

Вдоль этих линий энтропия остается постоянной. Можно показать, что при обтекании любого конического тела однородным потоком могут возникнуть два случая. Первый случай — линии тока упираются в поверхность обтекаемого тела, которая является в этом случае изобарой; второй случай — линии тока сходятся в одну или несколько точек, в которых образуются особенности Ферри. Так, например, при обтекании эллиптического конуса без угла атаки образуются две особенности Ферри (фиг. 3).

При обтекании края прямоугольной пластинки образуется одна особенность Ферри (фиг. 4).

Здесь 0-9 — крыло; 1-7 — характеристика течения Прандтля-Майера, возникающего на передней кромке; 7-8, 5-8 — прямолинейная характеристика и конус Маха для однородного потока, следующего после течения Прандтля-Майера; 1-6 — скачок, являющийся границей общего конического течения в верхней части крыла; 1-2 — скачок; точка 2 есть точка пересечения конуса Маха для потока после плоского скачка 1-02, возникающего на передней кромке, с линией скачка 10-2; 2-4 — возможный скачок. Все линии тока сходятся в точку 11, лежащую на верхней части крыла. Заметим, что впервые вывод о возникновении скачка 1-6 сделал М. Лайтхилл^[5]; он исходил из поведения линеаризованного решения в окрестности конуса Маха, которое, как отмечено в работе^[6], является неверным. По этой причине вывод М. Лайтхилла о возникновении скачка 1-6 (фиг. 2) нельзя было считать достаточно убедительным.

В заключение автор благодарит С. В. Фальковича за ценные указания.

Поступила 14 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. F o w e l l L. R. Exact and Approximate Solutions for the Supersonic Delta Wing. Journ. Aero Sci., vol. 23, No. 8, 1956.
2. Б у л а х Б. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
3. Г и з Д. и К о н Н. Два новых нелинеаризованных конических потока. Механика, Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы, № 5, 1954.
4. Б у л а х Б. М. К теории конических течений, ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
5. L i g h t h i l l H. J. The Shock Strenght in Supersonic, Conical Fields. Phil. Mag., vol. 40, seventh s., No. 311, 1949.
6. Б у л а х Б. М. К теории конических течений. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.

РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНКЕ, ПРИВЕДЕННОЙ ИМПУЛЬСИВНО В ДВИЖЕНИЕ

Л. А. Розин

(Ленинград)

1. Рассмотрим неустановившееся движение несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое, который возникает, когда полубесконечная плоская пластинка начинает импульсивно двигаться из состояния покоя параллельно самой себе с постоянной скоростью U_0 . Если обратить движение, считая пластинку неподвижной, а жидкость движущейся со скоростью U_0 на бесконечности, то в обычной постановке^[1] задача нахождения такого рода течения сводится к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

при условии, что

$$\begin{aligned} u &= U_0 && \text{при } y > 0, x = 0, t \geq 0 \text{ или } x \geq 0, t = 0 \\ u = v &= 0 && \text{при } y = 0, x > 0, t \geq 0 \\ u &= U_0 && \text{при } y \rightarrow \infty, x \geq 0, t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Предполагается, что xoy — ортогональная система осей координат с началом в передней кромке пластинки, причем ось x направлена вдоль пластинки параллельно

скорости набегающего потока, t — время, ν — кинематический коэффициент вязкости, u и v — проекции скорости в сечениях пограничного слоя соответственно на оси x , y .

Анализируя возможные пути решения поставленной задачи, следует прежде всего указать на ее особенность, которая проявляется в том, что метод последовательных приближений [2], широко применяющийся для решения задач нестационарного пограничного слоя, в данном случае не приводит к правильным результатам. Этот факт сразу следует из рассмотрения структуры первого приближения. Действительно, получающееся в результате отбрасывания конвективных членов в (1.1) первое приближение отвечает развитию течения около бесконечной в обе стороны плоской пластинки и не зависит от x . При этом все последующие приближения обращаются в нуль. Таким образом, не получается решение, которое зависело бы от x и, следовательно, отражало бы влияние передней кромки пластинки на формирование пограничного слоя.

Применение других приближенных методов расчета пограничного слоя ([3, 4] и др.) обнаружило некоторые новые стороны особенности поставленной задачи. Например, приближенное решение, основанное на методе М. Е. Швеца [4], сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{8}{3} \frac{1}{U_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 16 \nu U_0 \quad (1.3)$$

где $\varphi = U_0 \delta^2$, а $\delta(x, t)$ — толщина пограничного слоя. При этом из физических соображений функция φ должна удовлетворять условиям:

$$\varphi = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x = 0$$

Полученное решение имеет вид:

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{6\nu t}, & x > \frac{3}{8} U_0 t \\ \sqrt{16\nu x / U_0}, & 0 \leq x < \frac{3}{8} U_0 t \end{cases} \quad (1.4)$$

Отсюда видно, что на пластинке образуются две области, которые разделены между собой движущейся прямолинейной границей при $x = \frac{3}{8} U_0 t$. По одну сторону этой границы ($x > \frac{3}{8} U_0 t$) имеет место нестационарное движение, на которое не сказывается влияние передней кромки пластинки, а по другую ($0 \leq x < \frac{3}{8} U_0 t$) — стационарное движение, соответствующее решению задачи Блязиуса. По мере увеличения времени стационарный режим распространяется все дальше вдоль x и постепенно занимает всю пластинку.

Приведенное решение (1.4) имеет тот недостаток, что первые частные производные функции $\delta(x, t)$ терпят разрыв при $x = \frac{3}{8} U_0 t$. Это в свою очередь приводит к разрыву первых производных составляющей скорости u при $x = \frac{3}{8} U_0 t$, а также делает разрывной составляющую скорости v . Такой результат объясняется тем, что при построении (1.4) отыскивалась интегральная поверхность уравнения (1.3), проходящая через две взаимно-перпендикулярные прямые $x = 0$ и $t = 0$ в пространстве (x, t, φ) . Необходимость в построении именно такого решения диктуется исходной постановкой задачи (1.1), (1.2) и, по-видимому, связана с уже отмечавшейся ее особенностью.

Построение «внешнего» решения, в какой-то мере справедливое у границы пограничного слоя, также приводит к выражению вида

$$u = \begin{cases} U_0 \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, & x > U_0 t \\ U_0 \operatorname{erf} \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}, & 0 \leq x < U_0 t \end{cases} \quad \left(\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \right) \quad (1.5)$$

которое получается, если заменить в конвективных членах (1.1) множитель u на U_0 , а $\partial u / \partial y$ положить равным нулю. Из (1.5) вытекают те же выводы, что из формулы (1.4). Разница между (1.4) и (1.5) состоит только в скорости распространения границы установившегося и неустановившегося движения. Эта скорость равна $\frac{3}{8} U_0$ в формуле (1.4) и U_0 в (1.5).

¹ В частности В. В. Струминским [5] был развит аэродинамический метод расчета нестационарного пограничного слоя и в качестве примера рассматривалась задача о пластинке.

Надо думать, что перечисленные выше результаты являются следствием упрощенной математической формулировки исходной задачи в форме (1.1), (1.2), присущей теории пограничного слоя. Действительно, в начальный момент времени, когда пластинка начинает двигаться в жидкости, влияние ее передней кромки сказывается только при малых x там, где местные числа Рейнольдса $U_0 x / \nu$ невелики. Затем это влияние постепенно распространяется вниз по течению на большие значения x . Таким образом, важную роль в развитии пограничного слоя на пластинке играет формирование течения в начальный момент времени вблизи $x = 0$. Однако для получения правильной картины течения в этой зоне необходимо обратиться к решению полных уравнений Новье-Стокса, так как при малых $U_0 x / \nu$ постановка задачи в форме (1.1), (1.2), так же как в случае стационарного движения [6], оказывается несправедливой. В свете сделанных замечаний перейдем к рассмотрению начального периода развития течения на полубесконечной пластинке путем интегрирования уравнений Новье-Стокса.

2. Уравнения Новье-Стокса приводятся к одному уравнению относительно функции тока ψ вида

$$L(\psi) = K(\psi) \tag{2.1}$$

где

$$L(\psi) = \nu \Delta \Delta \psi - \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi$$

$$K(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Будем искать решение (2.1) при помощи последовательных приближений. Известно, что в первый момент времени движение жидкости около пластинки будет потенциальным. Поэтому можно принять для очень малых t функцию тока ψ равной $\psi_0 = U_0 y$.

Подставляя далее в правую часть уравнения (2.1) вместо ψ функцию ψ_0 , приходим для ψ_1 к уравнению $L(\psi_1) = 0$.

Аналогичным образом можно получить дифференциальные уравнения и для последующих приближений. Указанный путь решения (2.1) эквивалентен представлению функции тока ψ в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_{n-1} + \psi_n + \dots \tag{2.2}$$

члены которого удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= U_0 y \\ L(\psi_1) &= K(\psi_0) \\ L(\psi_2) &= K(\psi_0 + \psi_1) - K(\psi_0) \\ &\dots \\ L(\psi_n) &= K(\psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_{n-1}) - K(\psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_{n-2}) \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Остановимся на рассмотрении первого приближения. Замечая, что $u_1 = \partial \psi_1 / \partial y$, запишем уравнение первого приближения для продольной составляющей скорости u_1 :

$$\Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \Delta u_1 \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \Delta u_1 \tag{2.4}$$

При этом, исходя из физических соображений и не ограничиваясь рамками теории пограничного слоя, можно представить граничные и начальные условия для u_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 && \text{при } t = 0 \\ u_1 &= -U_0 && \text{при } y = 0, x > 0 \\ u_1 &\rightarrow 0 && \text{при } |y| \rightarrow \infty, x > 0 \\ u_1 &\rightarrow 0 && \text{при } |x| \text{ или } |y| \rightarrow \infty, x < 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Далее, полагая

$$\psi_1 = U_0 \sqrt{\nu t} \varphi_1(\eta, \xi), \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\nu t}} \tag{2.6}$$

перейдем в задаче (2.4), (2.5) к двум независимым переменным η, ξ :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \left(\eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) &= \Delta u_1 & \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \\
 u_1 &= 0 & \text{при } \eta \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \infty \\
 u_1 &= -U_0 & \text{при } \eta = 0, \xi > 0 \\
 u_1 &\rightarrow 0 & \text{при } |\eta| \rightarrow \infty, \xi > 0 \\
 u_1 &\rightarrow 0 & \text{при } |\eta| \text{ или } |\xi| \rightarrow \infty, \xi < 0
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Принимая во внимание (2.3) и выражение (2.6) для ψ_1 , можно переписать ряд (2.2) в форме

$$\begin{aligned}
 \psi &= U_0 y + U_0 \sqrt{vt} \varphi_1(\eta, \xi) + U_0^2 t \varphi_2(\eta, \xi) + U_0 t [U_0 \varphi_{31}(\eta, \xi) + \\
 &+ U^2 \sqrt{\frac{t}{\nu}} \varphi_{32}(\eta, \xi) + \frac{U_0^3}{\nu} \varphi_{33}(\eta, \xi)] + \dots
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Таким образом, как видно из (2.8), построение решения уравнения (2.1) при помощи последовательных приближений есть не что иное, как отыскание решения (2.1) в виде ряда по степеням времени t .

Рассматривая развитие течения около пластинки в начальный период движения, ограничимся в разложении (2.8) только двумя первыми членами при условии, что $U_0 \sqrt{vt} \gg U_0^2 t$ или $U_0^2 t / \nu \ll 1$. Тогда наша задача будет состоять в нахождении решения (2.4), (2.5). Следует отметить, что уравнение (2.4) и условия (2.5) довольно часто встречаются в задачах подобного рода [7,8]. В частности, Л. Хоуэрз [8] исследовал развитие течения жидкости около полубесконечной пластинки ($y = 0, x \geq 0$), которая в момент $t = 0$ начинала двигаться со скоростью U_0 параллельно своему боковому краю. Проводя аналогию между математической формулировкой задачи Хоуэрза [8] и задачей (2.4), (2.5), можно представить с точностью до второго приближения составляющую скорости u в следующих двух формах.

В полярных координатах при помощи ряда

$$\frac{u}{U_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2n-1}{4}\right)}{(2n-1)\Gamma\left(\frac{2n-1}{4}\right)} \left(\frac{R}{2}\right)^{n-1/2} e^{-1/4 R^2} F_1\left(\frac{2n+3}{4}, \frac{2n+1}{4}, \frac{R^2}{4}\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \tag{2.9}$$

где $R = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$ и $\theta = \arctg(\eta / \xi)$. Выражение (2.9) удобно для вычислений при малых значениях R , при которых ряд весьма быстро сходится.

В виде однократных интегралов

$$\frac{u}{U_0} = \operatorname{erf} \frac{1}{2} \eta + J_0 \text{ при } x > 0, \quad \frac{u}{U_0} = 1 - J_1 \text{ при } x < 0 \tag{2.10}$$

где

$$J_n = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_R^{\infty} \left[\left(\frac{z}{z-\eta} \right)^{1/2} - (-1)^n \left(\frac{z}{z+\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-\frac{z^2}{8}} K_{1/4} \left(\frac{z^2}{8} \right) dz \quad (n=0 \text{ или } 1)$$

справедливых всюду, но удобных для вычислений при больших R .

Результаты расчетов [8] по формулам (2.9), (2.10) приведены на фиг. 1, где u / U_0 отложено как функция ξ при различных значениях η . Кривые на фиг. 1 представляют собой наглядную картину того, как развивается движение жидкости около пластинки в первый момент времени. Так, при $x > 6$ течение можно разделить на две области. Первая область, расположенная приблизительно при $\xi > 2$, характерна тем, что в ней не сказывается влияние передней кромки пластинки и движение жидкости соответствует течению около бесконечной в обе стороны плоскости, т. е. $u / U_0 = \operatorname{erf} \frac{1}{2} \eta$. Во второй области ($0 \leq \xi < 2$) на движение жидкости заметно сказывается действие передней кромки и переменная x входит в выражение для скорости. Из фиг. 1 видно, что резкой границы между указанными областями не существует. Тем не менее попытаемся условно установить форму этой границы, вводя критерий относительного влияния координаты x (передней кромки пластинки) на продольную составляющую

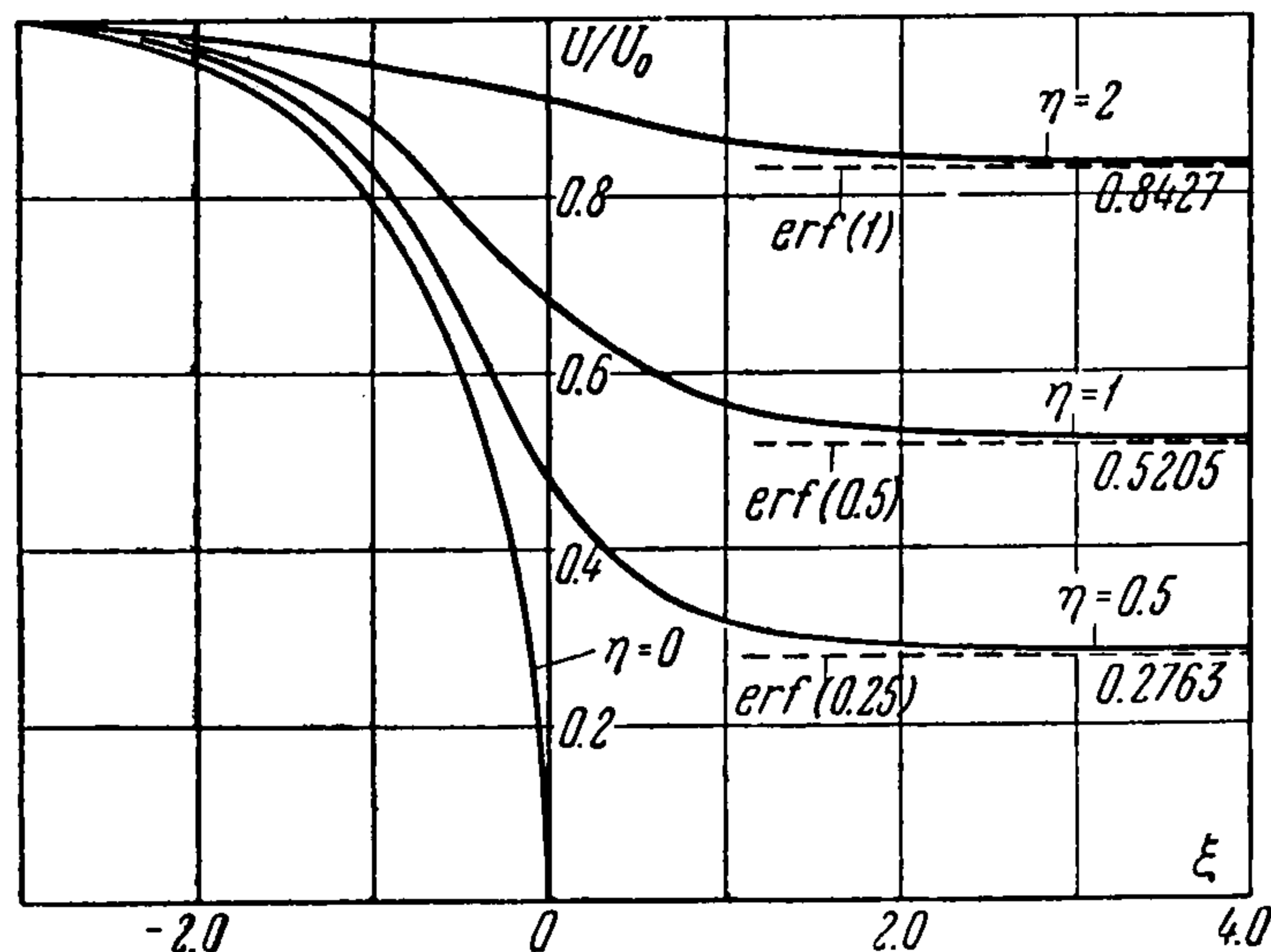
скорости u в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}}$$

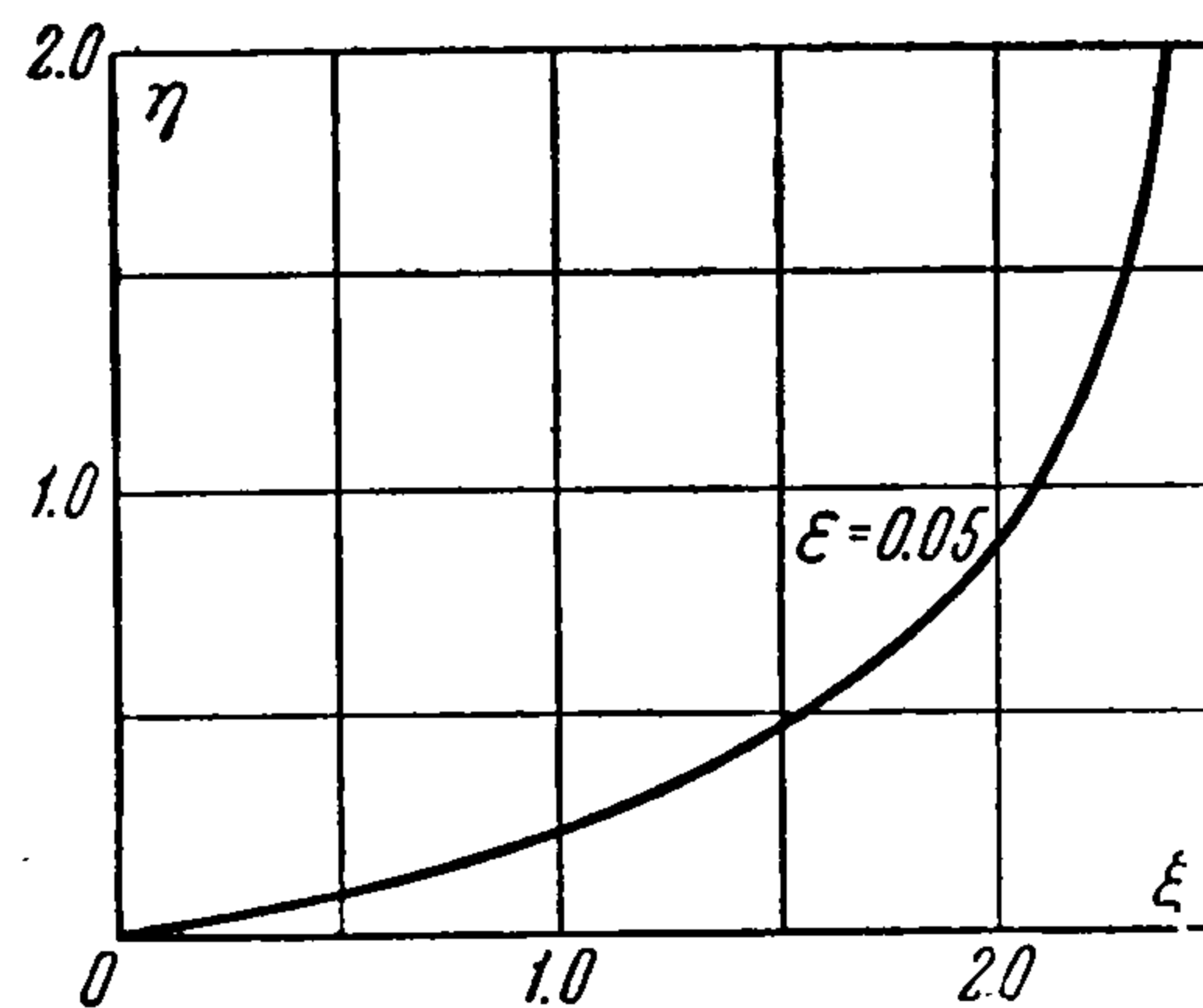
Тогда уравнение границы может быть записано следующим образом: (2.11)

$$\frac{\partial u / \partial x}{[\partial u / \partial x]_{x=0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\xi}{R} \left[\left(\frac{R}{R-\eta} \right)^{1/2} - \left(\frac{R}{R+\eta} \right)^{1/2} \right] \exp\left(-\frac{\xi^2}{8}\right) \frac{K_{1/4}(1/8 R^2)}{K_{1/4}(1/8 \eta^2)} = \epsilon$$

где ϵ — достаточно малая величина. Зависимость η от ξ , вычисленная по формуле (2.11) при $\epsilon = 0.05$, представлена на фиг. 2. Вид этой зависимости позволяет прежде всего заключить, что с увеличением η влияние края пластинки распространяется на больший интервал. Кроме того, если при больших η кривая на фиг. 2 приближается к прямой $\xi = \text{const}$, то при малых η она полого подходит к значению $\xi = 0$. Последний результат является следствием того, что при любом малом ξ , не равном нулю, можно подобрать такое $\eta \ll \xi$, при котором уравнение (2.11) будет удовлетворено.



Фиг. 1



Фиг. 2

Приведенные соображения, касающиеся двух областей течения и границы между ними, позволяют прийти к выводу, что в начальный период движения влияние передней кромки пластинки распространяется вдоль оси x на область, ширина которой пропорциональна \sqrt{vt} . Это, по-видимому, объясняется тем, что в самом начале движения, когда $\sqrt{vt} \gg U_0 t$, главную роль в перемещении завихренности вдоль оси x играет диффузия вихрей. С течением времени величина $U_0 t$ становится больше, чем \sqrt{vt} , и завихренность начинает распространяться вдоль оси x в основном за счет переноса вихрей потоком, обтекающим пластинку. При этом у границы пограничного слоя скорость переноса вихрей достигает величины U_0 и, следовательно, ширина области влияния передней кромки пластинки при больших y приблизительно равна $U_0 t$. По мере уменьшения y ширина указанной области уменьшается вследствие подтормаживающего действия пластинки, и, наконец, при очень малых y граница влияния координаты x , касаясь пластинки, подходит к значению $x = 0$. Такие выводы в какой-то мере отвечают приведенным выше приближенным решениям задачи (1.1), (1.2). Действительно, решение (1.4), которое получается при помощи методов, дающих хорошие результаты при малых y , приводит к ширине зоны влияния передней кромки пластинки, равной $3/8 U_0 t$. С другой стороны, формула (1.5), полученная путем построения «внешнего» решения при больших y , дает ширину этой зоны $U_0 t$.

Следует отметить, что в отличие от имеющихся решений задачи стационарного обтекания полубесконечной пластинки [1, 6], приведенное решение (2.9), (2.10) справедливо при всех значениях x . Это дает возможность рассмотреть при помощи (2.9), (2.10) некоторые интересные стороны течения около пластинки. В частности, решение (2.9), (2.10) позволяет проследить влияние пластинки на набегающий поток жидкости, расположенный слева от оси oy . Так, если ξ отрицательно, то из второй формулы (2.10) видно, что при больших R и конечных η главный член в асимптотическом разложении u / U_0 не зависит от η и кривые на фиг. 1 стремятся к одному и тому же

значению; кроме того, наиболее существенное изменение скорости U перед пластинкой происходит в области, где $|\xi| < 2$.

Выражаю глубокую благодарность Л. Г. Лойцянскому и Л. Г. Степанянцу за ценные советы и обсуждение результатов настоящей работы.

Поступила 29 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГТТИ, 1941, стр. 76.
2. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Под ред. Гольдштейна С., т. I. ИЛ, 1948, стр. 207.
3. O u d a r t Ad. Mise en régime de la couche limite de la plaque plane dans l'impulsion brusque à partir du repos. Rech. aëron. I—II, 31, 1953, 772.
4. Д о б р ы ш м а н Е. М. Приближенное решение некоторых нестационарных задач пограничного слоя, ПММ, т. XX вып. 3, 1956.
5. С т р у м и н с к и й В. В. Теория нестационарного пограничного слоя. Сборник теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957, стр. 230.
6. S a r r i e r G. F., L i n C. C. On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Quarterly of Applied Math., VI, 63, 1948.
7. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Пространственный пограничный слой и трение вблизи бокового края пластинки продольно обтекаемой вязкой жидкостью. ПММ, т. II, вып. 2, 1938.
8. H o w a r t h L. Rayleigh's problem for a semiinfinite plate. Proc. Cambr. Phil. Soc. 46, 4, 1, 1950, 127—140.

О ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В ПОТОКЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ ГРАДИЕНТОМ СКОРОСТИ

Е. А. Н О В И К О В

(Москва)

Рассматривается диффузия примеси от мгновенного точечного источника в горизонтальном потоке, скорость которого меняется с высотой по линейному закону.

Одной из насущных задач теории турбулентной диффузии является описание поведения диффундирующей примеси в потоке с градиентом скорости. Мы рассмотрим диффузию примеси от мгновенного точечного источника в горизонтальном потоке, компоненты скорости которого линейно зависят от высоты:

$$U_m(x_3, t) = v_m(t) + a_m(t)x_3 \quad (m = \overline{1, 2}) \quad (1)$$

Вертикальную ось x_3 можно в этом случае считать главной осью тензора турбулентной диффузии^[1]. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии с учетом гравитационного оседания частиц запишется следующим образом¹:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + [v_m(t) + a_m(t)x_3] \frac{\partial q}{\partial x_m} - w \frac{\partial q}{\partial x_3} = K_{\mu\nu}(t) \frac{\partial^2 q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \quad (2)$$

Здесь q — концентрация примеси, w — установившаяся скорость падения частиц в спокойной среде, $K_{\mu\nu}(t)$ — компоненты тензора турбулентной диффузии, предполагаемые не зависящими от координат, причем $K_{m3}(t) = K_{3m}(t) = 0$.

Начальное условие, соответствующее мгновенному точечному источнику, расположенному на высоте h , имеет вид:

$$q|_{t=0} = Q\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3 - h) \quad (3)$$

где Q — полное количество примеси.

Граничное условие заключается в том, что концентрация q обращается в нуль на бесконечности.

¹ В уравнении (2) и в дальнейшем латинские индексы m, n пробегает значения 1 и 2, а греческие μ, ν — значения 1, 2 и 3. Под дважды повторяющимся индексом подразумевается суммирование.