

В результате получаются следующие формулы для координат линий тока в сопле на переходном участке:

$$\bar{x} - \bar{x}_* = \Phi_* b_*^3 \int_t^1 \frac{1}{vt} \cos \theta dt \quad \left(\bar{x} = \frac{x}{-Aa_*} \right)$$

$$\bar{y} - \bar{y}_* = \Phi_* b_*^3 \int_t^1 \frac{1}{vt} \sin \theta dt \quad \left(\bar{y} = \frac{y}{-Aa_*} \right)$$

В этих формулах x_* , y_* — координаты точки пересечения линии тока с переходной линией, t — функция, определяемая равенством (2.3); ее график представлен на фиг. 3.

Аналогичные выражения могут быть получены и для других характерных кривых: линий равных скоростей, характеристик и др.

Использование безразмерных координат позволяет построить течение в различных соплах (различные значения постоянной A) на одном графике.

Результаты расчета линий тока и линий равных скоростей представлены на фиг. 4.

Поступила 26 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавала. Изв. АН СССР, серия матем., т. IX, вып. 5, 1945.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ Л. Р. ФАУЭЛЛА «ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ДЕЛЬТАОБРАЗНОГО КРЫЛА»^[1]

Б. М. Булах

(Саратов)

В большой и содержательной работе Л. Фауэлла^[1] решается задача об обтекании плоского треугольного крыла сверхзвуковым потоком невязкого газа при условии, что кромки крыла сверхзвуковые, угол атаки δ не мал, скольжение крыла отсутствует (фиг. 1). Так как кромки крыла сверхзвуковые, то конические течения, возникающие при обтекании «низа» и «верха» крыла, не интерферируют между собой и могут рассматриваться отдельно. В этой интересной работе, к сожалению, как будет показано ниже, дается некорректная постановка краевой задачи для «верха» крыла, что лишает силы выводы Л. Фауэлла относительно обтекания «верха» крыла. Правильная картина обтекания и постановка краевых задач для треугольного крыла со сверхзвуковыми кромками содержатся в статье автора^[2].

Если конический поток имеет потенциал скорости φ , то составляющие скорости по осям декартовой системы координат $oxyz$ запишутся в виде

$$u = \varphi_x = F_\xi, \quad v = \varphi_y = F_\eta, \quad w = \varphi_z = F - \xi u - \eta v, \quad \varphi = zF(\xi, \eta)$$

$$\left(\xi = \frac{x}{z}, \quad \eta = \frac{y}{z} \right)$$

где F удовлетворяет уравнению

$$AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = 0 \quad (1)$$

Здесь

$$A = a^2(1 + \xi^2) - (u - \xi w)^2, \quad C = a^2(1 + \eta^2) - (v - \eta w)^2$$

$$B = (a^2 - w^2)\xi\eta + (u\eta + v\xi)w - uv, \quad a^2 = a_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - W_1^2)$$

a — скорость звука, a_1 , W_1 — соответственно скорость звука и скорость в некоторой точке потока, κ — отношение удельных теплоемкостей. Плоскость $\xi\eta$ имеет простой физический смысл, это — плоскость $z = 1$ в пространстве xyz , а ξ, η — соответственно координаты x и y точек этой плоскости

$$\Delta = AC - B^2 = a^2 [a^2 (1 + \xi^2 + \eta^2) - (u - \xi w)^2 - (v - \eta w)^2 - (\xi v - \eta u)^2] \quad (2)$$

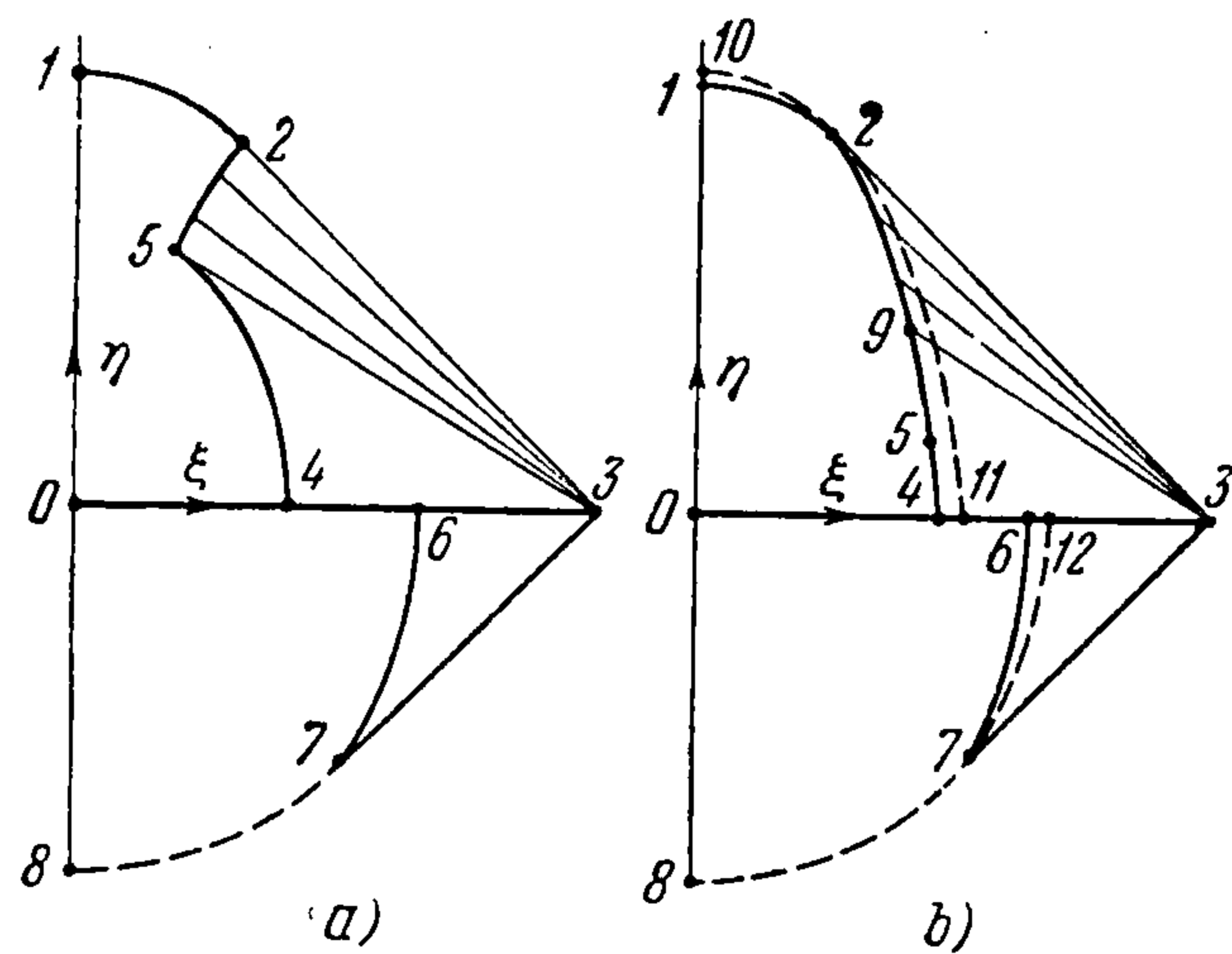
Рассмотрим картину обтекания треугольного крыла на плоскости $\xi\eta$ (фиг. 2); в силу симметрии обтекания изображаем только одну половину потока при $\xi > 0$. На фиг. 2, *a* изображается картина обтекания крыла по Л. Фауэллу, на фиг. 2, *b* дается схема автора [2].

Крыло изображается отрезком $O3$ (ось Oz лежит в плоскости крыла). Огибающей конусов Маха невозмущенного потока с вершинами на боковых кромках крыла является дуга $1-2$ конуса Маха с вершиной в носовой точке крыла (точка O на фиг. 1). При обтекании острой боковой кромки образуется косое течение Прандтля-Майера, которое продолжается до тех пор, пока вектор скорости не станет параллелен плоскости крыла; это течение имеет пучок прямолинейных характеристик уравнения (1), проходящих через точку 3. Отрезки $3-5$ на фиг. 2, *a*, и $3-9$ на фиг. 2, *b* изображают границу течения Прандтля — Майера, после которого следует однородный поток, примыкающий к поверхности крыла.

В качестве границы области общего конического течения Л. Фауэлл предлагает параболическую линию $1-2-5-4$ на фиг. 2, *a*) уравнения (1), построенную для уже найденной части конического течения, т. е. для невозмущенного потока, это часть дуги конуса Маха $1-2$ для однородного потока, примыкающего к поверхности крыла, это также часть конуса Маха $5-4$, для течения Прандтля — Майера это параболическая линия $2-5$. Однако между конусами Маха и параболической линией $2-5$ есть существенная разница. Конус Маха для однородного потока является одновременно параболической линией и характеристической кривой уравнения (1), так как все прямолинейные характеристики однородного потока касаются конуса Маха (см., например, [2]), в то время как параболическая линия $2-5$ для течения Прандтля-Майера не может являться характеристикой, так как в этом случае она была бы огибающей прямолинейных характеристик, что невозможно. Если потребовать, чтобы компоненты скорости общего конического потока непрерывно переходили вдоль $2-5$ в компоненты скорости течения Прандтля-Майера, то это равносильно требованию, что на $2-5$ заданы функция F и ее нормальная производная. Но задание F и ее нормальной производной на нехарактеристической кривой $2-5$ определяет согласно теореме Коши-Ковалевской в окрестности $2-5$ единственное аналитическое решение уравнения (1), которым является решение Прандтля-Майера (кривая $2-5$ и начальные данные на ней определяются аналитическими функциями). Следовательно, соединение двух разных решений уравнения (1) вдоль $2-5$ на фиг. 2, *a* невозможно.

По этой причине в работе [6] общий конический поток на фиг. 2, *b* отделяется характеристикой течения Прандтля-Майера $2-9$ и затем куском прямолинейной характеристики $9-5$, переходящей в кусок конуса Маха $5-4$. Прямолинейную характеристику нельзя продолжать до поверхности крыла, так как при уменьшении угла атаки δ область общего конического потока заполнила бы всю внутренность области $1-2-3-0$. Поскольку характеристика $9-5$ прямая, то течением, примыкающим к ней, должна быть простая волна [3].

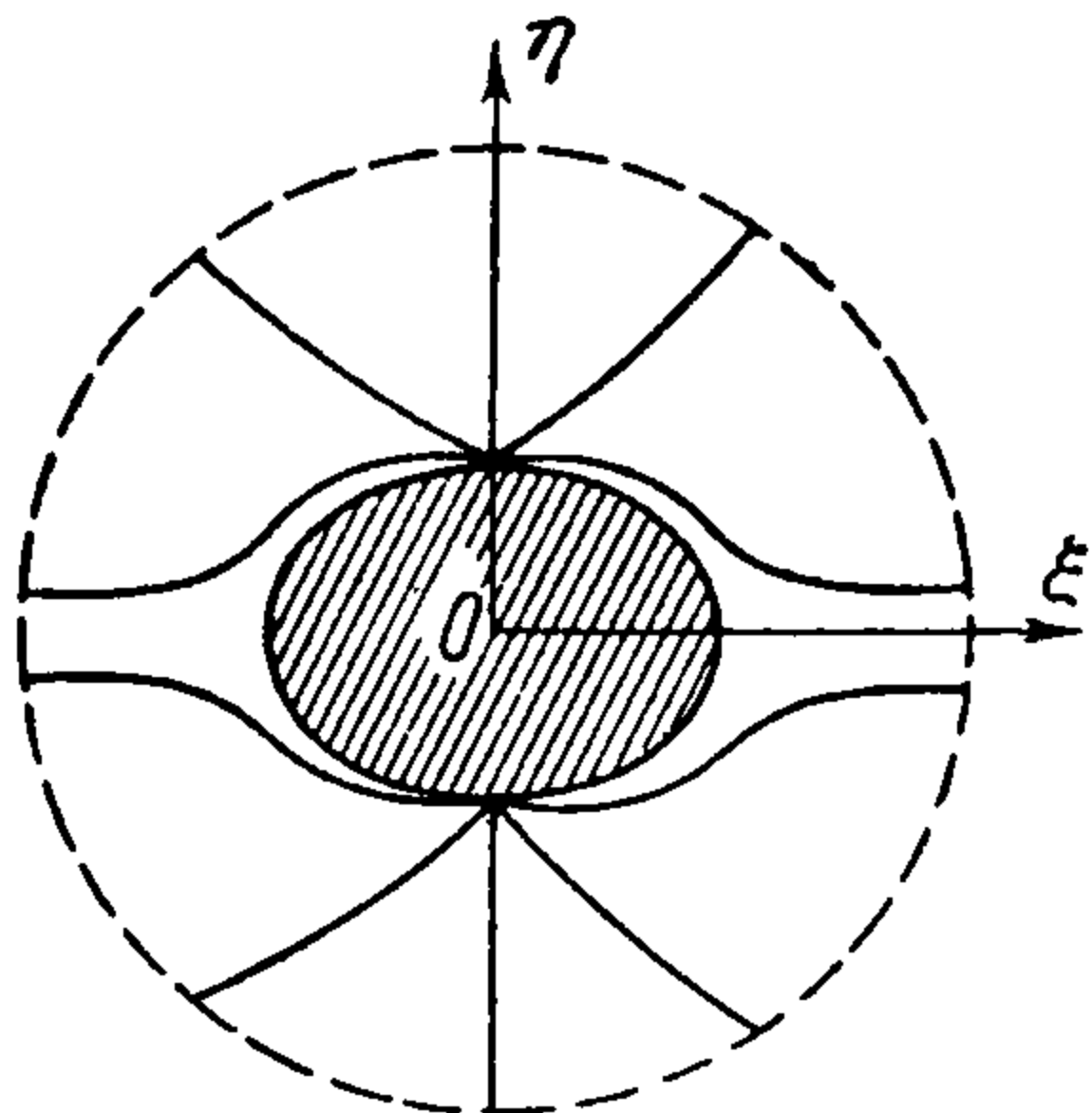
Свойства простых волн исследовались автором [2]; было показано, что при движении вдоль криволинейных характеристик простой волны, проходящих через $9-5$, встречающиеся параболические точки не могут образовать непрерывную параболическую линию, вдоль которой простая волна могла бы сомкнуться с решением эллип-



Фиг. 2

тического типа, которое будет иметь место во внутренней части общего конического течения (в точке $O\Delta > 0$). Этот вывод справедлив, если простая волна обладает кусочно-непрерывными третьими производными от F в окрестности параболической линии.

В работе [2] оставлен без исследования случай, когда криволинейные характеристики простой волны сходятся в одну параболическую точку. Предполагая F доста-



Фиг. 3

точно гладкой, можно показать, что если производная от ускорения в направлении, нормальном к прямолинейной характеристике, на которой расположена эта параболическая точка, отлична от нуля (ускорение должно обращаться в нуль [2]), то характеристики не могут сгуститься в одну точку. Все эти особенности простых волн и некоторые общие соображения о краевых задачах для уравнения смешанного типа привели автора к выводу о возникновении ударной волны, которая выходит из параболической точки 2, где ее интенсивность равна нулю, и располагается в окрестности криволинейной характеристики 2-9, прямолинейной характеристики 9-5, дуги конуса Маха 5-4 (пунктирная линия 2-11 на фиг. 2, в). Дуга конуса Маха 1-2 может служить границей конического потока, но потоки, которые примыкают вдоль него к однородному, должны иметь специальную частную структуру в окрестности конуса Маха [4]. По этой причине автор считает возможным возникновение слабого скачка 2-10 и включает его в формулировку краевой задачи, так как если этот скачок отсутствует, то мы автоматически получим при решении краевой задачи дугу конуса Маха 1-2. Внутри области 10-2-11-0 на фиг. 2, в автор предполагает $\Delta = AC - B^2 > 0$. Краевая задача сформулирована в работе [2].

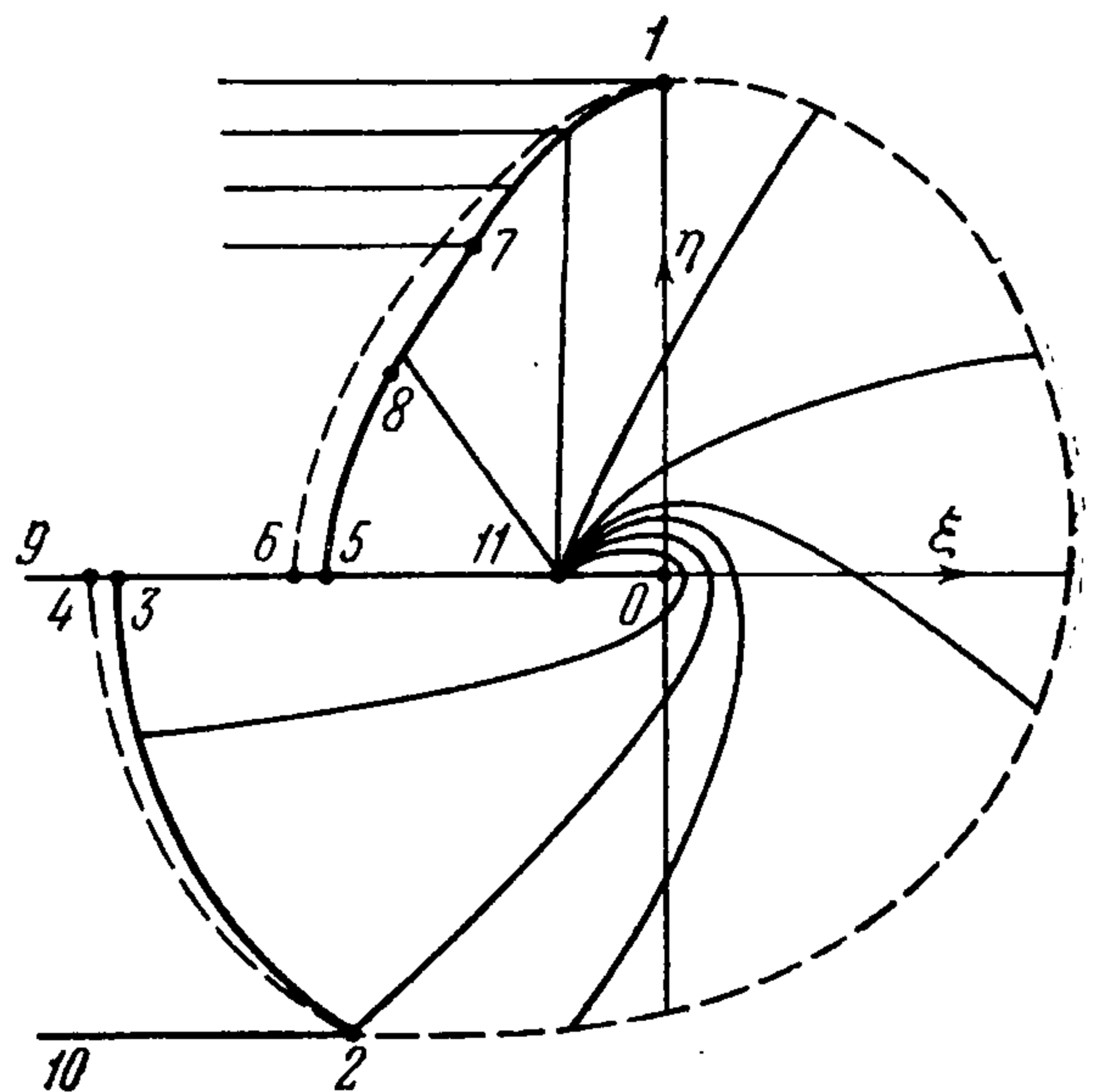
Л. Фауэлл приводит экспериментальные данные, которые подтверждают схему автора настоящей статьи. По схеме Фауэлла существуют два режима обтекания «верха» крыла: без бокового скачка и со скачком. Первый случай наблюдается, когда точка 5, на фиг. 2, а не попадает на прямую 1-0, когда же она попадает на эту прямую, то возникает скачок. Угол атаки, при котором это происходит, Л. Фауэлл назвал критическим. В окрестности критического угла атаки должно было происходить резкое изменение распределения давления по крылу. Эксперименты показали, что такого изменения распределения давления не происходит, а боковой скачок 2-11 на фиг. 2, в возникает при малых углах атаки, что полностью подтверждает схему автора.

Картина обтекания «низа» крыла у Л. Фауэлла совпадает с картиной обтекания, приведенной в работе [2]. На боковой кромке имеется плоский скачок 3-7 (фиг. 2), после которого следует однородный поток. Область общего конического потока ограничена криволинейным скачком 7-8 и дугой конуса Маха для однородного потока после скачка 6-7. Автор ввел здесь также возможный скачок 7-12 на фиг. 2, в.

Л. Фауэлл рассматривал вихревой конический поток, возникающий при обтекании «низа» крыла, и пришел к выводу, что линии постоянной энтропии сходятся в точку 0 (фиг. 2), где имеется вихревая особенность Ферри. Это обстоятельство является частным случаем общей закономерности конических потоков.

Рассмотрим траекторию частицы газа при движении в коническом потоке и ее изображение на плоскости ξ, η ; эти линии назовем линиями тока, их уравнение будет

$$\frac{d\xi}{u - \xi w} = \frac{d\eta}{v - \eta w}$$



Фиг. 4

Вдоль этих линий энтропия остается постоянной. Можно показать, что при обтекании любого конического тела однородным потоком могут возникнуть два случая. Первый случай — линии тока упираются в поверхность обтекаемого тела, которая является в этом случае изобарой; второй случай — линии тока сходятся в одну или несколько точек, в которых образуются особенности Ферри. Так, например, при обтекании эллиптического конуса без угла атаки образуются две особенности Ферри (фиг. 3).

При обтекании края прямоугольной пластинки образуется одна особенность Ферри (фиг. 4).

Здесь 0-9 — крыло; 1-7 — характеристика течения Прандтля-Майера, возникающего на передней кромке; 7-8, 5-8 — прямолинейная характеристика и конус Маха для однородного потока, следующего после течения Прандтля-Майера; 1-6 — скачок, являющийся границей общего конического течения в верхней части крыла; 1-2 — скачок; точка 2 есть точка пересечения конуса Маха для потока после плоского скачка 1-02, возникающего на передней кромке, с линией скачка 10-2; 2-4 — возможный скачок. Все линии тока сходятся в точку 11, лежащую на верхней части крыла. Заметим, что впервые вывод о возникновении скачка 1-6 сделал М. Лайтхилл^[5]; он исходил из поведения линеаризованного решения в окрестности конуса Маха, которое, как отмечено в работе^[6], является неверным. По этой причине вывод М. Лайтхилла о возникновении скачка 1-6 (фиг. 2) нельзя было считать достаточно убедительным.

В заключение автор благодарит С. В. Фальковича за ценные указания.

Поступила 14 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. F o w e l l L. R. Exact and Approximate Solutions for the Supersonic Delta Wing. Journ. Aero Sci., vol. 23, No. 8, 1956.
2. Б у л а х Б. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
3. Г и з Д. и К о н Н. Два новых нелинеаризованных конических потока. Механика, Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы, № 5, 1954.
4. Б у л а х Б. М. К теории конических течений, ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
5. L i g h t h i l l H. J. The Shock Strenght in Supersonic, Conical Fields. Phil. Mag., vol. 40, seventh s., No. 311, 1949.
6. Б у л а х Б. М. К теории конических течений. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.

РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНКЕ, ПРИВЕДЕННОЙ ИМПУЛЬСИВНО В ДВИЖЕНИЕ

Л. А. Розин

(Ленинград)

1. Рассмотрим неустановившееся движение несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое, который возникает, когда полубесконечная плоская пластинка начинает импульсивно двигаться из состояния покоя параллельно самой себе с постоянной скоростью U_0 . Если обратить движение, считая пластинку неподвижной, а жидкость движущейся со скоростью U_0 на бесконечности, то в обычной постановке^[1] задача нахождения такого рода течения сводится к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

при условии, что

$$\begin{aligned} u &= U_0 && \text{при } y > 0, x = 0, t \geq 0 \text{ или } x \geq 0, t = 0 \\ u = v &= 0 && \text{при } y = 0, x > 0, t \geq 0 \\ u &= U_0 && \text{при } y \rightarrow \infty, x \geq 0, t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Предполагается, что xoy — ортогональная система осей координат с началом в передней кромке пластинки, причем ось x направлена вдоль пластинки параллельно