значению; кроме того, наиболее существенное изменение скорости перед пластинкой происходит в области, где $|\xi| < 2$.

Выражаю глубокую благодарность Л. Г. Лойцянскому и Л. Г. Степанянцу за ценные советы и обсуждение результатов настоящей работы.

Поступила 29 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГТТИ, 1941, стр. 76.
2. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Под ред. Гольдштейна С., т. I. ИЛ, 1948, стр. 207.
3. Oudart Ad. Mise en régime de la couche limite de la plaque plane dans l'impulsion brusque à partir du repos. Rech. aèron. I—II, 31, 1953, 772.
4. Добрышман Е. М. Приближенное решение некоторых нестационарных задач пограничного слоя, ПММ, т. XX вып. 3, 1956.
5. Струминский В. В. Теория нестационарного пограничного слоя. Сборник теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957, стр. 230.
6. Carrier G. F., Lin C. C. Oh the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Quarterly of Applied Math., VI, 63, 1948.
7. Лойцянский Л. Г. Пространственный пограничный слой и трение вблизи бокового края пластинки продольно обтекаемой вязкой жидкостью. ПММ, т. II, вып. 2, 1938.
8. Howarth L. Rayleigh's problem for a semiinfinite plate. Proc. Cambr. Phil. Soc. 46, 4, 1, 1950, 127—140.

О ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В ПОТОКЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ ГРАДИЕНТОМ СКОРОСТИ

Е. А. Новиков

(Москва)

Рассматривается диффузия примеси от мгновенного точечного источника в горизонтальном потоке, скорость которого меняется с высотой по линейному закону.

Одной из насущных задач теории турбулентной диффузии является описание поведения диффундирующей примеси в потоке с градиентом скорости. Мы рассмотрим диффузию примеси от мгновенного точечного источника в горизонтальном потоке, компоненты скорости которого линейно зависят от высоты:

$$U_m(x_3, t) = v_m(t) + a_m(t) x_3 \qquad (m = 1, 2) \tag{1}$$

Вертикальную ось x_3 можно в этом случае считать главной осью тензора турбулентной диффузии [1]. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии с учетом гравитационного оседания частиц запишется следующим образом [1]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + [v_m(t) + a_m(t) x_3] \frac{\partial q}{\partial x_m} - w \frac{\partial q}{\partial x_3} = K_{\mu\nu}(t) \frac{\partial^2 q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \tag{2}$$

Здесь q — концентрация примеси, w — установившаяся скорость падения частиц в спокойной среде, $K_{\mu\nu}(t)$ — компоненты тензора турбулентной диффузии, предполагаемые не зависящими от координат, причем $K_{m3}(t) = K_{3m}(t) = 0$.

Начальное условие, соответствующее мгновенному точечному источнику, расположенному на высоте h, имеет вид:

$$q|_{t=0} = Q\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3 - h) \tag{3}$$

где Q — полное количество примеси.

Граничное условие заключается в том, что концентрация q обращается в нуль на бесконечности.

[1] В уравнении (2) и в дальнейшем латинские индексы m, n пробегают значения 1 и 2, а греческие μ, ν — значения 1, 2 и 3. Под дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Введем новые переменные, которые позволят нам исключить чисто кинематические члены из уравнения (2):

$$y_m = x_m - \int_0^t v_m(\tau)\,d\tau - x_3\int_0^t a_m(\tau)\,d\tau - w\int_0^t (t-\tau)\,a_m(\tau)\,d\tau, \qquad y_3 = x_3 - h + wt \quad (4)$$

Эти переменные возникают естественным образом при решении кинематической задачи, т. е. при решении уравнения (2) без правой части.

В новых переменных уравнение (2) и начальное условие (3) примут вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = S_{\mu\nu}(t)\frac{\partial^2 q}{\partial y_\mu \partial y_\nu}, \qquad q\,|_{t=0} = Q\delta(y_1)\,\delta(y_2)\,\delta(y_3) \quad (5)$$

где

$$S_{mn}(t) = K_{mn}(t) + K_{33}(t)\left(\int_0^t a_m(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t a_n(\tau)\,d\tau\right)$$

$$S_{m3}(t) = S_{3m}(t) = -K_{33}(t)\int_0^t a_m(\tau)\,d\tau, \qquad S_{33}(t) = K_{33}(t) \quad (6)$$

Произведем с равенствами (5) двустороннее преобразование Лапласа по всем трем переменным y_μ. В результате получим

$$\frac{dq^\circ}{dt} = S_{\mu\nu}(t)\,\alpha_\mu\alpha_\nu q^\circ, \qquad q^\circ\,|_{t=0} = Q \quad (7)$$

Здесь α_μ — параметр преобразования по переменной y_μ, а q° — изображение функции q.

Решение этой задачи имеет вид:

$$q^\circ = Q\exp\{T_{\mu\nu}(t)\,\alpha_\mu\alpha_\nu\} \qquad \left(T_{\mu\nu}(t) = \int_0^t S_{\mu\nu}(\tau)\,d\tau\right) \quad (8)$$

Напишем обратное преобразование Лапласа:

$$q = \frac{Q}{(2\pi i)^3}\iiint\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{T_{\mu\nu}(t)\,\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\mu a_\mu\}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3 \quad (9)$$

Величину σ можно в нашем случае положить равной нулю. Заменим α_μ на $i\beta_\mu$. Тогда

$$q = \frac{Q}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-T_{\mu\nu}(t)\,\beta_\mu\beta_\nu + i\beta_\mu\alpha_\mu\}\,d\beta_1\,d\beta_2\,d\beta_3 \quad (10)$$

и в результате несложных вычислений окончательно получим

$$q = \frac{Q}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{\mathrm{Det}\,(T)}}\exp\left\{-\frac{1}{4}\,T_{\mu\nu}^{-1}(t)\,y_\mu y_\nu\right\} \quad (11)$$

Здесь $T_{\mu\nu}^{-1}(t)$ — матрица, обратная $T_{\mu\nu}(t)$, а $\mathrm{Det}\,(T)$ — определитель матрицы $T_{\mu\nu}(t)$.

Для того чтобы интеграл (10) имел смысл и был равен выражению (11), необходимо выполнение следующих неравенств:

$$T_{11} > 0, \qquad T_{11}T_{22} - (T_{12})^2 > 0, \qquad \mathrm{Det}\,(T) > 0 \quad (12)$$

(T_{11} и T_{22} — произвольно выбранные диагональные элементы матрицы). Неравенства (12) накладывают определенные ограничения на исходную матрицу $S_{\mu\nu}(t)$ в уравнении (5) и вместе с тем гарантируют положительную определенность квадратичной формы $T_{\mu\nu}^{-1}(t)\,y_\mu y_\nu$. Последнее обстоятельство обеспечивает стремление концентрации q к нулю на бесконечности.

Формулы (11), (8), (6) и (4) дают решение поставленной задачи. Мы остановимся подробнее на важнейшем случае стационарного потока, когда величины v_m и a_m

в формуле (1) можно считать не зависящими от времени. Компоненты тензора турбулентной диффузии также будем считать постоянными. Горизонтальные оси координат в случае стационарного потока можно выбрать так, чтобы величина a_2 в формуле (1) обратилась в нуль. Выбранные таким образом оси координат являются вместе с тем главными осями тензора турбулентной диффузии [1]. Соответствующие коэффициенты турбулентной диффузии мы обозначим через k_1, k_2 и k_3. Так как эти коэффициенты положительны, то легко убедиться в выполнении неравенств (12).

Формула (11) в нашем случае с учетом сделанных выше замечаний может быть приведена к следующему виду:

$$q = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2}\sqrt{k_1{}^* k_2 k_3}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{[x_1 - v_1 t - {}^1/_2\, a_1 t\,(x_3 + h)]^2}{4k_1{}^* t} - \frac{(x_2 - v_2 t)^2}{4k_2 t} - \frac{(x_3 - h + wt)^2}{4k_3 t}\right\} \qquad (13)$$

где

$$k_1{}^* = k_1 + \frac{1}{12} k_3 a_1{}^2 t^2 \qquad (14)$$

Полученную формулу можно использовать для описания рассеяния примесей в свободной атмосфере с учетом вертикального градиента скорости ветра.

Анализ формулы (13) приводит к следующим основным выводам.

1. По истечении некоторого времени, когда начнет выполняться неравенство

$$k_3 a_1{}^2 t^2 \gg 12 k_1 \qquad (15)$$

можно пренебречь коэффициентом турбулентной диффузии k_1.

2. По истечении этого же промежутка времени концентрация в центре диффундирующего облака начнет убывать со временем по закону $t^{-5/2}$ (вместо $t^{-3/2}$ при отсутствии градиента скорости потока).

3. Изолинии равной концентрации в плоскости $x_2 = v_2 t$ представляют собой эллипсы, которые, поворачиваясь, оказываются в конце концов сильно вытянутыми в горизонтальном направлении. Отношение горизонтальной оси эллипса к вертикальной при больших t становится пропорциональным $a_1 t$. Таким образом, наблюдаемая часто вытянутость облаков диффундирующей примеси в горизонтальном направлении может быть объяснена наличием вертикального градиента ветра, а не тем, что $k_1 \gg k_3$. Последнее объяснение могло бы иметь место лишь в случае, когда ветер не меняется с высотой.

Поступила 14 VIII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. О характеристиках анизотропной турбулентности. ДАН СССР, т. 75, № 5, 1950.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО ЭФФЕКТА НА ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В УСТАНОВИВШЕМСЯ ОДНОМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Регирер

(Воркута)

В заметке рассматривается вопрос о связи между напряжением сдвига и скоростью движения границы для установившегося осевого течения капельной жидкости между двумя бесконечными цилиндрическими поверхностями с параллельными образующими. Учитываются выделение тепла за счет диссипации энергии и зависимость вязкости жидкости от температуры.

§ 1. Простейшая термогидродинамическая задача состоит в изучении течения между двумя параллельными плоскими бесконечными стенками, одна из которых равномерно движется при отсутствии перепада давлений в направлении движения.