в формуле (1) можно считать не зависящими от времени. Компоненты тензора турбулентной диффузии также будем считать постоянными. Горизонтальные оси координат в случае стационарного потока можно выбрать так, чтобы величина a_2 в формуле (1) обратилась в нуль. Выбранные таким образом оси координат являются вместе с тем главными осями тензора турбулентной диффузии [1]. Соответствующие коэффициенты турбулентной диффузии мы обозначим через k_1, k_2 и k_3. Так как эти коэффициенты положительны, то легко убедиться в выполнении неравенств (12).

Формула (11) в нашем случае с учетом сделанных выше замечаний может быть приведена к следующему виду:

$$q = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2}\sqrt{k_1{}^* k_2 k_3}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{[x_1 - v_1 t - {}^1/_2\, a_1 t\,(x_3 + h)]^2}{4k_1{}^* t} - \frac{(x_2 - v_2 t)^2}{4k_2 t} - \frac{(x_3 - h + wt)^2}{4k_3 t}\right\} \tag{13}$$

где

$$k_1{}^* = k_1 + \frac{1}{12} k_3 a_1{}^2 t^2 \tag{14}$$

Полученную формулу можно использовать для описания рассеяния примесей в свободной атмосфере с учетом вертикального градиента скорости ветра.

Анализ формулы (13) приводит к следующим основным выводам.

1. По истечении некоторого времени, когда начнет выполняться неравенство

$$k_3 a_1{}^2 t^2 \gg 12 k_1 \tag{15}$$

можно пренебречь коэффициентом турбулентной диффузии k_1.

2. По истечении этого же промежутка времени концентрация в центре диффундирующего облака начнет убывать со временем по закону $t^{-5/2}$ (вместо $t^{-3/2}$ при отсутствии градиента скорости потока).

3. Изолинии равной концентрации в плоскости $x_2 = v_2 t$ представляют собой эллипсы, которые, поворачиваясь, оказываются в конце концов сильно вытянутыми в горизонтальном направлении. Отношение горизонтальной оси эллипса к вертикальной при больших t становится пропорциональным $a_1 t$. Таким образом, наблюдаемая часто вытянутость облаков диффундирующей примеси в горизонтальном направлении может быть объяснена наличием вертикального градиента ветра, а не тем, что $k_1 \gg k_3$. Последнее объяснение могло бы иметь место лишь в случае, когда ветер не меняется с высотой.

Поступила 14 VIII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. О характеристиках анизотропной турбулентности. ДАН СССР, т. 75, № 5, 1950.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО ЭФФЕКТА НА ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В УСТАНОВИВШЕМСЯ ОДНОМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Регирер

(Воркута)

В заметке рассматривается вопрос о связи между напряжением сдвига и скоростью движения границы для установившегося осевого течения капельной жидкости между двумя бесконечными цилиндрическими поверхностями с параллельными образующими. Учитываются выделение тепла за счет диссипации энергии и зависимость вязкости жидкости от температуры.

§ 1. Простейшая термогидродинамическая задача состоит в изучении течения между двумя параллельными плоскими бесконечными стенками, одна из которых равномерно движется при отсутствии перепада давлений в направлении движения.

Элементарное решение этой задачи общеизвестно. Не составляет труда получение несколько более сложных результатов, учитывающих теплообмен и влияние температуры на вязкость жидкости, но по-прежнему пренебрегающих рассеянием энергии. В этих случаях уравнение энергии интегрируется независимо от уравнения движения. Таким образом, влияние скоростного режима потока на тепловой режим не принимается во внимание и распределение вязкости в слое жидкости оказывается не зависящим от скорости движения границы. Поэтому из всех этих решений следует, что с увеличением скорости стенки U напряжение трения τ возрастает по линейному закону $\tau = aU$. Вместе с тем очевидно, что учет изменения вязкости от диссипативного разогрева жидкости может существенно повлиять на характер связи между τ и U.

В работе А. Хэгга [1] было дано решение задачи о течении между плоскими параллельными стенками с учетом диссипации энергии для жидкости, вязкость которой связана с температурой соотношением Рейнольдса

$$\eta = \eta_m e^{-\beta(T-T_m)} \tag{1.1}$$

где β и T_m—постоянные, $\eta_m = \eta(T_m)$. Полученная А. Хэггом зависимость $\tau(U)$ для задачи с простейшими граничными условиями показывает, что с увеличением скорости напряжение возрастает до некоторого максимального значения, а затем медленно падает, асимптотически приближаясь к нулю.

В работах А. К. Павлина [2] и С. М. Тарга [3] та же задача рассматривалась для иной зависимости вязкости от температуры—для гиперболического закона

$$\eta = \eta_m \frac{1}{1+\alpha^2(T-T_m)} \tag{1.2}$$

Ими было найдено, что при увеличении скорости напряжение монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к некоторому конечному пределу. Однако и в этом случае аналитическое решение утверждало факт ограниченности напряжения трения при сколь угодно больших скоростях течения и прочих неизменных условиях.

Отметим, что из решений других термогидродинамических задач [4, 5], где также была использована гиперболическая зависимость (1.2), для связи между напряжением трения на границе и характерной скоростью потока можно получить закономерности качественно аналогичные результатам работ [2,3].

А. И. Голубеву [6] удалось показать, что в достаточно большом интервале скоростей решения [2,3] хорошо согласуются с опытом. Данные А. И. Голубева свидетельствуют о том, что слабое изменение напряжения при значительных изменениях скорости, вытекающее из решений [2,3], может иметь место в реальных условиях, близких к смазочному слою.

Обнаружение ограниченности напряжения при сколь угодно больших скоростях течения капельной жидкости представляет собой один из существенных результатов термогидродинамики. Однако остается невыясненным, в какой мере это явление определяется видом зависимости вязкости от температуры и другими допущениями, принятыми при решении задачи. Необходимо помнить, что уравнения (1.1) и (1.2) обеспечивают точность решения при сравнительно небольших перепадах температуры, что, очевидно, соответствует узким интервалам изменения скорости. Поэтому рассмотрение формул $\tau = \tau(U)$ из решений [1,2] при больших U, равносильное в сущности экстраполяции уравнений (1.1) и (1.2) в область произвольно больших температур, не может считаться достаточно надежным.

Ниже изучается зависимость между напряжением на стенке и скоростью ее движения для течений вязкой жидкости в зазоре между двумя цилиндрическими поверхностями при произвольной зависимости вязкости от температуры.

§ 2. Рассмотрим слой вязкой жидкости, расположенный между двумя бесконечными плоскими стенками $y = 0$ и $y = h$, одна из которых равномерно движется в направлении x со скоростью U. Как было показано ранее, все осевые течения в зазоре между двумя любыми цилиндрическими поверхностями могут быть приведены к такой схеме [4].

Установившиеся процессы течения и теплообмена в рассматриваемой системе при отсутствии массовых сил и перепада давлений в направлении течения описываются уравнениями [3]

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}, \qquad \frac{d\tau}{dy} = 0, \qquad \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{\tau^2}{Jk\eta} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $\tau = \tau_{yx}$ — касательное напряженние, $v = v_x$ — скорость течения, k — теплопроводность жидкости, $\eta = \eta_T(T)$ — вязкость, J — механический эквивалент тепловой энергии.

Будем полагать плоскость $y = 0$ неподвижной. Тогда граничные условия для скорости

$$v(0) = 0, \qquad v(h) = U \tag{2.2}$$

Граничные условия для температуры принимаем в наиболее простой форме, предполагая известными температуры обеих стенок:

$$T(0) = T_0, \qquad T(h) = T_h \tag{2.3}$$

Вводим в систему (2.1) — (2.3) безразмерные переменные

$$\xi = \frac{y}{h}, \qquad \theta = \frac{T - T_m}{T_m}, \qquad \psi = \frac{\eta_m}{\eta}, \qquad u = \frac{v}{U} \tag{2.4}$$

где T_m — характерная температура такая, что заведомо $T \geqslant T_m$, и $\eta_m = \eta(T_m)$.

Вводим также безразмерные параметры

$$\Pi_1 = \frac{\tau h}{2Jk\eta_m T_m}, \qquad \Pi_2 = \frac{\tau h U}{JkT_m}, \qquad \Pi_3 = \frac{\Pi_2}{\Pi_1} = U\left(\frac{\eta_m}{2JkT_m}\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

Величина Π_1 есть безразмерное напряжение, Π_2 определяет мощность тепловыделения, Π_3 есть безразмерная характерная скорость.

В новых переменных система (2.1) будет иметь вид:

$$\frac{1}{\psi}\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{2}\frac{\Pi_1}{\Pi_3}, \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{\Pi_1^2}{2}\psi = 0 \tag{2.6}$$

причем $\psi = \psi(\theta)$. Исключая из последнего уравнения функцию ψ при помощи первого уравнения (2.6), получим

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \Pi_2 \frac{du}{d\xi} = 0 \tag{2.7}$$

Граничные условия для скорости u, температуры θ и текучести ψ

$$u(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad u(1) = 1, \quad \theta(1) = \theta_1, \quad \psi(1) = \psi_1 \tag{2.8}$$

Второе уравнение (2.6) допускает понижение порядка и сводится к следующему:

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 = \Pi_1^2 [F^* - F(\theta)] \qquad \left(F(\theta) = \int_0^\theta \psi(\theta)d\theta, \quad F^* = \text{const}\right) \tag{2.9}$$

Уравнение (2.7) также может быть проинтегрировано, после чего получим

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \Pi_2(u^* - u) \qquad (u^* = \text{const}) \tag{2.10}$$

Определим постоянные u^* и F^* через граничные температуры. Из (2.8) и (2.9) имеем

$$\theta_0'^2 = \Pi_1^2[F^* - F(\theta_0)], \qquad \theta_1'^2 = \Pi_1^2[F^* - F(\theta_1)] \tag{2.11}$$

Аналогично из (2.10) после возведения обеих частей уравнения в квадрат найдем

$$\theta_0'^2 = \Pi_2^2 u^{*2}, \qquad \theta_1'^2 = \Pi_2^2 = (u^* - 1)^2 \tag{2.12}$$

Решая систему (2.11), (2.12) относительно u^*, F^*, получаем

$$u^* = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{F(\theta_1) - F(\theta_0)}{\Pi_3^2}\right], \qquad F^* = \frac{\Pi_3^2}{4}\left[1 + \frac{F(\theta_1) - F(\theta_0)}{\Pi_3^2}\right]^2 + F(\theta_0) \tag{2.13}$$

Из уравнений (2.9) и (2.10) видно, что u^* есть значение скорости, а F^*—значение функции $F(\theta)$ в точке $\theta^* = \theta(\xi^*)$, где $d\theta/d\xi = 0$.

Из второго уравнения (2.6) следует, что во всей области значений ξ, где решение имеет смысл и $\psi(\theta) > 0$, вторая производная от температуры $d^2\theta/d\xi^2$ строго отрицательна.

Таким образом, все экстремумы температуры в этой области суть максимумы. В интересующем нас интервале $[0,1]$ может находиться, следовательно, максимум температуры и притом, разумеется, только один.

Для того, чтобы точка ξ^*, соответствующая этому максимуму, находилась в интервале $[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\theta_0' \geqslant 0, \qquad \theta_1' \leqslant 0, \qquad \text{или } 0 \leqslant u^* \leqslant 1$$

Из первого уравнения (2.13) получаем окончательно условие существования максимума температуры в рассматриваемом слое жидкости:

$$\Pi_3^2 \geqslant |F(\theta_1) - F(\theta_0)| \tag{2.14}$$

Неравенство (2.14) показывает, что, начиная с достаточно больших скоростей границы, когда Π_3 велико, максимум температуры всегда имеет место в интервале $[0,1]$. Поскольку нас интересуют закономерности течения в основном для больших скоростей, то будем предполагать в дальнейшем, что условие (2.14) выполняется.

Выведем теперь интегральное соотношение для определения Π_1. Для этого проинтегрируем (2.9) по ξ в пределах $[0,\xi^*]$ для $\theta' \geqslant 0$ и в пределах $[\xi^*, 1]$ для $\theta' \leqslant 0$:

$$\Pi_1\xi^* = \int_{\theta_0}^{\theta^*} \frac{d\theta}{\sqrt{F^* - F(\theta)}} \quad (\theta' \geqslant 0), \qquad \Pi_1(\xi^* - 1) = \int_{\theta^*}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{F^* - F(\theta)}} \quad (\theta' \leqslant 0) \tag{2.15}$$

Из (2.15) получаем

$$\Pi_1 = \int_{\theta_0}^{\theta^*} \frac{d\theta}{\sqrt{F^* - F(\theta)}} + \int_{\theta_1}^{\theta^*} \frac{d\theta}{\sqrt{F^* - F(\theta)}} \tag{2.16}$$

или

$$\Pi_1 = J_0 + 2J, \qquad J_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{F^* - F(\theta)}}, \qquad J = \int_{\theta_1}^{\theta^*} \frac{d\theta}{\sqrt{F^* - F(\theta)}} \tag{2.17}$$

причем интеграл J в (2.17) заведомо неотрицателен.

Равенство (2.17) представляет собой искомую зависимость между параметрами Π_1 и Π_3, причем последний входит в выражение для F^* по формуле (2.13).

§ 3. Прежде чем приступить к изучению свойств интегралов, входящих в уравнение (2.16), укажем, что при выполнении неравенства (2.14) производная

$$\frac{dF^*}{d\Pi_3} = \frac{\Pi_3}{2}\left\{1 - \frac{[F(\theta_1) - F(\theta_0)]^2}{\Pi_3^4}\right\} \tag{3.1}$$

неотрицательна, т. е. $F(\theta^*) = F^*$ — неубывающая функция от Π_3. Кроме того, из формулы (2.13) ясно, что $F^* \to \infty$ при $\Pi_3 \to \infty$. Следовательно, поскольку нас интересует связь между Π_1 и Π_3 при больших значениях Π_3, то мы вправе изучать поведение Π_1 как функции Π_3 при больших значениях F^*.

В равенстве (2.17) интеграл J_0 имеет пределы, не зависящие от F^*, и, очевидно, стремится к нулю при $F^* \to \infty$ независимо от вида функции $F(\theta)$.

Второй интеграл J (2.17), являющийся несобственным, представим в виде

$$J = \int_{F(\theta_1)}^{F^*} [F^* - F(\theta)]^{-1/2} \frac{1}{dF/d\theta} dF \tag{3.2}$$

Вспоминая, что $dF/d\theta = \psi(\theta)$, причем для капельной жидкости $(d\eta/dT < 0)$ при $\theta \geqslant 0\,(T \geqslant T_m)$ всегда $\psi \geqslant 1$, легко можно установить, что интеграл J сходится.

Задача состоит в том, чтобы установить связь между характером функции $F(\theta)$ и свойствами интеграла J при $F^* \to \infty$ или $\theta^* \to \infty$.

Введя переменную $t = \sqrt{F(\theta)/F^*}$, интеграл J можно записать так:

$$J = \int_{t_1}^{1} \frac{\Phi(t\sqrt{F^*})}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad \left(\Phi = \Phi(t\sqrt{F^*}) = \frac{\sqrt{F(\theta)}}{\psi}\right) \tag{3.3}$$

Пользуясь теоремами, следующими из известной леммы Арцела, и теоремой о среднем (см., например [7]), можно показать:

(а) $\lim J = 0$ при $\theta^* \to \infty$, если $\Phi(\infty) = 0$ и $\Phi(t\sqrt{F^*})$ ограничено сверху;

(б) $\lim J = \pi\Phi(\infty)$ при $\theta^* \to \infty$, если $\Phi(\infty) < \infty$ и $\Phi(t\sqrt{F^*})$ ограничено сверху;

(в) $\lim J = \infty$ при $\theta^* \to \infty$, если $\Phi(\infty) = \infty$. (3.4)

Обращаясь снова к определению функции $F(\theta)$, видим, что в случае непрерывности $\psi(\theta)$, что имеет место по физическим соображениям, функция Φ также непрерывна и, кроме того, при $\theta = 0$ всегда $\Phi = 0$. Поэтому для случаев (а) и (б) обеспечивается ограниченность Φ для любых значений θ, а следовательно, и $t\sqrt{F^*}$.

Так как функции Φ, соответствующие пп. (а), (б), (в), составляют весьма широкий класс, то при их помощи можно описать все практически возможные случаи зависимости текучести ψ от температуры.

Для отыскиваемой зависимости между Π_1 и Π_3 в соответствии с (2.17) имеем

$$\lim_{\Pi_3\to\infty} \Pi_1 = \lim_{\theta^*\to\infty} \Pi_1 = 2\pi\Phi(\infty) \tag{3.5}$$

Если при $\theta^* \to \infty$ текучесть ψ стремится к конечному пределу, то функция

$$\Phi(\theta^*) = \frac{1}{\psi(\theta)^*}\left(\int_{\theta_1}^{\theta^*} \psi(\theta)\,d\theta\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

беспредельно возрастает. Если же $\psi(\infty) = \infty$, что имеет место в большинстве случаев, то, раскрывая неопределенность в выражении для $\Phi(\theta^*)$, получим из (3.5) окончательно

$$\lim_{\Pi_3\to\infty} \Pi_1 = \pi\sqrt{2} \lim_{\theta^*\to\infty} \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^{-1/2}_{\theta=\theta^*} \tag{3.7}$$

Таким образом, поведение параметра Π_1 при больших Π_3 полностью определяется температурным ходом текучести. Из формул (2.17) и (3.7) легко можно получить результаты работ [1—3].

Поступила 24 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Hagg A. C. Heat effects in lubricating films. J. Appl. Mech., vol. 11, p. A72, 1944.
2. Павлин А. К. Об одном случае интегрирования уравнений движения вязкой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. ПММ, т. XIX, вып. 5, стр. 635—638, 1955.
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.
4. Регирер С. А. Некоторые термогидродинамические задачи о стационарном одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, т. XXI, вып. 3, 1957.
5. Гораздовский Т. Я., Регирер С. А. Движение ньютоновской жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами при наличии внутренних тепловых процессов, влияющих на вязкие свойства. ЖТФ, т. XXVI, вып. 7, стр. 1532—1541, 1956.
6. Голубев А. И. О влиянии тепла на жидкостное трение в ненагруженном кольцевом слое смазки. Трение и износ в машинах, Сб. XII, 1958, стр. 181—204.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, ГИТТЛ, 1951.