О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ШАРОВОМ СЛОЕ

И. Г. Севрук

(Пермь)

Получено приближенное решение задачи о слабой нестационарной тепловой конвекции в жидкости, заключенной между двумя концентрическими сферическими стенками, поддерживаемыми при постоянной температуре, в предположении, что в начальный момент жидкость покоилась и имела везде одинаковую температуру, отличную от температуры стенок. Найдены температура и скорость жидкости в нулевом и первом приближениях в смысле разложения этих величин по степеням числа Релея. И, наконец, рассматривается в тех же приближениях влияние конвекции на скорость остывания жидкости.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о нестационарной тепловой конвекции в жидкости, помещенной в полость между двумя концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$, поддерживаемыми при постоянной температуре T_1, если в начальный момент жидкость покоилась и имела постоянную температуру $T_2 \neq T_1$.

Воспользуемся известными уравнениями свободной тепловой конвекции [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T', \qquad \frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla T') = \chi\Delta T', \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, T' и p' — температура и давление, отсчитываемые от значений, которые они имели бы в механическом и тепловом равновесии при некоторой средней температуре, ρ — средняя плотность жидкости, ν, β, χ — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и температуропроводности жидкости, $\mathbf{g}$ — ускорение тяжести.

Давление p' исключим, применив к (1.1) операцию rot; получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} + \nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} - \operatorname{rot}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] = \beta[\mathbf{g}\nabla T'] \tag{1.2}$$

Введем безразмерные величины

$$\mathbf{u} = \frac{l}{\chi}\mathbf{v}, \qquad \tau = \frac{T'}{T_2 - T_1}, \qquad \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}}{l}, \qquad t_1 = \frac{\nu}{l^2}t \tag{1.3}$$

где $l = R_2 - R_1$. Сохраняя в дальнейшем для безразмерных времени и координат прежние обозначения, получим следующие безразмерные уравнения задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} - \frac{1}{N_{\mathrm{Pr}}}\operatorname{rot}[\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{u}] = N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}}[\nabla\tau\mathbf{k}] \tag{1.4}$$

$$\Delta\tau = (\mathbf{u}\nabla\tau) + N_{\mathrm{Pr}}\frac{\partial\tau}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \left(N_{\mathrm{Pr}} = \frac{\nu}{\chi}\right) \text{— число Прандтля}$$

$$N_{\mathrm{Gr}} = -\frac{g\beta(T_2 - T_1)l^3}{\nu^2} \text{— число Грасгофа}, \qquad \mathbf{k} = -\frac{\mathbf{g}}{g} \tag{1.5}$$

Если отсчитывать температуру T жидкости от значения T_1, то $T' = T - T_1$ и $\tau = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$. Следовательно, на границе полости температура τ равна нулю в любой момент времени, а в начальный момент времени она равна единице:

$$\tau(\Gamma,\ t) = 0, \qquad \tau(\mathbf{r},\ 0) = 1 \tag{1.6}$$

Скорость $\mathbf{u}$ жидкости на границе полости принимаем все время равной нулю, а в начальный момент времени она, в соответствии с постановкой задачи, равна нулю во всем объеме жидкости:

$$\mathbf{u}(\Gamma,\ t) = \mathbf{u}(\mathbf{r},\ 0) = 0 \tag{1.7}$$

Имея в виду слабую конвекцию, искомые величины из уравнений (1.4) можно искать в виде рядов по степеням числа Грасгофа [2]. Так как число Грасгофа входит в уравнения задачи только в комбинации $N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}}$, называемой числом Релея, то искомые величины можно разлагать по степеням числа Релея:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}}) + \mathbf{u}_2(N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}})^2 + \ldots, \qquad \tau = \tau_0 + \tau_1(N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}}) + \tau_2(N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}})^2 + \ldots \tag{1.8}$$

Ограничиваясь нулевым и первым приближениями по числу Релея, будем иметь следующие уравнения задачи:

$$\triangle\tau_0 = N_{\Pr}\frac{\partial\tau_0}{\partial t}, \qquad \triangle\tau_1 = N_{\Pr}\frac{\partial\tau_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1\nabla\tau_0) \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = [\nabla\tau_0\mathbf{k}], \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}_1 = 0 \tag{1.10}$$

§ 2. **Нулевое приближение.** Уравнение нулевого приближения (1.9) описывает, очевидно, процесс остывания нагретой жидкости путем молекулярной теплопроводности (для определенности принято $T_2 > T_1$).

Из соображений симметрии следует, что $\tau_0 = \tau_0(r, t)$, где r — безразмерное расстояние, отсчитываемое от центра сферы.

В сферических координатах первое уравнение (1.9) примет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\tau_0) = N_{\Pr}\frac{\partial}{\partial t}(r\tau_0) \tag{2.1}$$

В соответствии с принятыми граничными и начальными условиями задачи потребуем, чтобы решение уравнения (2.1) удовлетворяло следующим условиям:

$$\tau_0(r_1, t) = \tau_0(r_2, t) = 0, \qquad \tau_0(r, 0) = 1 \qquad \left(r_1 = \frac{R_1}{l}, \quad r_2 = \frac{R_2}{l} = r_1 + 1\right)$$

Решая задачу по методу Фурье, находим

$$r\tau_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{N_{\Pr}}t\right)\sin n\pi(r - r_1) \qquad \left(A_n = \frac{2}{n\pi}(r_1 - r_2\cos n\pi)\right) \tag{2.2}$$

§ 3. **Первое приближение.** 1. Сперва найдем скорость жидкости. Для этого нужно решить уравнения (1.10) с учетом (2.2) при соответствующих граничных и начальных условиях.

Заметим, что движение жидкости симметрично относительно вертикального диаметра сферы. Введем безразмерную функцию тока $\psi = \psi(r, \theta, t)$. Для проекций скорости $\mathbf{u}_1$ на оси сферической системы координат будем иметь

$$u_{1r} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad u_{1\theta} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{3.1}$$

Будем искать функцию тока ψ в виде

$$\psi = f(r, t)\sin^2\theta \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), а затем результат в (1.10), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{2f}{r^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2f}{r^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\frac{2f}{r^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) = r\frac{\partial\tau_0}{\partial r} \tag{3.3}$$

Из условий (1.7) вытекают следующие условия:

$$f(r_1, t) = f(r_2, t) = 0, \qquad f'(r_1, t) = f'(r_2, t) = 0, \qquad f(r, 0) = f'(r, 0) = 0 \tag{3.4}$$

(штрих здесь и в дальнейшем обозначает дифференцирование по r). Решение неоднородного линейного уравнения (3.3) будем искать в виде

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r)\,S_k(t) \tag{3.5}$$

где

$$R_k(r) = \frac{\sqrt{r}}{\lambda_k^2}\left[C_k^{(1)}J_{3/2}(\lambda_k r) + C_k^{(2)}J_{-3/2}(\lambda_k r)\right] + C_k^{(3)}r^2 + \frac{C_k^{(4)}}{r} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

собственные функции однородной задачи, соответствующей неоднородной задаче (3.3), (3.4), а $S_k(t)$ — пока неопределенные функции.

В равенстве (3.6) λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — корни уравнения

$$3(r_1^2 + r_2^2)\cos\lambda + (r_2^3 - r_1^3)\lambda\sin\lambda - 3\frac{\sin\lambda}{\lambda} = 6r_1r_2 \tag{3.7}$$

а постоянные C_k имеют значения

$$
\begin{aligned}
C_k^{(1)} &= (r_1r_2)^{1/2}\,[\sqrt{r_2}J_{-1/2}(\lambda_k r_1) - \sqrt{r_1}J_{-1/2}(\lambda_k r_2)] \\
C_k^{(2)} &= (r_1r_2)^{1/2}\,[\sqrt{r_2}J_{1}\;(\lambda_k r_1) - \sqrt{r_1}J_{1/2}(\lambda_k r_2)] \\
C_k^{(3)} &= \frac{(r_1r_2)^{1/2}}{3\lambda_k}\,[J_{1/2}(\lambda_k r_1)\,J_{-1/2}(\lambda_k r_2) - J_{-1/2}(\lambda_k r_1)\,J_{1/2}(\lambda_k r_2)] \\
C_k^{(4)} &= -\,C_k^{(3)}r_1^3 - \frac{r_1^{3/2}}{\lambda_k^2}\,[C_k^{(1)}J_{3/2}(\lambda_k r_1) + C_k^{(2)}J_{-3/2}(\lambda_k r_1)]
\end{aligned}
\qquad (3.8)
$$

(J — функция Бесселя). Отметим, что система функций $R_k\ (r)\ (k = 1,2,\ldots)$ является полной (см. [3]).

Проверкой можно убедиться, что функции $R_k\,(r)$ и $(2R_m\,/\,r^2 - R_m'')$ при $k \neq m$ взаимно-ортогональны, поэтому, умножив обе части равенства (3.5) на $(2R_k\,/\,r^2 - R_k)$ и проинтегрировав по r в пределах от r_1 до r_2, получим

$$
\int_{r_1}^{r_2} f\left(\frac{2R_k}{r^2} - R_k''\right)dr = S_k\,(t)\int_{r_1}^{r_2} R_k\left(\frac{2R_k}{r^2} - R_k''\right)dr = \frac{S_k\,(t)}{\lambda_k^2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{2R_k}{r^2} - R_k''\right)^2 dr \qquad (3.9)
$$

Для отыскания интеграла, стоящего в левой части равенства (3.9), обе части уравнения (3.3) умножим на R_k и проинтегрируем по r от r_1 до r_2[4]. Интегрируя по частям, операцию дифференцирования переведем с функции f на R_k и после простых преобразований получим уравнение (3.10)

$$
\frac{d}{dt}G_k + \lambda_k^2 G_k = -H_k \qquad \left(G_k\,(t) = \int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{2R_k}{r^2} - R_k''\right)f dr, \qquad H_k\,(t) = \int_{r_1}^{r_2} R_k r\,\frac{\partial \tau_0}{\partial r}\,dr\right)
$$

Решим уравнение (3.10) относительно $G_k\,(t)$ с учетом начальных условий (3.4). В результате вычислений получим

$$
G_k\,(t) = -\exp\,(-\lambda_k^2 t)\int_0^t H_k\,(t)\exp\,(\lambda_k^2 t)\,dt \qquad (3.11)
$$

Выражение этого интеграла подставим в (3.9) и решим последнее равенство относительно $S_k\,(t)$. Внеся найденное значение функций $S_k\,(t)$ в (3,5), получим решение уравнения (3.3), формально удовлетворяющее всем условиям (3.4), в виде

$$
f\,(r,\ t) = \Sigma\, S_k\,(t)\,R_k\,(r) = -\sum_{k=1}^{\infty} R_k\,(r)\,\frac{\lambda_k^2\exp\,(-\lambda_k^2 t)}{B_k\,(t)}\int_0^t H_k\,(t)\exp\,(\lambda_k^2 t)\,dt \qquad (3.12)
$$

$$
\left(B_k\,(t) = \int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{2R_k}{r^2} - R_k''\right)^2 dr\right)
$$

Подставляя (3.12) в (3.2), функцию тока можно также выразить в виде ряда.

Проекции скорости в первом приближении по числу Релея найдем по формулам

$$
u_r = \frac{N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}}}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad u_\theta = -\frac{N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}}}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad (3.13)
$$

2. Теперь перейдем к нахождению температуры жидкости. Второе уравнение (1.9), дающее в первом приближении конвективную часть распределения температуры, с учетом (3.1) и (3.2) можно записать в сферических координатах в виде

$$
\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \tau_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\tau_1}{\partial\theta}\right) - N_{\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial\tau_1}{\partial t} = 2\cos\theta\,\frac{f}{r^2}\,\frac{\partial\tau_0}{\partial r} \qquad (3.14)
$$

Граничные и начальные условия задачи (см. § 1) с учетом условий, при которых было решено уравнение нулевого приближения для температуры (см. § 2), дают

$$
\tau_1\,(r_1,\ \theta,\ t) = \tau_1\,(r_2,\ \theta,\ t) = 0, \qquad \tau_1\,(r,\ \theta,\ 0) = 0 \qquad (3.15)
$$

Решение уравнения (3.14) будем искать в виде

$$\tau_1 = \varphi(r,\ t)\cos\theta \tag{3.16}$$

Подставив (3.16) в (3.14), получим уравнение, которому должна удовлетворять функция φ:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{2\varphi}{r^2}-N_{\mathrm{Pr}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{2f}{r^2}\frac{\partial\tau_0}{\partial r} \tag{3.17}$$

Из (3.15) для функции φ имеем условия

$$\varphi(r_1,\ t)=\varphi(r_2,\ t)=0, \qquad \varphi(r,\ 0=0) \tag{3.18}$$

Пользуясь методом разделения переменных, найдем решение задачи (3.17) и (3.18)

$$\varphi(r,\ t)=-\frac{1}{N_{\mathrm{Pr}}}\sum_{j=1}^{\infty}D_i(r)\exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{N_{\mathrm{Pr}}}t\right)\int_0^t M_i(t)\exp\left(\frac{\varepsilon_i^2}{N_{\mathrm{Pr}}}t\right)dt \tag{3.19}$$

Здесь

$$D_i(r)=(\varepsilon_i r)^{-1/2}\left[J_{-3/2}(\varepsilon_i r_1)\,J_{3/2}(\varepsilon_i r)-J_{3/2}(\varepsilon_i r_1)\,J_{-3/2}(\varepsilon_i r)\right] \tag{3.20}$$

собственные функции однородной задачи, соответствующей неоднородной задаче (3.17) — (3.18), ε_i — корни уравнения

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon=\frac{\varepsilon}{1+r_1r_2\varepsilon^2},\qquad M_i(t)=\int_{r_1}^{r_2}2f\frac{\partial\tau_0}{\partial r}D_i(r)\,dr\Bigg/\int_{r_1}^{r_2}r^2D_i^2(r)\,dr$$

Таким образом, в первом приближении безразмерная температура дается

$$\tau=\tau_0+N_{Pr}N_{Gr}\tau_1 \tag{3.21}$$

где τ_0 определяется формулой (2.2), а τ_1 — формулами (3.16) и (3.1).

§ 4. **Поток тепла. Время остывания.** 1. Найдем количество тепла Q, прошедшее через границу полости за некоторый конечный промежуток времени t (например, за время t, прошедшее от начала процесса охлаждения жидкости).

Для этого воспользуемся формулой

$$Q=-\lambda\int_0^t\int_{(s)}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s ds\,dt \tag{4.1}$$

где λ — коэффициент теплопроводности жидкости, (s) — ограничивающая шаровой слой поверхность, n — внешняя нормаль к этой поверхности. В рассматриваемом нами приближении распределение температуры жидкости дается формулой

$$T=T_1+(T_2-T_1)\,(\tau_0+N_{\mathrm{Pr}}N_{\mathrm{Gr}}\tau_1) \tag{4.2}$$

где τ_0 и τ_1 определяются равенствами (2.2), (3.16) и (3.1). Подставляя (4.2) в (4.1) и выполняя интегрирование, найдем

$$Q=-\frac{2\pi\lambda l^3}{\chi}(T_2-T_1)\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2\left[\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\chi t\right)-1\right] \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что потеря тепла жидкостью со временем асимптотически растет до величины $(\lambda/\chi)\,V\,(T_2-T_1)$ (здесь V — объем жидкости)

2. При изучении нестационарных процессов теплопередачи важной величиной является время остывания («время выравнивания») температуры среды.

Анализ решения показывает, что в первом рассмотренном нами приближении конвекция не оказывает заметного влияния на теплоотдачу жидкости, т. е. что в основном процесс теплоотдачи регулируется молекулярной теплопроводностью.

В самом деле, как видно из решения задачи, распределение температуры в жидкости определяется суммой произведений некоторых функций координат на экспоненциальные функции времени. Очевидно, что быстрота изменения температуры определяется в основном тем членом этой суммы, который имеет наименьший по абсолютной величине коэффициент при t. За «время выравнивания» температуры жидкости можно взять величину, обратную этому коэффициенту. Оказалось, что в обоих случаях, т. е. в случае чисто молекулярной теплопроводности и в случае, когда учитывалось влияние тепловой конвекции на распределение температуры, «время выравнивания» температуры одинаково и равно $t = l^2 / \chi\pi^2$.

Мы получили бы наглядную картину течения процесса теплопередачи, если бы в какой-либо из плоскостей, проходящих через ось симметрии потока, изобразили линии тока и изотермические линии для различных моментов времени. Вследствие громоздкости полученных формул от этого пришлось отказаться.

Автор благодарит И. Г. Шапошникова за предоставление темы работы, С. И. Мельника и В. С. Сорокина за ряд полезных критических замечаний.

Поступила 25 IV 1 55

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1954.
2. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. Журн. техн. физики, т. XXII, вып. 5, стр. 826, 1952.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1951.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изв. АН СССР, 1948.