О ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

О. С. Рыжов

(Москва)

Рассмотрим течение идеального газа в окрестности поверхности перехода в сопле Лаваля, которое обладает двумя плоскостями симметрии. Прямую, по которой пересекаются эти плоскости, будем называть осью сопла, а точку пересечения оси сопла с перпендикулярной к ней поверхностью перехода через скорость звука — центром сопла. Совмещая начало цилиндрической системы координат x, r, ϑ с центром сопла и считая, что ось x совпадает с осью сопла, запишем уравнение, определяющее газовое течение в окрестности поверхности перехода, в виде

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}=0 \qquad (1)$$

Здесь φ — потенциал, причем:

$$\frac{a_*}{\varkappa+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=v_x, \qquad \frac{a_*}{\varkappa+1}\frac{\partial \varphi}{\partial r}=v_r, \qquad \frac{a_*}{\varkappa+1}\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}=v_\vartheta \qquad (2)$$

где v_x, v_r и v_ϑ являются добавками вдоль осей x, r и ϑ к скорости, равной по величине критической скорости a_* и направленной вдоль оси сопла; $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона.

Чтобы получить безударные сопла, будем рассматривать лишь аналитические решения уравнения (I). В случае плоских и круглых сопел искомые решения имеют вид [2,3]:

$$\varphi = r^4 f(\xi, \vartheta), \qquad \xi = x/r^2 \qquad (3)$$

В общем случае будем разыскивать решения уравнения движения (I) по-прежнему в автомодельной форме. Подставляя формулы (3) в уравнение (I), получим:

$$\left(4\xi^2-\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-12\,\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}+16 f=0 \qquad (4)$$

Поскольку нас интересуют лишь аналитические решения уравнения (1), то искомые решения уравнения (4) должны иметь вид:

$$f=\frac{A}{2}\xi^2+g_1(\vartheta)\,\xi+g_2(\vartheta) \qquad (5)$$

Используя уравнение (4), получим для функций $g_1(\vartheta)$ и $g_2(\vartheta)$ выражения:

$$g_1(\vartheta)=A^2\left(\frac{1}{4}-n\cos 2\vartheta\right)$$

$$g_2(\vartheta)=A^3\left(\frac{1}{64}-\frac{n}{12}\cos 2\vartheta+m\cos 4\vartheta\right) \qquad (6)$$

Здесь A, n и m — произвольные постоянные, причем в дальнейшем мы будем полагать всюду $A>0$. Из формул (2), (3), (5) и (6) находим выражения для потенциала и составляющих скорости потока по координатам:

$$\varphi=\frac{A}{2}x^2+A^2\left(\frac{1}{4}-n\cos 2\vartheta\right)xr^2+A^3\left(\frac{1}{64}-\frac{n}{12}\cos 2\vartheta+m\cos 4\vartheta\right)r^4$$

$$\frac{\varkappa+1}{a_*}v_x=Ax+A^2\left(\frac{1}{4}-n\cos\vartheta\right)r^2$$

$$\frac{\varkappa+1}{a_*}v_r=A^2\left(\frac{1}{2}-2n\cos 2\vartheta\right)xr+A^3\left(\frac{1}{16}-\frac{n}{3}\cos 2\vartheta+4m\cos 4\vartheta\right)r^3 \qquad (7)$$

$$\frac{\varkappa+1}{a_*}v_\vartheta=2nA^2xr\sin 2\vartheta+A^3\left(\frac{n}{6}\sin 2\vartheta-4m\sin 4\vartheta\right)r^3$$

В полученном решении функции v_x и v_r четные по ϑ, функция v_ϑ — нечетная. Отсюда следует, что формулы (7) описывают газовое течение в окрестности поверхности перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым в соплах, поперечное сечение которых обладает двумя осями симметрии.

Полагая в формулах ( ) $n=m=0$, получим поток в круглом сопле Лаваля; выбирая $n=\pm{}^1/_4$, $m={}^1/_{192}$, имеем течение в плоском сопле [1–3].

Рассмотрим теперь форму поверхности перехода через скорость звука, которая дается равенством $v_x = 0$. Отсюда имеем, используя вторую из формул (7)

$$-\xi = A\left(\frac{1}{4} - n\cos 2\vartheta\right)$$

Переходя от цилиндрической системы координат к декартовой по формулам $z = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, получим уравнение поверхности перехода в виде

$$-x = A\left(\frac{1}{4} + n\right)y^2 + A\left(\frac{1}{4} - n\right)z^2 \tag{8}$$

Из равенства (8) следует, что при $|n| < {}^1/_4$ поверхность перехода будет эллиптическим параболоидом, при $|n| = {}^1/_4$ — параболическим цилиндром, при $|n| > {}^1/_4$ — гиперболическим параболоидом. Из соотношений (7) легко видеть, что можно задать величину скорости потока, а следовательно, и форму поверхности перехода соответствующими течению в плоском или круглом сопле, хотя течение в целом таковым не является. Отметим еще, что в общем случае поверхности $v_r = 0$ и $v_\vartheta = 0$ могут не совпадать между собой; первая из них описывается уравнением

$$\xi = -A\frac{{}^1/_{16} - {}^1/_3\, n\cos 2\vartheta + 4m\cos 4\vartheta}{{}^1/_2 - 2n\cos 2\vartheta}$$

вторая дается равенством

$$\xi = A\frac{-{}^1/_6\, n\sin 2\vartheta + 4m\sin 4\vartheta}{2n\sin 2\vartheta}$$

Найдем уравнения характеристических поверхностей, проходящих через центр сопла. Характеристические поверхности описываются дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2 - Ax = A^2\left(\frac{1}{4} - n\cos 2\vartheta\right)r^2 \tag{9}$$

которое можно представить в виде $\operatorname{grad}^2 x = \partial\varphi/\partial x$. Отсюда следует сразу, что характеристические поверхности при подходе к поверхности перехода через скорость звука становятся перпендикулярными к оси сопла. Поэтому в точке $x = 0$, $r = 0$ характеристические поверхности касаются поверхности перехода. Мы рассмотрим лишь такие характеристические поверхности, которые обладают теми же плоскостями симметрии, что и само сопло, проходят через его центр и не имеют изломов. Для определения их положим:

$$x = \chi(\vartheta)\, r^2 \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $\chi(\vartheta)$:

$$\left(\frac{d\chi}{d\vartheta}\right)^2 = -4\chi^2 + A\chi + \frac{A^2}{4} - A^2 n\cos 2\vartheta \tag{11}$$

Для рассматриваемых нами характеристических поверхностей производная $d\chi/d\vartheta$ должна быть равной нулю при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = {}^1/_2\pi$, так как в этом случае функция $x(r, \vartheta)$, определенная в первом квадранте плоскости $r\vartheta$, может быть продолжена симметрично, как это следует из уравнения (11), в остальные три квадранта без разрывов первой производной по ϑ. Этого можно достигнуть лишь при $|n| \leqslant {}^5/_{16}$. Искомые решения уравнения (11) можно представить в виде:

$$\chi = \frac{A}{16}\left[2 \pm \Delta_1 \pm \Delta_2 + (\pm\Delta_1 \mp \Delta_2)\cos 2\vartheta\right]$$

$$\chi = \frac{A}{16}\left[2 \pm \Delta_1 \mp \Delta_2 + (\pm\Delta_1 \pm \Delta_2)\cos 2\vartheta\right]$$

где $\Delta_1 = \sqrt{5 - 16n}$, $\Delta_2 = \sqrt{5 + 16n}$. Четыре уравнения характеристик, касающихся в центре сопла поверхности перехода через скорость звука, можно теперь записать в декартовой системе координат в виде

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{8} A (1 \pm \Delta_2) y^2 + \frac{1}{8} A (1 \pm \Delta_1) z^2 \\
x &= \frac{1}{8} A (1 \mp \Delta_2) y^2 + \frac{1}{8} A (1 \pm \Delta_1) z^2
\end{aligned}
\tag{12}
$$

При $|n| < {}^1/_4$ первые две из формул (12) представляют собой уравнения эллиптических параболоидов, простирающихся в разные стороны вдоль оси сопла, вторые две — гиперболических параболоидов. При $n = {}^1/_4$ из уравнений (12) имеем

$$
x = \frac{1}{2} Ay^2 + \frac{1}{4} Az^2, \qquad x = -\frac{1}{4} Ay^2 + \frac{1}{4} Az^2, \qquad x = -\frac{1}{4} Ay^2, \qquad x = \frac{1}{2} Ay^2
$$

При $n = -{}^1/_4$ получим соответственно:

$$
x = \frac{1}{4} Ay^2 + \frac{1}{2} Az^2, \qquad x = \frac{1}{2} Az^2, \qquad x = -\frac{1}{4} Az^2, \qquad x = \frac{1}{4} Ay^2 - \frac{1}{4} Az^2
$$

Таким образом, при $|n| = {}^1/_4$ две из рассматриваемых поверхностей представляют собой параболические цилиндры, одна — эллиптический параболоид и одна — гиперболический параболоид. При $|n| > {}^1/_4$ две из характеристических поверхностей, даваемых формулами (12), являются эллиптическими параболоидами, простирающимися вдоль оси сопла в сторону возрастающих значений x, остальные две — гиперболическими параболоидами. При $|n| = {}^5/_{16}$ эллиптические и гиперболические параболоиды сливаются попарно между собой. Отметим, что первое из решений (12) описывает возмущение, вносимое иглой, помещенной на оси сопла и касающейся своим острием поверхности перехода; в этом случае конус Маха превращается в эллиптический параболоид.

При ${}^1/_4 < n < {}^5/_{16}$ между двумя касающимися друг друга вдоль кривой, лежащей в плоскости $z = 0$, эллиптическими параболоидами, которые даются равенствами (12), можно построить характеристические поверхности, имеющие изломы на оси z в сечениях $x = \text{const}$ и касающиеся вдоль указанной кривой характеристических параболоидов. При $-{}^5/_{16} < n < -{}^1/_4$ аналогичные характеристические поверхности будут иметь изломы на оси y в сечениях $x = \text{const}$. Характеристические поверхности при $|{}^1/_4| < n < |{}^5/_{16}|$, расположенные вниз по потоку, касающиеся в центре сопла поверхности перехода и не имеющие иных общих точек с внешним характеристическим параболоидом, кроме точки $x = 0$, $r = 0$, исчезают. При $|n| > {}^5/_{16}$ характеристической поверхности, нигде не касающейся поверхности перехода через скорость звука, кроме центра сопла, и простирающейся вниз по потоку (т. е. отвечающей предельному «конусу» Маха, который исходит из центра сопла), не существует. Последние утверждения легко получить, если записать уравнение (9) в виде:

$$
\frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = \pm \sqrt{Ax + A^2 \left(\frac{1}{4} - n \cos 2\vartheta\right) r^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2}
$$

и анализировать подкоренное выражение в полученной формуле.

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность С. А. Христиановичу за обсуждение темы и результатов настоящей работы.

Поступила 15 II 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Известия АН СССР. Серия математическая, т. 9, № 5, 1945.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля, ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
3. Рыжов О. С. Некоторые вырожденные околозвуковые течения. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.