$$

Продолжая этот процесс дальше (т. е. умножая (1.7) на  $c_i^\alpha c_j^\beta c_k^\gamma$  и интегрируя), получим уравнения для  $P_{ij}$ ,  $q_i$  и более высоких моментов<sup>3</sup>. Однако правые части уравнений теперь не обращаются тождественно в нуль, а будут выражаться в общем случае через моменты всех порядков. Получающаяся совместная бесконечная система уравнений эквивалентна уравнению Больцмана (1.7).

Однако эта система настолько сложна, что при ее помощи до сих пор получены лишь весьма вырожденные точные решения.

Уравнения (1.8)–(1.10) определяют все гидродинамические величины  $\rho$ ,  $u_i$  и  $p$ . Для того чтобы эта система стала замкнутой, необходимо тензор напряжений  $P_{ij}$  и вектор потока тепла  $q_i$  выразить через гидродинамические величины и производные от них. Однако легко показать, что не при всяком числе Кнудсена  $K = \lambda/L$  это возможно.

<sup>1</sup> Принимается, что потенциал обладает сферической симметрией.

<sup>2</sup> Т. е. на так называемые сумматорные инварианты.

<sup>3</sup> Различные формы соответствующих бесконечных систем уравнений получены Грэдом [2] и Трусделем [3].

Действительно, пусть имеются две пластины с температурами  $T_1$  и  $T_2$  (для определенности  $T_1 > T_2$ ), расположенные на расстоянии  $L$  одна от другой. Если длина свободного пробега  $\lambda \gg L$ , то температура между пластинами  $T_1 (T_2 < T_1 < T_1)$  будет постоянной. Тем не менее тепло будет передаваться от пластины 1 к пластине 2, т. е. в этом случае  $q_i$  в некоторой внутренней точке не может быть выражено через гидродинамические величины в этой же точке и их производные любого порядка. С другой стороны, при  $\lambda \ll L$  применимы уравнения Навье — Стокса, которые получаются из (1.8)—(1.10) известной заменой  $P_{ij}$  и  $q_i$  через производные от гидродинамических величин. Поэтому можно думать, что если вообще возможно  $P_{ij}$  и  $q_i$  представить в виде функции от гидродинамических величин и их производных, то это может быть сделано лишь для некоторого диапазона слаборазреженных газов.

Для малых чисел Кнудсена Энског<sup>[1]</sup> ищет функцию распределения в виде ряда

$$f = f_0 + Kf_1 + K^2f_2 + \dots \quad (1.11)$$

Правая часть уравнения (1.7) имеет порядок  $K^{-1}$ . Поэтому, подставляя ряд для  $f$  в (1.7) и приравнивая члены при равных степенях  $K$ , получим рекуррентную систему интегральных уравнений для определения  $f_0, f_1$ . Решением уравнения для  $f_0$  будет равновесная функция Максвелла

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2k\pi T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2kT} c^2 \right)$$

Если ограничиться этим приближением, то  $P_{ij} = p\delta_{ij}$  и  $q_i = 0$  и уравнения (1.8)—(1.10) станут уравнениями Эйлера.

Подставляя найденное  $f_0$  в интегральное уравнение для  $f_1$  и решая его, найдем  $f_1$ . Ограничиваясь двумя членами ряда, получим уравнения Навье — Стокса. В следующем приближении получатся уравнения Барнета<sup>[1,4]</sup> и т. д. Однако решение получающихся интегральных уравнений чрезвычайно сложно и уже в барнетовском приближении приходится искать решение для функции распределения частного вида.

Гред<sup>[2]</sup> нашел эти же приближения несколько иным путем для максвелловских молекул, применив метод итераций к упрощенной системе уравнений для моментов. Для упрощения пришлось ограничиться отысканием уравнений, соответствующих функции распределения частного вида, что заставляет сомневаться в том, что выписаны все члены уравнений.

В настоящей работе уравнение Больцмана упрощается таким образом, что из него не только легко найти функцию распределения в любом приближении, но также легко найти и остаток ряда, что позволяет в каждом конкретном случае оценить погрешность принятого приближения для течения слаборазреженного газа.

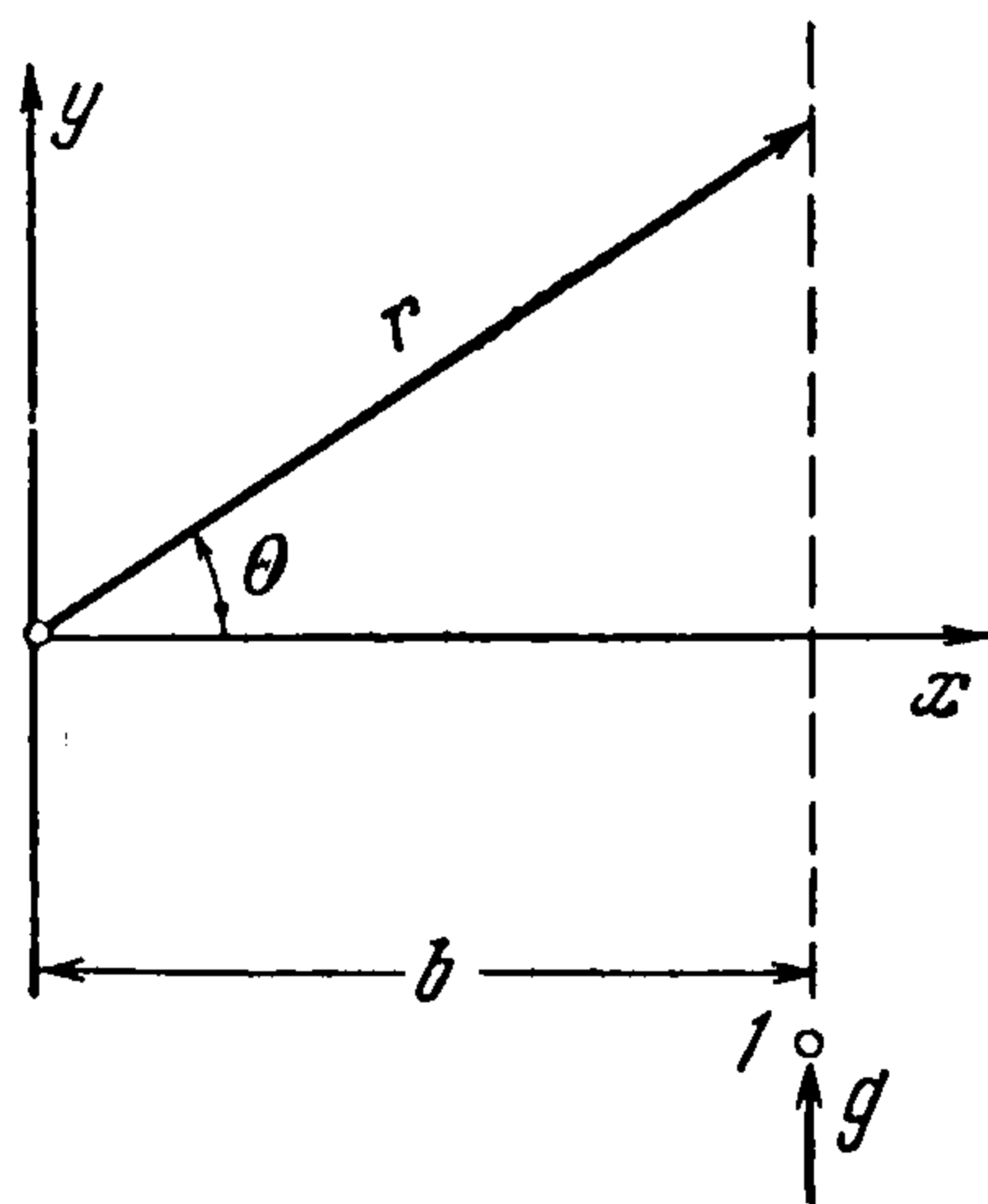
Полученное в настоящей работе приближенное уравнение Больцмана позволяет в этом случае существенно упростить расчеты.

**§ 2. Упрощение уравнения Больцмана.** Правую часть уравнения (1.7) можно представить в виде разности

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (2.1)$$

в которой  $\Phi_2$  определяет число молекул, имеющих скорости в интервале  $[\xi_i, \xi_i + d\xi_i]$  и изменивших ее в результате столкновений, а  $\Phi_1$  — число молекул, в результате столкновений приобретших эту скорость.

Рассмотрим какую-нибудь из молекул, обладающих скоростью  $\xi_i$ . Число таких молекул в данный момент времени  $t$  в единице объема вокруг точки  $x_i$  равно  $f(x_i, t, \xi_i) = f$ . Рассмотрим столкновения этой молекулы с молекулами, обладающими скоростями  $\xi_i^*$  [число таких молекул в единице объема равно  $f(x_i, t, \xi_i^*)$ ]. Примем максвелловский закон взаимодействия молекул, т. е. что сила взаимодействия молекул  $F = ar^{-5}$ , где  $r$  — расстояние между молекулами и  $a$  — постоянная. Строго говоря, молекула 2 со скоростью  $\xi_i$  взаимодействует с молекулами 1 со скоростями  $\xi_i^*$  при любом прицельном расстоянии  $b$ . Однако чем больше прицельное расстояние, тем меньше взаимодействующие молекулы изменяют движение друг друга. Поэтому из каждой группы взаимодействующих молекул целесообразно выбрать лишь те, которые при столкновении наиболее сильно изменяют свой импульс и энергию. Рассмотрим столкновения молекул (фиг. 1) в координатах, движущихся со скоростью  $\xi_i$  молекулы 2 до столкновения. Ось  $y$  направим по направлению относительной скорости  $g$ . Составляющие скорости молекулы 1 после столкновения равны



Фиг. 1

где  $\alpha$  — отклонение молекулы 1. Пусть  $b$  таково, что отклонение  $\alpha$  мало. Тогда изменение импульса будет порядка  $mg\alpha$ . С другой стороны, импульс, получаемый молекулой 1 при максвелловском законе взаимодействия, равен (фиг. 1)

$$V_{1x} = \frac{1}{2} g \sin \alpha, \quad V_{1y} = \frac{1}{2} g \cos \alpha + \frac{1}{2} g$$

Поэтому отношение изменения импульса к характерному изменению импульса  $mg$  будет

$$\int F \cos \theta dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F \cos \theta \frac{dy}{g} = \int_{\pi/2}^{3/2} \frac{a}{b^4 g} \cos^5 \theta d\theta = \frac{\text{const}}{b^4 g}$$

Поэтому отношение изменения импульса к характерному изменению импульса  $mg$  будет

$$\frac{mg\alpha}{mg} \sim \frac{\text{const}}{b^4 g^2}$$

Если мы потребуем, чтобы это отношение при  $b$ , равном эффективному радиусу столкновений  $b^\circ$ , равнялось некоторой малой величине, одинаковой для всех столкновений (т. е. всех  $g$ ), то эффективный радиус столкновений  $b^\circ$  должен быть связан с  $g$  соотношением  $b^\circ = \text{const } g^{-1/2}$ . Тогда эффективное сечение столкновений  $\sigma^\circ$  равно

$$\sigma^\circ = A/g \quad (2.2)$$

где  $A$  — константа, зависящая от сорта молекул. Эта же зависимость получается из рассмотрения изменения энергии.

Таким образом, из всех столкновений, испытываемых молекулой 2 с молекулами 1, мы будем учитывать лишь те, которые заключены внутри цилиндра высотой  $g$ , и площадь основания которого равна  $\sigma^\circ = A/g$ .

Число таких молекул, очевидно, равно  $Af^*$ . Тогда общее число столкновений, испытываемое молекулами со скоростями  $\xi_i$ , будет

$$\Phi_2 = Af \int f^* d\mathbf{q} = Anf \quad (2.3)$$

Таким образом, часть интеграла столкновений  $\Phi_2$  представлена в простой форме. Для упрощения наиболее сложной части интеграла столкновений  $\Phi_1$  предположим, что столкнувшиеся молекулы в результате столкновения приобретают наиболее вероятное распределение при заданных числе молекул, их импульсе и энергии. Согласно (2.3) число сталкивающихся молекул равно

$$\int Anf d\mathbf{q} = An^2 \quad (2.4)$$

Их импульс и средняя кинетическая энергия (температура) соответственно равны

$$m \int Anf \xi_i d\mathbf{q} = Amu_i n^2, \quad \frac{m}{2} \int Anf c^2 d\mathbf{q} = \frac{3}{2} kT n^2 A \quad (2.5)$$

Тогда наиболее вероятным распределением будет, как легко видеть, распределение Максвелла

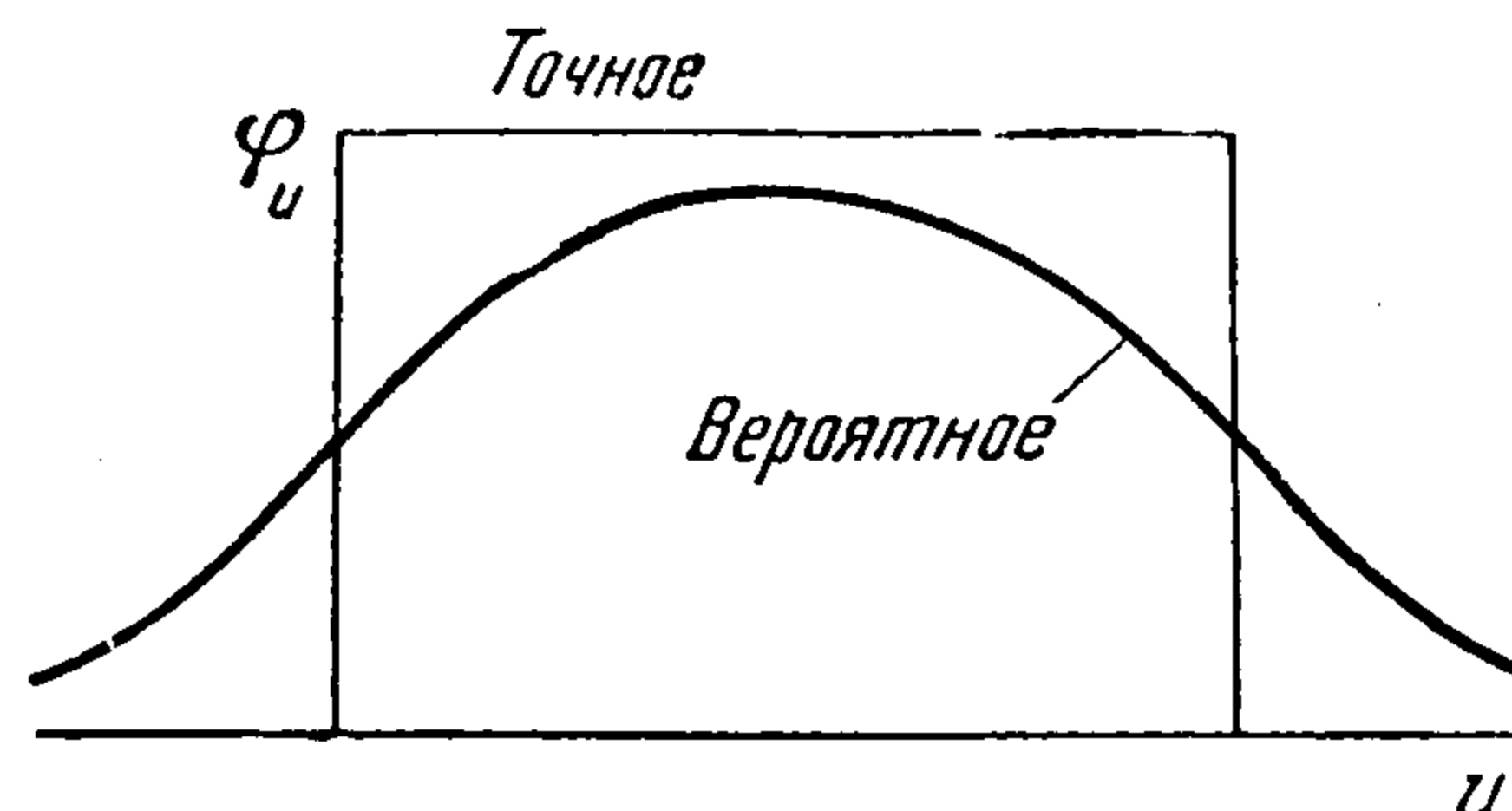
$$\Phi_1 = An^2 \left( \frac{m}{2k\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right) = Anf_0 \quad (2.6)$$

где  $f_0$  — функция распределения Максвелла, соответствующая данной функции  $f$ . Таким образом, функция распределения столкнувшихся молекул в нашем случае пропорциональна максвелловскому распределению, соответствующему параметрам всего потока.

Предположение о наиболее вероятном распределении молекул после столкновения оправдывается следующими соображениями. Известно (см. [2], а также § 3 настоящей работы), что, каково бы ни было распределение молекул, оно стремится к равновесному (наиболее вероятному) по экспоненциальному закону. При этом время релаксации имеет порядок времени между столкновениями, т. е. когда молекулы столкнутся один раз, распределение молекул существенно приблизится к равновесному.

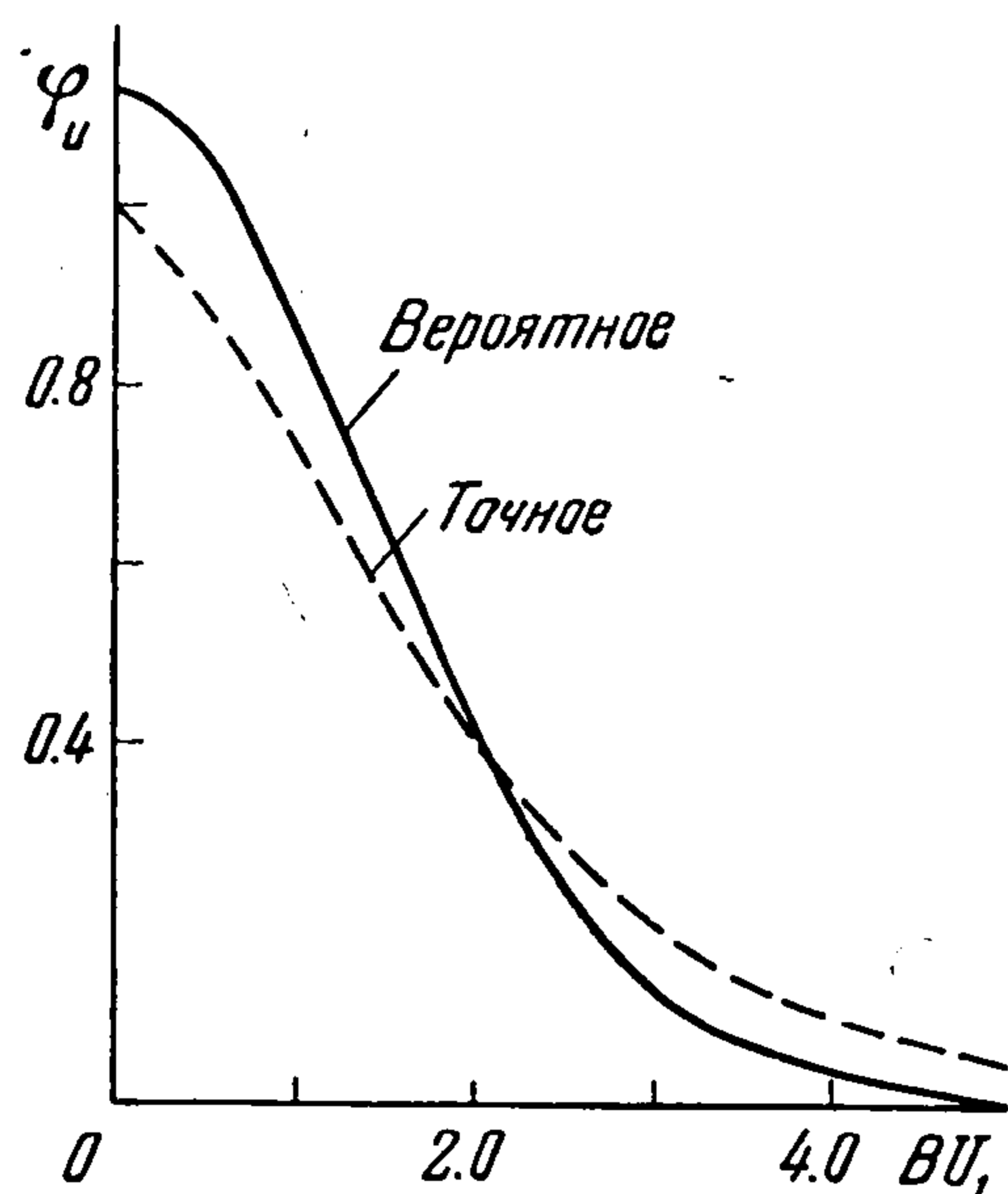
На фиг. 2, 3 и 4 приведены примеры стремления к равновесному распределению для трех вырожденных простейших случаев, весьма далеких от равновесия до столкновения; все случаи посчитаны для твердых шаров. В каждом из случаев сталкивались две группы шаров, из которых одна до столкновения покоилась. Другая же группа двигалась в случае, представленном на фиг. 2, с постоянной скоростью. На этой фигуре приведено распределение молекул по скоростям в направлении первоначального движения молекул второй группы. На фиг. 3 представлен результат столкновения молекул для случая, когда вторая группа состоит из двух равных частей, движущихся друг на друга с распределением  $B|u|e^{-k|u|}$ , где  $B$  и  $k$  — постоянные. В третьем случае (фиг. 4) вторая группа молекул двигалась со сферической симметрией к центру с распределением молекул по скоростям  $Bc^2 e^{-kc}$ .

Все эти примеры показывают, что после одного столкновения распределение скоростей становится весьма близким к равновесному. Ко-

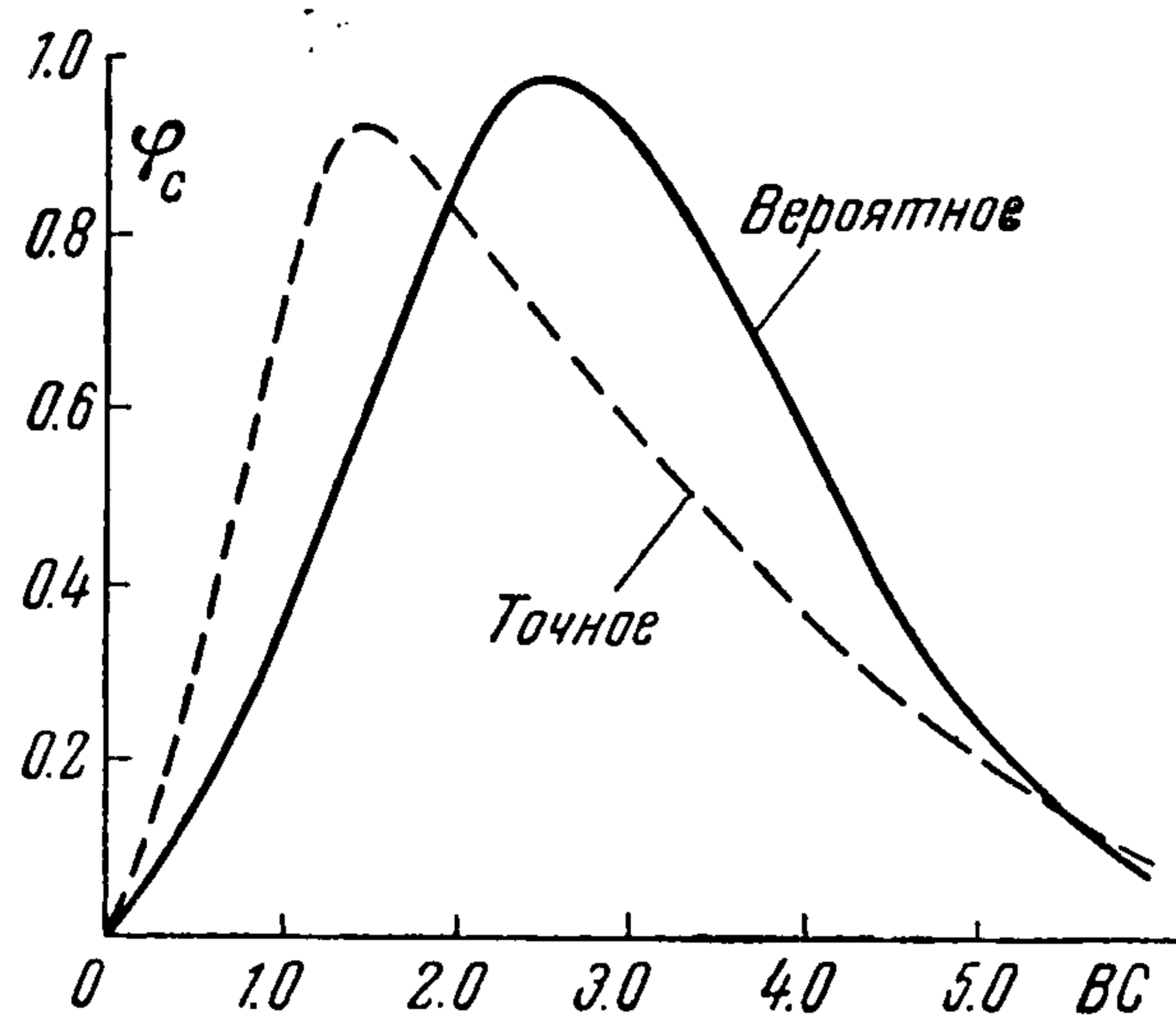


Фиг. 2

нечно, можно придумать специальные примеры, когда это не так. Однако такие случаи должны встречаться чрезвычайно редко.



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, уравнение Больцмана (1.7) мы можем переписать в следующей простой приближенной форме

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = An(f_0 - f) \quad (2.7)$$

Правая часть уравнения Больцмана в виде, аналогичном (2.7), применялась многими авторами на том основании, что для состояний, близких к равновесию, скорость стремления к равновесию пропорциональна отклонению от равновесного состояния. В работе [5] аналогичное уравнение без обоснований применено для всех чисел Кнудсена. Приведенный выше анализ показывает, при каких предположениях уравнение Больцмана можно представить в форме (2.7). В частности, из анализа следует, что уравнение (2.7) непригодно при кулоновском взаимодействии, для которого оно применялось в работе [5].

**§ 3. Уравнения движения слабозреженных газов.** Считая входящие в  $f_0$  гидродинамические величины  $\rho$ ,  $u_i$  и  $T$  заданными, можно записать решение уравнения (2.7) в виде

$$f(x_{i0} + \xi_i t, t, \xi_i) = \frac{1}{M(t)} \left\{ A \int_0^t n f_0 M(t) dt + f(x_{i0}, 0, \xi_i) \right\}, \quad M(t) = \exp \int_0^t A n dt \quad (3.1)$$

Интегрируя последовательно по частям, получим

$$f = \sum_{k=0}^N a_k(x_{i0} + \xi_i t, t, \xi_i) + \quad (3.2)$$

$$+ \frac{1}{M(t)} \left[ f(x_{i0}, 0, \xi_i) - \sum_{k=0}^N a_k(x_{i0}, 0, \xi_i) \right] + \frac{1}{M(t)} \int_0^t \frac{da_N}{dt} M(t) dt$$

$$\left( a_k = \frac{(-1)^k}{An} \frac{da_{k-1}}{dt}, \quad a_0 = f_0 \right)$$

Если при  $N \rightarrow \infty$  ряд сходится во всех точках области, то (3.2) переходит в ряд Энскогога (1.11). Интересно отметить, что в этом случае

функция распределения (а следовательно, и все моменты) в некоторой точке течения полностью определяется гидродинамическими величинами и производными от них и не зависит непосредственно от граничных условий.

Если же точка  $(x_i, 0, \xi_i)$  находится в области, в которой ряд Энскага не сходится (например, внутри сильного скачка уплотнения), то граничные условия тождественно не пропадают. Однако на расстояниях в несколько свободных пробегов молекул от этой области (например, от скачка) множитель  $M^{-1}$  в (3.2) становится столь малым, что в этой точке можно пользоваться конечным отрезком ряда, содержащего лишь параметры, соответствующие данной точке.

Формула (3.2) позволяет не только выписать все члены ряда Энскага, но дает и выражение для остатка ряда, что в каждом конкретном случае позволяет оценить погрешность принятого приближения. Из вида остаточного члена очевидна асимптотическая сходимость ряда для больших  $An$  (т. е. для слаборазреженных газов).

Подставляя функцию распределения (3.2) в (1.5) и (1.6), найдем  $P_{ij}$  и  $q_i$ , выраженные через гидродинамические величины и их производные.

Так, ограничиваясь двумя членами (приближение Навье — Стокса), получим

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - \frac{kT}{A} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \frac{kT}{A} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.3)$$

$$q_i = - \frac{5}{2} \frac{k^2 T}{Am} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Таким образом, для коэффициентов вязкости  $\mu$  и теплопроводности  $\lambda$  получаем

$$\mu = \frac{kT}{A}, \quad \lambda = \frac{5}{2} \frac{k^2 T}{Am} = \frac{5}{2} \frac{k}{m} \mu \quad (3.4)$$

Из точного уравнения Больцмана также получается для максвелловских молекул линейная зависимость  $\lambda$  и  $\mu$  от температуры. Однако коэффициент связи  $\lambda$  с  $\mu$  в точной теории равен  $15/4$ , а не  $5/2$ .

Рассмотрим некоторое состояние молекул, когда  $u_i = 0$ ,  $n = \text{const}$  и  $T = \text{const}$  во всем пространстве, а  $P_{ij}$ ,  $q_i$  и другие моменты не равны нулю. Тогда функция распределения удовлетворяет уравнению

$$\frac{df(t)}{dt} = An(f_0 - f) \quad (3.5)$$

где  $n$  и  $f_0$  — постоянные по времени и пространству. Решением этого уравнения, очевидно, будет выражение

$$f(t) = f_0(t) + e^{-Ant} [f(0) - f_0(0)] \quad (3.6)$$

Тогда для моментов имеем

$$p_{ij}(t) = e^{-Ant} p_{ij}(0), \quad q_i(t) = e^{-Ant} q_i(0) \text{ и т. д.}$$

или, исключая при помощи (3.4)  $A$ , получим

$$p_{ij}(t) = e^{-t/\tau} p_{ij}(0), \quad q_i(t) = e^{-t/\tau} q_i(0) \text{ и т. д.} \quad (3.7)$$

где  $\tau = \mu / p$  — время релаксации.

Точное же решение для этого случая будет [2]

$$p_{ij}(t) = e^{-t/\tau} p_{ij}(0), \quad q_i(t) = e^{-\frac{1}{2}t/\tau} q_i(0) \text{ и т. д.}$$

Здесь опять точное и приближенное решения отличаются константами.

Наконец, для сравнения приводим эквивалентную уравнению Больцмана бесконечную систему уравнений для моментов в случае максвелловских молекул [2] и параллельно (справа) систему, полученную из (2.7), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + \dots &= -A_n p_{ij}, & \frac{\partial p_i}{\partial t} + \dots &= -A_n p_i \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + \dots &= -\frac{2}{3} A_n q_i, & \frac{\partial q_i}{\partial t} + \dots &= -A_n q_i \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

точная и приближенная системы отличаются лишь коэффициентами.

Можно было бы при помощи ряда (3.2) вывести уравнения Бернета и более высокие приближения. Однако сложность уже барнетовского приближения оставляет мало надежд на возможность их использования.

Уравнение (2.7) и формулу (3.1) целесообразно использовать для оценки остаточного члена ряда Энского и в тех случаях, когда для анализа нужен явный вид самой функции распределения.

**§ 4. Движения сильно разреженного газа.** При больших числах Кнудсена ( $\lambda/L \gg 1$ ) влияние столкновений мало и в первом приближении ими можно пренебречь. Тогда уравнение Больцмана имеет решение

$$f^{(0)}(x_{i0} + \xi_i t, t, \xi_i) = f(x_{i0}, 0, \xi_i) \quad (4.1)$$

Поэтому по заданным граничным и начальным условиям легко находится распределение скоростей молекул в любой точке области, а следовательно, в первом приближении  $n^{(0)}$ ,  $T^{(0)}$ ,  $u_i^{(0)}$  и  $f_0^{(0)}$ . Подставляя найденные  $f^{(0)}$  и  $f_0^{(0)}$  в правую часть приближенного уравнения Больцмана, получим уравнения для определения  $f^{(1)}$  и т. д.

Поскольку при больших разрежениях роль столкновений сравнительно невелика, то можно надеяться, что принятые при упрощении уравнения Больцмана предположения будут вполне приемлемы для расчетов течений, близких к свободномолекулярным.

Вообще в тех случаях, когда приближенное уравнение Больцмана не может обеспечить необходимой точности, его следует рассматривать как математическую модель точного уравнения Больцмана, на которой благодаря сравнительной простоте приближенного уравнения можно исследовать поведение функции распределения.

Поступила 28 V 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chapman and Cowling. The Mathematical theory of non — uniform gases, 1937.
2. Grad. On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. pure and applied math. Vol. 2, No. 4, 1949.
3. Truesdell. Kinetic theory of gases. J. rational mech. and analysis. Vol. 5, No. 1, 1956.
4. Burnett. The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas. Proc. Lond. Mathem. Soc. 40 pp. 382—435, 1935.
5. Rhatnagar, Gross and Crook. A Model for Collision Processed in Gases, Phys. Rev. 94, 511, 1954.