

## О РАСЧЕТЕ СОПЛА ЛАВАЛЯ

А. Ш. Дорфман

(Киев)

В работе [1] Ф. И. Франкль показал, что для построения «безударных» плоско-параллельных сопел Лавалья в области, близкой к узкому сечению, может быть использован главный член решения уравнений Чаплыгина. Главный член решений был представлен Ф. И. Френклем в виде линейной комбинации двух гипергеометрических функций. Несколько позже С. В. Фельковичу [2] удалось представить главный член в виде полинома третьей степени и тем упростить исследование и расчет потока в сопле. Однако оба указанных решения достаточно точны лишь в непосредственной близости к узкому сечению сопла, что затрудняет их практическое использование.

В настоящей работе приведено приближенное решение уравнений С. А. Чаплыгина, достаточно точное, в значительно большем удалении от узкого сечения сопла, чем решение Ф. И. Франкля — С. В. Фальковича. Найденное решение используется для построения начального участка сверхзвуковой части сопла Лавалья, в дозвуковой части которого линии тока имеют вид [1]:

$$\psi = -B_1\theta - B_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{Bn}(\tau)}{Z_{Bn}(\tau^*)} \frac{\sin 2Bn\theta}{n^{1/3}} \quad \left( \tau = \frac{v^2}{\frac{k+1}{k-1} a_*^2} \right) \quad (0.1)$$

Здесь  $B$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  — постоянные,  $Z_{Bn}$  — функция Чаплыгина,  $\tau$  — переменная Чаплыгина,  $v$  — скорость потока,  $a_*$  — критическая скорость,  $k$  — показатель адиабаты,  $\tau^*$  — значение  $\tau$  при  $v = a_*$ .

§ 1. Интегрирование вспомогательной системы уравнений. При решении задачи будем исходить из уравнений Чаплыгина [2]

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -\frac{1}{b} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = b\eta \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \quad (1.1)$$

где

$$b = \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{\frac{1-M^2}{\eta}}, \quad \eta = \left( \frac{3}{2} \int_{\bar{v}}^1 \frac{\sqrt{1-M^2}}{\bar{v}} d\bar{v} \right)^{2/3}, \quad M = \frac{v}{a}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a_*} \quad (1.2)$$

Здесь  $\theta$  — угол наклона вектора скорости,  $\rho$  — плотность газа,  $\rho_0$  — плотность адиабатически заторможенного газа,  $a$  — скорость звука в потоке газа,  $\psi$  — функция тока,  $\varphi$  — потенциал скорости.

Чтобы решить поставленную задачу, составим вспомогательную систему уравнений. Для этого заменим в системе (1.1) функцию  $b$ , заданную равенством (1.2), некоторой произвольной функцией  $h$ . Тогда система (1.1) примет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = h\eta \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \quad (1.3)$$

Будем интегрировать систему уравнений (1.3); заметим, что при этом в процессе интегрирования определится и функция  $h$ . После этого подберем постоянные, входящие в  $h$ , так, чтобы в некотором интервале  $\eta$  функция  $h$  аппроксимировала функцию  $b$  в равенствах (1.2). Если это удастся сделать, то решение системы (1.3) можно будет считать приближенным решением уравнений Чаплыгина в том диапазоне значений  $\eta$ , в котором функция  $h$  будет аппроксимировать функцию  $b$ .

Для интегрирования вспомогательной системы уравнений исключим  $\theta$  из системы (1.3):

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h\eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Ищем интеграл этого уравнения в виде

$$\Phi(\eta) = e^{c\varphi} F(\psi) \quad (1.5)$$

где  $\Phi(\eta)$  и  $F(\psi)$  — функции, подлежащие определению, а  $c$  — постоянная.

Подставляя значения производных, найденных при помощи (1.5), в уравнение (1.4), после выполнения дифференцирования получим

$$\left[ \left( \frac{h\eta}{\Phi'} \right)' + \frac{h\eta}{\Phi} \right] c^2 + \left( \frac{1}{h\Phi'} \right)' \frac{1}{F^2} \left( \frac{dF}{d\psi} \right)^2 + \frac{1}{h\Phi} \frac{1}{F} \frac{d^2F}{d\psi^2} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь и ниже штрих означает дифференцирование по  $\eta$ . Полагая

$$\left( \frac{1}{h\Phi'} \right)' = 0, \quad \left( \frac{h\eta}{\Phi'} \right)' + \frac{h\eta}{\Phi} = \frac{c_1^2}{h\Phi} \quad (1.7)$$

где  $c_1$  — постоянная, получим

$$\frac{d^2F}{d\psi^2} + c_1^2 c^2 F = 0 \quad (1.8)$$

Равенства (1.7) и (1.8) позволяют определить три неизвестные функции  $\Phi$ ,  $h$ ,  $F$ . Частными решениями уравнения (1.8) будут функции

$$F = c_2 \cos c_1 c \psi \quad (1.9)$$

Из второго уравнения (1.7) следует

$$h\Phi' = c_3 = \text{const} \quad (1.10)$$

Используя это, из второго уравнения (1.7) имеем

$$(h^2\eta)' = \frac{c_1}{\Phi h} (c_1^2 - h^2\eta), \quad \text{или} \quad \Phi = \frac{c_4}{h^2\eta - c_1^2} \quad (c_4 = \text{const}) \quad (1.11)$$

Введем новую функцию

$$z = h\sqrt{-\eta} \quad (1.12)$$

(в дальнейшем нас будет интересовать область отрицательных  $\eta$ ).

Подставляя в (1.10) выражение  $\Phi'$ , найденное при помощи (1.11), получим

$$\frac{c_3}{c_4} \sqrt{-\eta} d(-\eta) = -\frac{2z^2 dz}{(z^2 + c_1^2)^2} \quad (1.13)$$

После выполнения квадратур и замены  $z$  согласно (1.12) придем к выражению, определяющему функцию  $h$  (при  $c_3 = 1$ ):

$$\frac{h\sqrt{-\eta}}{c_1^2 - h^2\eta} + \frac{1}{c_1} \arctg \frac{c_1}{h\sqrt{-\eta}} = \frac{2}{3c_4} (-\eta)^{3/2} + c_5 \quad (1.14)$$

Таким образом, интеграл (1.5) уравнения (1.4) имеет вид:

$$\Phi = c_2 e^{c\varphi} \cos c_1 c \psi \quad (1.15)$$

где  $\Phi$  определяется равенством (1.11). При этом функция  $h$  из уравнения (1.4) определяется соотношением (1.14).

Чтобы закончить интегрирование вспомогательной системы (1.3), нужно найти выражение для угла наклона вектора скорости.

Возвращаясь к системе (1.3), найдем

$$\theta = -\int \frac{1}{h} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} d\varphi + U(\psi)$$

где  $U(\psi)$  — функция, подлежащая определению.

Находя  $\partial \eta / \partial \psi$  согласно (1.15) и учитывая (1.10), представим выражение для  $\theta$  в виде

$$\theta = c_1 c_2 e^{c\varphi} \sin c c_1 \psi + U(\psi)$$

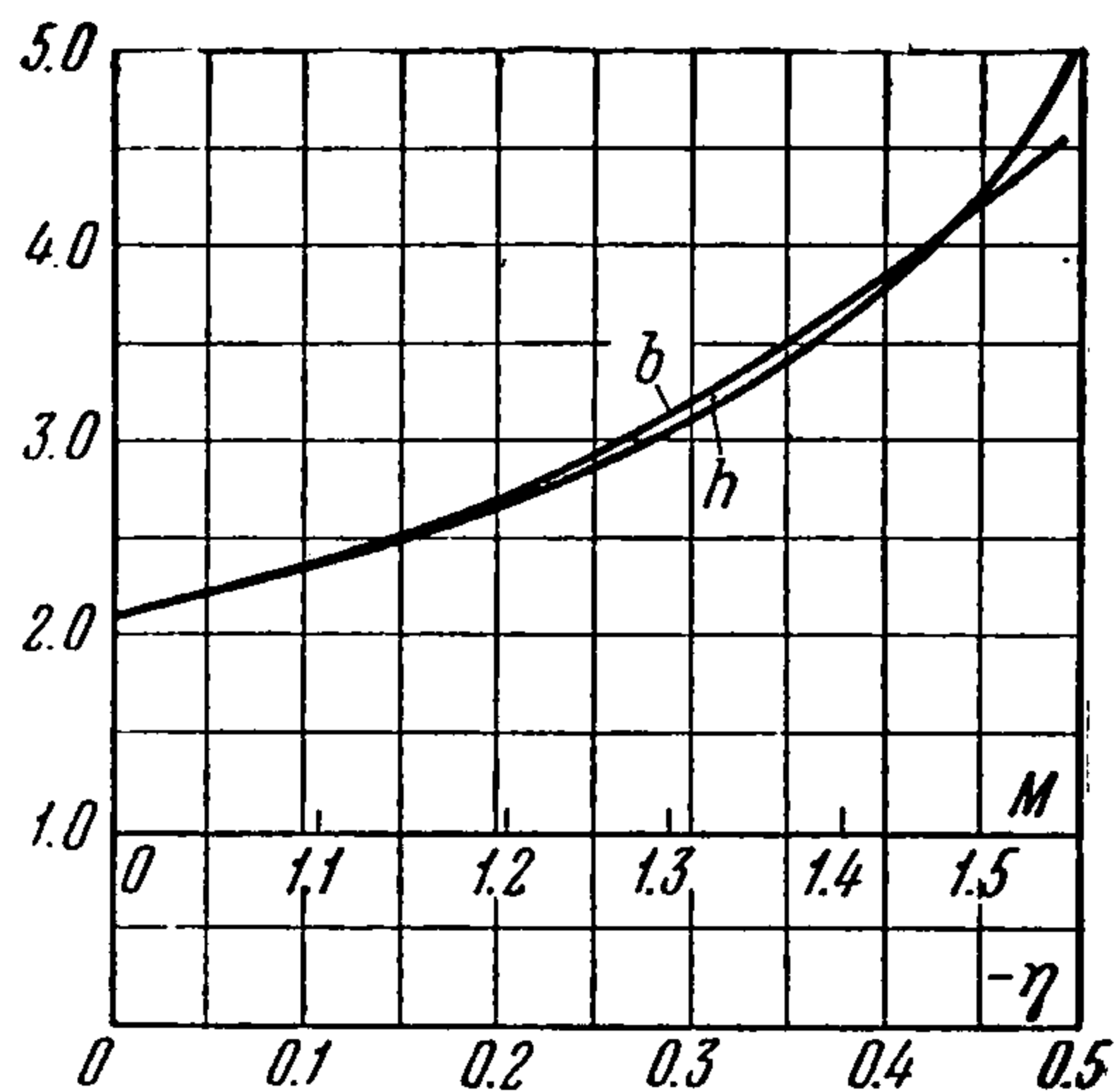
После подстановки  $\partial \eta / \partial \psi$  и  $\partial \theta / \partial \psi$  во второе уравнение системы (1.3) получим в результате интегрирования  $U(\psi)$ , а следовательно, и искомую функцию  $\theta$ :

$$\theta = c_1 c_2 e^{c\varphi} \sin c c_1 \psi + c c_4 \psi \quad (1.16)$$

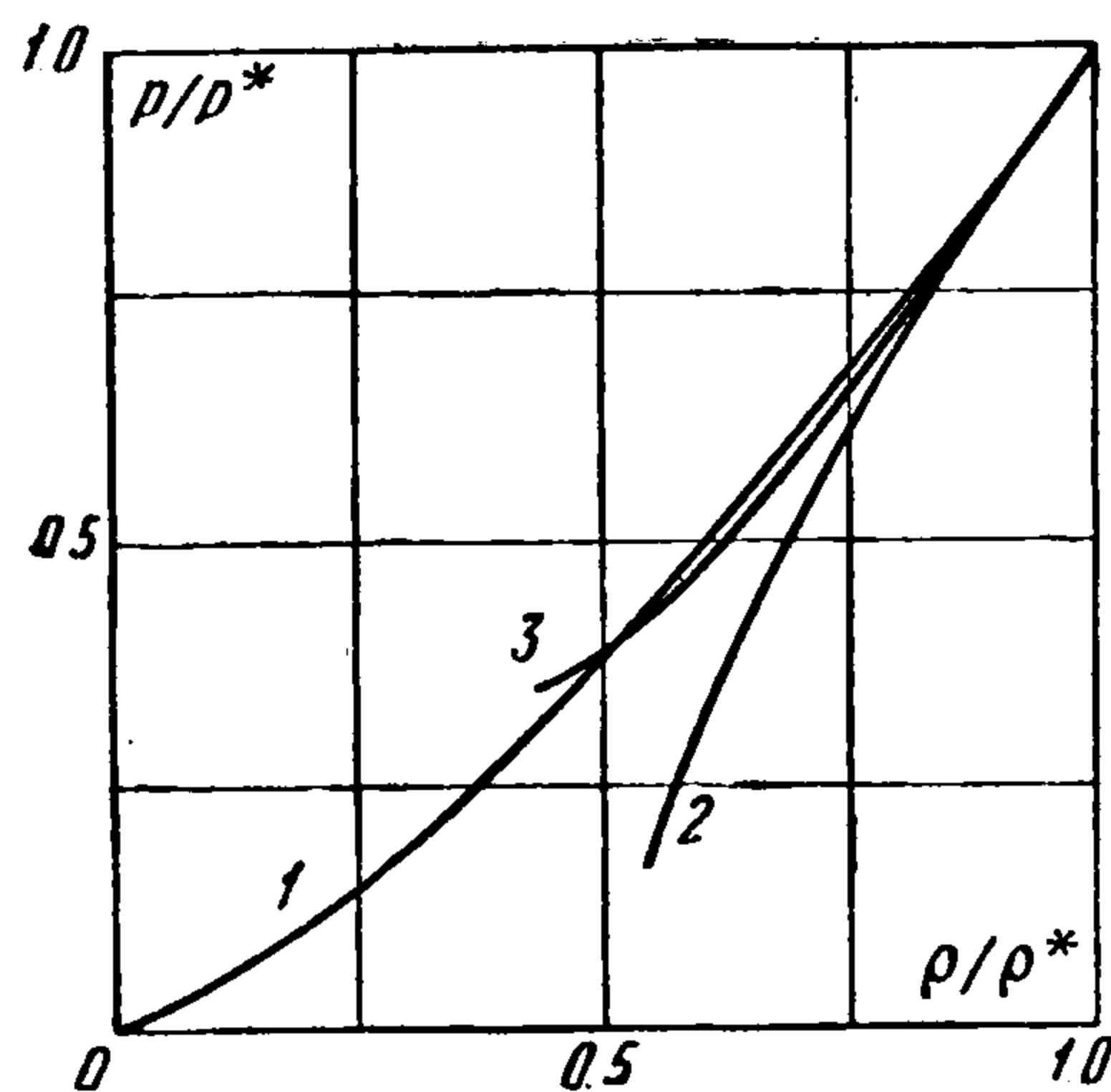
§ 2. Приближенное интегрирование уравнений Чаплыгина. Выражения (1.15) и (1.16) являются интегралами системы (1.3) в случае, если функция  $h$  определяется равенством (1.14). В интересующей нас системе (1.1), однако, вместо функции  $h$  содержится функция  $b$ , определяемая равенством (1.2).

Поэтому, если в выражении (1.14), определяющем функцию  $h$ , подобрать постоянные  $c_1$ ,  $c_4$  и  $c_5$  так, чтобы функция  $h$  аппроксимировала функцию  $b$ , то интегралы вспомогательной системы уравнений (1.3) можно будет считать приближенным решением уравнений Чаплыгина.

Так как нас интересует решение уравнений Чаплыгина для сверхзвукового участка сопла, прилегающего к переходной линии, то будем аппроксимировать функцию  $b$  в области отрицательных значений  $\eta$ , начиная от  $\eta = 0$  ( $\bar{v} = 1.0$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

Для выбора постоянных потребуем, чтобы равенства (1.11), (1.14), (1.15) удовлетворялись в центре сопла, где  $\varphi = \psi = 0$  и  $\eta = \theta = 0$ .

Отмечая звездочкой (\*) значения величин на переходной линии, получим (напомним, что  $c_3 = 1$ )

$$c_1^2 = \Phi_* h_*^3, \quad c_2 = \Phi_*, \quad c_4 = -\Phi_*^2 h_*^3, \quad c_5 = \frac{\pi}{2V\Phi_* h_*^3} \quad (2.1)$$

Следовательно, для рассматриваемого случая интегралы вспомогательной системы уравнений примут вид:

$$t = e^{c\varphi} \cos c\sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi \quad (2.2)$$

$$\theta = V\Phi_*^3 h_*^3 (e^{c\varphi} \sin c\sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi - c\sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi)$$

Причем

$$t = \frac{\Phi}{\Phi_*} = \frac{\Phi_* h_*^3}{\Phi_* h_*^3 - \eta h^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{h\sqrt{-\eta}}{\Phi_* h_*^3 - h^2 \eta} + \frac{1}{V\Phi_* h_*^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\Phi_* h_*^3}{-\eta}} = \frac{\pi}{2V\Phi_* h_*^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{\Phi_*^2 h_*^3} (-\eta)^{3/2} \quad (2.4)$$

Расчеты показывают, что при  $h_* = b_* = 2.11$  и  $\Phi_* = 0.2$  функция  $h$  достаточно хорошо аппроксимирует (фиг. 1) функцию  $b$  при  $0 \geq \eta > -0.45$ , т. е. при

$$1 \leq M < 1.5 \quad (2.5)$$

Известно, что замена функции  $b$  функцией  $h$  равносильна замене адиабаты некоторой другой зависимостью между плотностью и давлением газа. Указанная зависимость при известной функции  $h$  может быть легко установлена. Для рассматриваемого случая после несложных преобразований можно получить

$$\frac{P}{P_*} = 1 - 1.4 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right) + 0.295 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 + 0.012 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)^3 + \dots$$

Для адиабатической зависимости аналогичный ряд имеет вид:

$$\frac{P}{P_*} = 1 - 1.4 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right) + 0.280 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 + 0.056 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)^3 + \dots$$

Сравнение последних выражений, а также результаты расчетов (фиг. 2) показывают, что в диапазоне (2.5) аппроксимацию адиабаты зависимостью между плотностью и давлением, соответствующей функции  $h$  вида (2.4), можно считать удовлетворительной. Для того чтобы убедиться, что функции (2.2) действительно изображают течение в начальном участке сверхзвуковой части сопла Лаваля, имеющего дозвуковую часть типа (0.1), необходимо еще показать, что:

1) равенства (2.2) удовлетворяют условиям симметрии относительно линии тока  $\psi = 0$ :

$$\eta(\varphi, \psi) = \eta(\varphi, -\psi), \quad \theta(\varphi, \psi) = -\theta(\varphi, -\psi), \quad \theta(\varphi, 0) = 0$$

2) течение, представляемое равенствами (2.2), смыкается на переходной линии с течением, изображаемым функцией (0.1). Первое очевидно. Доказательству второго условия посвящен следующий параграф.

**§ 3. Разложение функции тока и ее производных в ряды** В работе [1] Ф. И. Франкль показал, что функция тока (0.1), представляющая дозвуковую часть сопла, и ее производные могут быть представлены на переходной линии рядами вида

$$\begin{aligned} \psi_* &= -B_2 \frac{\pi (2B)^{1/2}}{\Gamma(4/3) 3^{1/2}} \theta^{1/2} + D_1 \theta + D_2 \theta^{3/2} + \dots + D_m \theta^{\frac{2m+1}{3}} + \dots \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_* &= -B_2 \frac{\pi (2B)^{1/2}}{\Gamma(4/3) 3^{1/2}} \theta^{-1/2} + E_1 \theta^{1/2} + E_2 \theta + \dots + E_m \theta^{\frac{2m-1}{3}} + \dots \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_* &= -B_2 \frac{\pi (2B)^{1/2}}{\Gamma(4/3) 3^{1/2}} \theta^{-3/2} + D_1 + \frac{5}{3} D_2 \theta^{1/2} + \dots + \frac{2m+1}{3} D_m \theta^{\frac{2m-2}{3}} + \dots \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \eta}\right)_* &= B_2 \frac{\pi (2B)^{-1/2}}{\Gamma(4/3) 3^{1/2}} \theta^{-1/2} + \frac{1}{3} E_1 \theta^{-1/2} + E_2 + \dots + \frac{2m-1}{3} E_m \theta^{\frac{2m-4}{3}} + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $D_i$  и  $E_i$  — постоянные.

Покажем, что функция тока, определяемая равенствами (2.2) и представляющая начальный участок сверхзвуковой части сопла, а также ее производные могут быть на переходной линии представлены рядами того же вида.

Воспользуемся равенствами (2.2) и исключим из них  $\varphi$ . Тогда получим

$$\theta = \sqrt{\Phi_*^3 h_*^3} (t \operatorname{tg} c \sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi - c \sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi) \quad (3.2)$$

Учитывая, что на переходной линии  $t = 1.0$ , и разлагая  $\operatorname{tg} c \sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi$  в ряд, представим  $\theta$  в виде следующего ряда:

$$\theta = r (a_3 \delta^3 + a_5 \delta^5 + a_7 \delta^7 + \dots) \quad (r = \sqrt{\Phi_*^3 h_*^3}, \quad \delta = c \sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi_*) \quad (3.3)$$

Функцию  $\psi_*$  можно разложить в ряд по целым степеням  $\theta^{1/2}$ . Возводя обе части (3.3) в степень  $1/3$ , получим

$$\theta^{1/2} = r^{1/2} \delta (a_3 + a_5 \delta^2 + a_7 \delta^4 + \dots)^{1/2} = g_1 \delta + g_2 \delta^3 + g_3 \delta^5 + \dots$$

Если обратить последний ряд и вычислить первый коэффициент, то получим

$$\psi_* = \frac{3^{1/2}}{c \Phi_* h_*^2} \theta^{1/2} + N_1 \theta + N_2 \theta^{3/2} + \dots + N_m \theta^{\frac{2m+1}{3}} + \dots \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_* = \frac{1}{3^{1/2} c \Phi_* h_*^2} \theta^{-1/2} + N_1 + \frac{5}{3} N_2 \theta^{1/2} + \dots + \frac{2m+1}{3} N_m \theta^{\frac{2m-2}{3}} + \dots \quad (3.5)$$

Чтобы найти ряд для  $\partial \psi / \partial \eta$ , воспользуемся равенством (3.2). Дифференцируя его сначала по  $\eta$ , а затем по  $\theta$  и полагая в полученных результатах  $t = 0$ , получим на переходной линии

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_* = \frac{1}{c \Phi_* h_*^3} \sqrt{\frac{h_*}{\Phi_*}} \operatorname{ctg} c \sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi_*, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_* = \frac{1}{c \Phi_*^2 h_*^3} \operatorname{ctg}^2 c \sqrt{\Phi_* h_*^3} \psi_*$$

Из этих равенств следует, что

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_* = \sqrt{\frac{1}{c\Phi_* h_*^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_*}$$

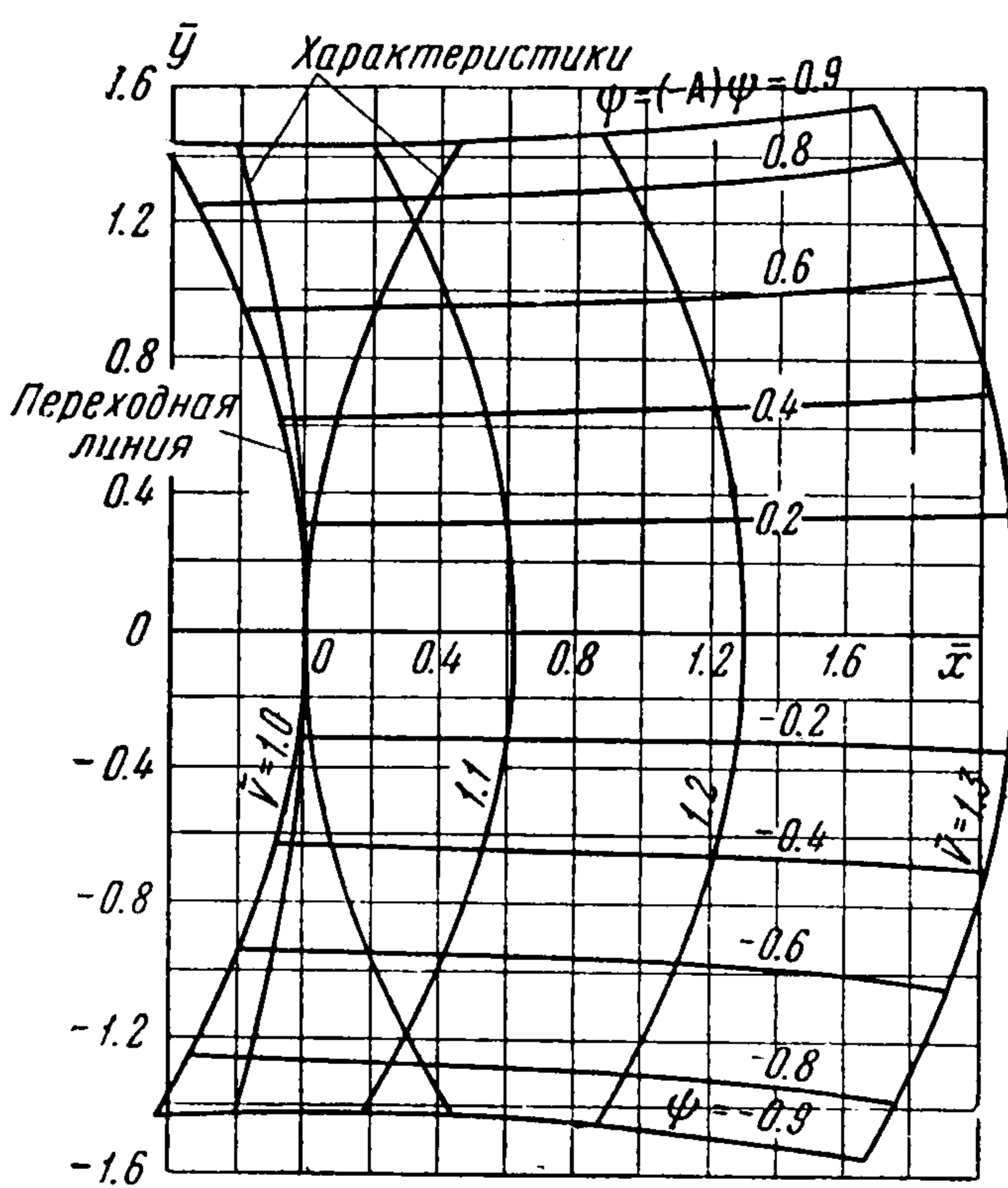
Если использовать (3.5), то легко найти

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_* = \frac{1}{3^{1/2} c\Phi_* h_*^2} \theta^{-1/3} + J_1 \theta^{1/3} + J_2 \theta + \dots + J_m \theta^{\frac{2m-1}{3}} + \dots$$

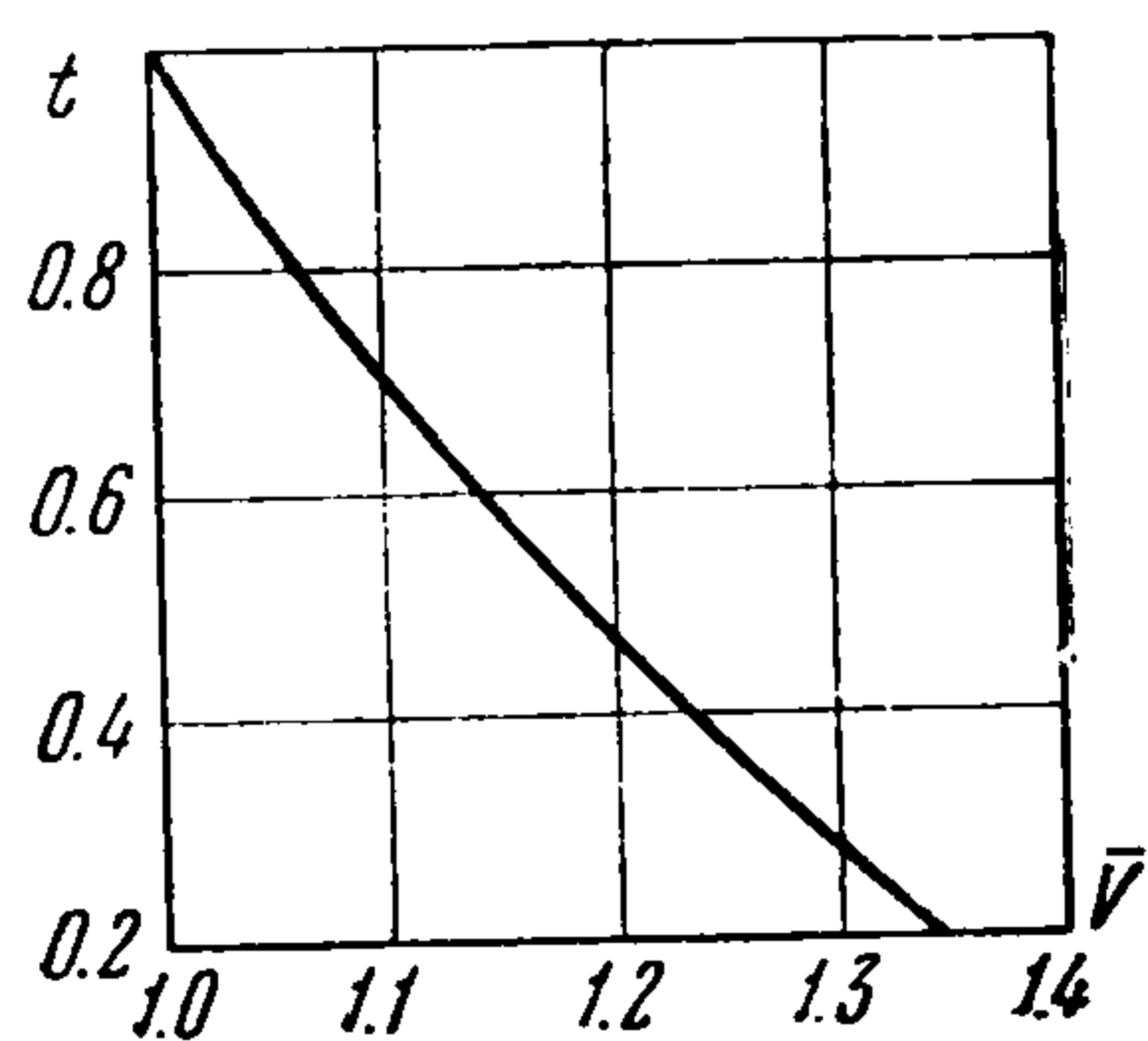
$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\eta}\right)_* = -\frac{1}{3^{1/2} c\Phi_* h_*^2} \theta^{-4/3} + \frac{1}{3} J_1 \theta^{-2/3} + J_2 + \dots + \frac{2m-1}{3} J_m \theta^{\frac{2m-4}{3}} + \dots$$

Таким образом, функция тока, представляемая равенствами (2.2), и ее производные действительно могут быть представлены рядами того же вида, что и функция тока (0.1).

Покажем еще, что решение С. В. Фальковича, найденное для переходной области [2] сопла, может быть получено из решения (2.2) как первое приближение. Для этого разложим в ряд функции, вхо-



Фиг. 4



Фиг. 3

дящие в (2.2), и ограничимся первыми двумя членами этих рядов. Используя (2.3), получим (величина  $h_*$  заменена ей равной  $b^*$ )

$$1 + \frac{1}{\Phi_* b_*^3} \eta = (1 + c\varphi) \left(1 - \frac{1}{2} c^2 \Phi_* b_*^3 \psi^2\right)$$

$$\theta = \sqrt{\Phi_*^3 b_*^3} \left[ (1 + c\varphi) \left( c \sqrt{\Phi_* b_*^3} \psi - \frac{1}{6} c^3 \Phi_*^{1/2} b_*^{3/2} \psi^3 \right) - c \sqrt{\Phi_* b_*^3} \psi \right]$$

Если открыть скобки и пренебречь в первом уравнении членом, содержащим  $\varphi\psi^2$ , а во втором уравнении членом, содержащим  $\varphi\psi^3$ , то после преобразований будем иметь

$$\eta = c\Phi_* b_* \left( \varphi - \frac{1}{2} c\Phi_* b_*^3 \psi^2 \right), \quad \theta = c^2 \Phi_*^2 b_*^3 \left( \varphi\psi - \frac{1}{6} c\Phi_* b_*^3 \psi^3 \right)$$

Эти выражения совпадают с решением, найденным в работе [2]. При этом постоянная  $A$ , введенная в работе [2], связана с постоянной  $c$  соотношением  $A = c\Phi_* b_*^3$ . Отсюда следует, что постоянная  $c$  имеет тот же смысл, что и постоянная  $A$  в работе [2].

§ 4. Построение течения в начальном участке сверхзвуковой части сопла. Равенства (2.2) дают возможность построить течение в сопле в плоскости  $\varphi\psi$ . Переход в плоскость  $xu$  может быть осуществлен обычным образом при помощи соотношений

$$dx = \frac{1}{v} \cos \theta d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta d\varphi, \quad dy = \frac{1}{v} \sin \theta d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho v} \cos \theta d\psi$$

В результате получаются следующие формулы для координат линий тока в сопле на переходном участке:

$$\bar{x} - \bar{x}_* = \Phi_* b_*^3 \int_t^1 \frac{1}{vt} \cos \theta dt \quad \left( \bar{x} = \frac{x}{-Aa_*} \right)$$

$$\bar{y} - \bar{y}_* = \Phi_* b_*^3 \int_t^1 \frac{1}{vt} \sin \theta dt \quad \left( \bar{y} = \frac{y}{-Aa_*} \right)$$

В этих формулах  $x_*$ ,  $y_*$  — координаты точки пересечения линии тока с переходной линией,  $t$  — функция, определяемая равенством (2.3); ее график представлен на фиг. 3.

Аналогичные выражения могут быть получены и для других характерных кривых: линий равных скоростей, характеристик и др.

Использование безразмерных координат позволяет построить течение в различных соплах (различные значения постоянной  $A$ ) на одном графике.

Результаты расчета линий тока и линий равных скоростей представлены на фиг. 4.

Поступила 26 VI 1956

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавала. Изв. АН СССР, серия матем., т. IX, вып. 5, 1945.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.

#### ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ Л. Р. ФАУЭЛЛА «ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ДЕЛЬТАОБРАЗНОГО КРЫЛА»<sup>[1]</sup>

Б. М. Булах

(Саратов)

В большой и содержательной работе Л. Фауэлла<sup>[1]</sup> решается задача об обтекании плоского треугольного крыла сверхзвуковым потоком невязкого газа при условии, что кромки крыла сверхзвуковые, угол атаки  $\delta$  не мал, скольжение крыла отсутствует (фиг. 1). Так как кромки крыла сверхзвуковые, то конические течения, возникающие при обтекании «низа» и «верха» крыла, не интерферируют между собой и могут рассматриваться отдельно. В этой интересной работе, к сожалению, как будет показано ниже, дается некорректная постановка краевой задачи для «верха» крыла, что лишает силы выводы Л. Фауэлла относительно обтекания «верха» крыла. Правильная картина обтекания и постановка краевых задач для треугольного крыла со сверхзвуковыми кромками содержатся в статье автора<sup>[2]</sup>.

Если конический поток имеет потенциал скорости  $\varphi$ , то составляющие скорости по осям декартовой системы координат  $oxyz$  запишутся в виде

$$u = \varphi_x = F_\xi, \quad v = \varphi_y = F_\eta, \quad w = \varphi_z = F - \xi u - \eta v, \quad \varphi = zF(\xi, \eta)$$

$$\left( \xi = \frac{x}{z}, \quad \eta = \frac{y}{z} \right)$$

где  $F$  удовлетворяет уравнению

$$AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = 0 \quad (1)$$

Здесь

$$A = a^2(1 + \xi^2) - (u - \xi w)^2, \quad C = a^2(1 + \eta^2) - (v - \eta w)^2$$

$$B = (a^2 - w^2)\xi\eta + (u\eta + v\xi)w - uv, \quad a^2 = a_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - W_1^2)$$