

О ПОДОБИИ ТРАНСЗВУКОВЫХ ПЛОСКИХ ПОТОКОВ

Г. Н. Копылов

(Ленинград)

Упрощенные уравнения околосзвукового движения газа и критерий околосзвукового подобия были установлены Т. Карманом [5] и Фальковичем, независимо, для безвихревых движений. Л. В. Овсянников [2] показал, что указанные уравнения можно в пределах точности выполнения уравнений движения и краевых условий применять для течений с ударными волнами. В работах [3,4] и др. для приближенных уравнений ставились краевые задачи, соответствующие задаче обтекания клиновидного профиля трансзвуковым потоком в различных режимах. Однако сравнение полученных решений с экспериментальными данными дает систематическое расхождение в коэффициенте сопротивления давления, если число M набегающего потока несколько отстает от единицы. Это обстоятельство было отмечено Д. Спрейтером [5], который предложил иной способ упрощения уравнений движения и указал новый критерий подобия. Метод упрощения уравнений Спрейтера неубедителен в связи с отсутствием оценок, отбрасываемых в уравнениях и краевых условиях членов.

В данной работе методом, аналогичным примененному Л. В. Овсянниковым [2], основные уравнения движения упрощаются в предположении, что число M набегающего потока мало отличается от единицы, скорости в потоке мало отличаются от скорости набегающего потока и направление вектора скорости мало отличается от направления потока вдали от тела. При этом выявлен некоторый критерий подобия, дающий более точные результаты при изучении течений с переходом через скорость звука (трансзвуковых течений).

§ 1. Уравнения безвихревого движения газа. Рассмотрим уравнения безвихревого движения плоско-параллельного потока идеального газа без трения:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь x, y — координаты плоскости течения, v_x, v_y — компоненты вектора скорости, ρ — плотность газа.

Пусть далее

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 - \varepsilon AU, \quad \frac{v_y}{v_\infty} = \varepsilon^{3/2} AV$$

$$\frac{y}{l_*} = \varepsilon^{-1/2} Y, \quad \frac{x}{l_*} = X \quad (1.2)$$

где v_∞ — скорость набегающего потока, l_* — характерная длина, ε — малая величина и A — постоянная при данном числе M_∞ величина, меньшая единицы.

Исходя из уравнения Бернулли, легко находим, что

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{w^2}{v_\infty^2} \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (1.3)$$

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{w^2}{v_\infty^2} \right) \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (1.4)$$

Обозначая

$$K = \frac{1 - M_\infty^2}{\varepsilon} \quad (1.5)$$

и считая величину K порядка единицы ($1 - M_\infty^2$ порядка ε), имеем после разложения (1.3), (1.4) в ряд по степеням $1 - w^2/v_\infty^2$ и использования (1.2)

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = 1 + M_\infty^2 \varepsilon AU - \frac{k-1}{2} \varepsilon^2 A^2 U^2 + O(\varepsilon^2 A^2) \quad (1.6)$$

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + k M_\infty^2 \varepsilon AU + O(\varepsilon^3 A^2) \quad (1.7)$$

Подстановка (1.6) и (1.2) в (1.1) дает, учитывая (1.5):

$$\varepsilon^2 A \left[K \frac{\partial U}{\partial X} + A(k+1) U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + O(\varepsilon^3 A^2) = 0 \quad (1.8)$$

$$\varepsilon^{1/2} A \left[\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right] = 0$$

Принимая

$$A = \frac{1}{k+1+a(1-M_\infty^2)} \quad (1.9)$$

получим: первое уравнение (1.1) выполняется с точностью $\varepsilon^3 A^2$ при любом a , если

$$(K+U) \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1.10)$$

Второе уравнение (1.2) выполняется точно при

$$\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (1.11)$$

если положить $U' = K + U$, то уравнения (1.10), (1.11) будут обычными уравнениями околосзвукового движения относительно U' , V .

Параметр a остается пока неопределенным. Если положить $a = 0$, $A = 1/(k+1)$, то получим приближение по Карману [1] и Овсянникову [2]. Полагая $a = -k-1$, $A = 1/(k+1)M_\infty^2$, имеем приближение по Спрейтеру [5].

Для определения a необходимо дополнительное требование наилучшего приближения какого-либо из газодинамических соотношений. При изучении течений с переходом через скорость звука наиболее важным является требование наилучшего совпадения линии параболичности точной системы уравнений (1.1) и системы приближенных уравнений (1.10), (1.11). Таким образом будем искать a из условия наилучшего приближения соотношения на звуковой линии

$$\left(\frac{w}{v_\infty} \right) = \left(\frac{a_*}{v_\infty} \right)^2 \quad (1.12)$$

Выражая правую часть уравнения (1.12) через M_∞ и используя (1.2), (1.5), получим, учитывая, что на линии параболичности

$$2\varepsilon K \left(A - \frac{1}{(k+1)M_\infty^2} \right) + \varepsilon^2 A^2 K^2 + O(\varepsilon^3 A^2) = 0 \quad (1.13)$$

или, подставляя в первый член (1.9):

$$\varepsilon^2 A K^2 \left[A - 2 \frac{a+k+1}{(k+1)M_\infty^2} \right] + O(\varepsilon^3 A^2) = 0$$

Снова используя (1.9) получим

$$- \varepsilon^2 A^2 K^2 \left[\frac{2a+2k+1}{(k+1)M_\infty^2} \right] + O(\varepsilon^2 A^2) = 0$$

Отсюда видно, что уравнение (1.12) выполняется с точностью $\varepsilon^3 A^2$, если $a = -k - 1/2$ и, следовательно,

$$A = \frac{1}{1/2 + (k+1/2)M_\infty^2} \quad (1.14)$$

Заметим, что при приближении по Спрейтеру ($A = 1/(k+1)M_\infty^2$), как это видно из (1.13), уравнение (1.12) выполняется с точностью $\varepsilon^2 A^2$, т. е. хуже, чем при выборе A по формуле (1.14).

Найдем коэффициент давления в рассматриваемом приближении. Известно, что

$$\bar{p} = \frac{2}{kM_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$$

Отсюда, используя (1.7), получим с точностью до $\varepsilon^3 A^2$:

$$\bar{p} = 2\varepsilon A U \quad (1.15)$$

Для сравнения полученного приближения с приближением Кармана и Спрейтера вычислим коэффициент давления в звуковой точке на профиле.

В звуковой точке $U = -K$ и, следовательно, учитывая (1.5), (1.14):

$$\bar{p}_* = 2 \frac{1 - M_\infty^2}{[1/2 + (k + 1/2) M_\infty^2]^{1/2}} \quad (1.16)$$

На фиг. 1 сплошной линией дана точная зависимость \bar{p}_* от M_∞ , пунктиром, вычисленная по формуле (1.16), штрихами — по Спрейтеру, штрих-пунктиром — по Карману.

§ 2. Соотношения на линии сильного разрыва. Выясним точность выполнения соотношений на линии сильного разрыва в предположении, что за ней реализуется безвихревой поток и, следовательно, плотность и давление вычисляются по формулам (1.5), (1.7).

Соотношения на линии сильного разрыва имеют вид:

$$p - p_1 = \rho_1 [f'(y) v_{y_1} - v_{x_1}] (v_x - v_{x_1})$$

$$v_y - v_{y_1} = -f'(y) (v_x - v_{x_1})$$

$$\rho [f'(y) v_y - v_x] = \rho_1 [f'(y) v_{y_1} - v_{x_1}]$$

$$(k + 1) (\rho \rho_1 - p_1 \rho) = (k - 1) (\rho \rho - p_1 \rho_1)$$

Здесь индекс относится к параметрам до линии сильного разрыва, $x = f(y)$ — уравнение линии сильного разрыва.

Подстановка (1.6), (1.7), (1.2) в указанные соотношения дает

$$O(\epsilon^3 A^2) = 0, \quad \epsilon^{3/2} A [(V - V_1) + \Phi'(Y)(U - U_1)] = 0$$

$$\epsilon^2 A \left[K(U - U_1) + \frac{1}{2}(U^2 - U_1^2) + \Phi'(Y)(V - V_1) \right] + O(\epsilon^3 A^2) = 0$$

$$O(\epsilon^3 A^2) = 0$$

где $\Phi'(Y)$ определяется соотношением $f'(y) = \epsilon^{-1/2} \Phi'(Y)$.

Следовательно, соотношения на линии сильного разрыва при значении K порядка единицы выполняются с точностью $\epsilon^3 A^2$, если

$$V - V_1 + \Phi'(Y)(U - U_1) = 0 \quad (2.1)$$

$$K(U - U_1) + \frac{1}{2}(U^2 - U_1^2) + \Phi'(Y)(V - V_1) = 0 \quad (2.2)$$

Если положить $U' = U + K$, то уравнения (2.1), (2.2) совпадут с обычными соотношениями на линии сильного разрыва в околосзвуковом потоке^[2]. Исключая из уравнения (2.1) $\Phi'(Y)$, получим уравнение ударной поляры

$$2(V - V_1) + (U + U_1 + 2K)(U - U_1)^2 = 0 \quad (2.3)$$

Заметим, что если имеет место (2.3), точное уравнение ударной поляры выполняется с точностью большей, чем вся система соотношений на линии сильного разрыва. Действительно, запишем для простоты уравнение ударной поляры для случая, когда перед линией сильного разрыва имеет место невозмущенный поток:

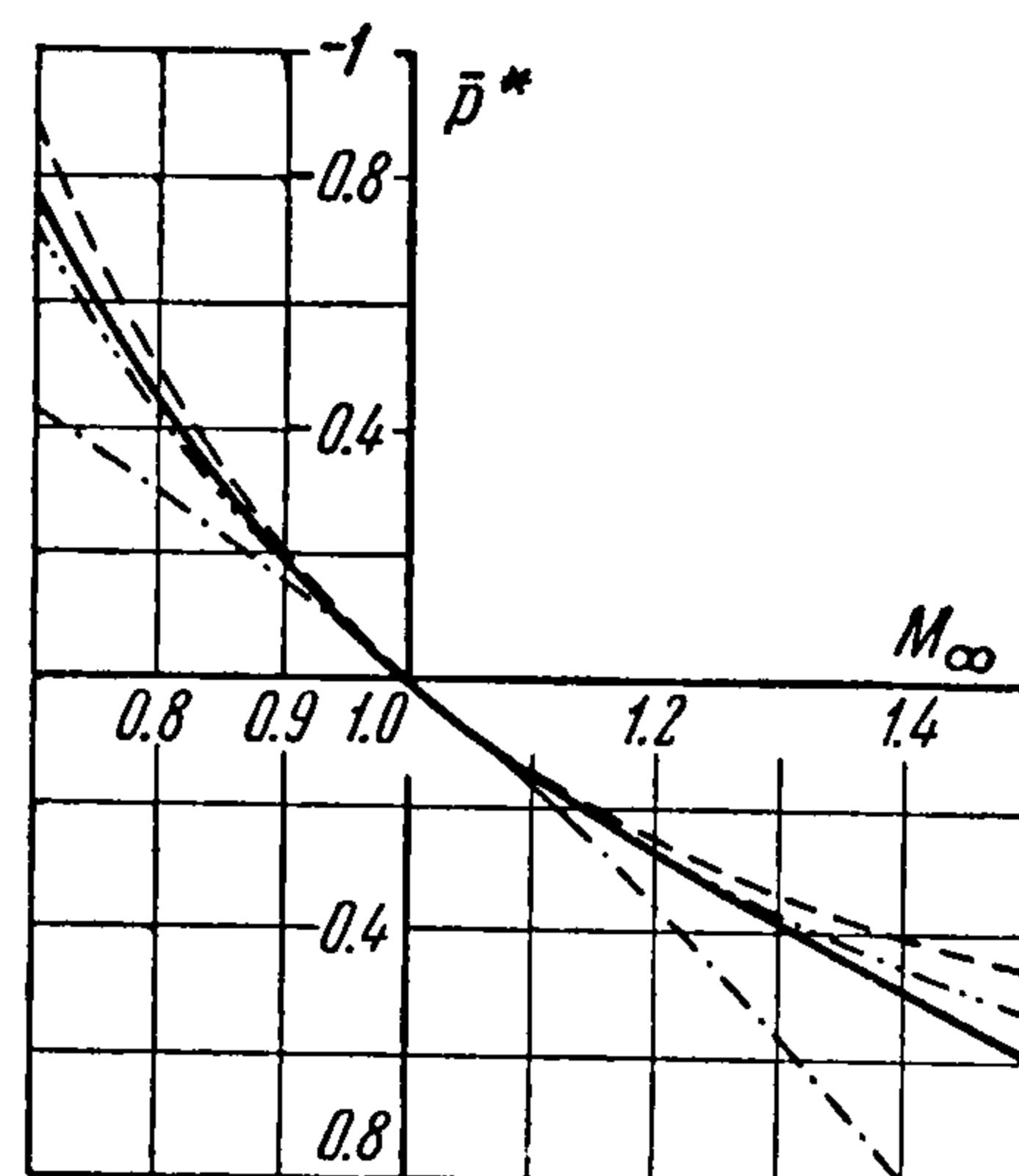
$$\left(\frac{v_y}{v_\infty}\right)^2 \left[\frac{2}{k+1} - \frac{v_x}{v_\infty} + \frac{a^2}{v_\infty^2} \right] = \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right)^2 \left[\frac{v_x}{v_\infty} - \frac{a^2}{v_\infty^2} \right] \quad (2.4)$$

Подстановка (1.2) дает

$$\epsilon^2 A^2 \left[\frac{2V^2 + 2KU^2}{(k+1)M_\infty^2} + AU^3 \right] + O(\epsilon^4 A^3) = 0$$

Подставляя A по формуле (1.9):

$$\frac{\epsilon^3 A^2}{(k+1)M_\infty^2} [2V^2 + (U + 2K)U^2] - \epsilon^4 A^3 K \frac{a + k + 1}{(k+1)M_\infty^2} + O(\epsilon^4 A^3) = 0$$



Фиг. 1

Считая K порядка единицы, получим, что при любом выборе a уравнение (2.4) выполняется с точностью $\epsilon^4 A^3$, если имеет место (2.3), где положено $U_1 = 0$.

Если не вводить ограничения на K , то та же степень точности получится, если выбрать $a = -k - 1$, т. е. в приближении Спрейтера^[5]. Так как ϵ связано с толщиной профиля, последнее означает, что в приближении Спрейтера околосзвуковая ударная поляра хорошо совпадает с точной полярой при любых числах M_∞ в окрестности прямого скачка и слабых косых скачков. Отметим, что при выборе A по (1.14) околосзвуковая поляра совпадает с точной лучше всего в окрестности звуковой линии.

§ 3. Задача обтекания. Рассмотрим краевые условия задачи обтекания. Легко видеть, что условия на бесконечности принимают вид:

$$X = \infty, \quad Y = \infty, \quad U = V = 0 \quad (3.1)$$

условия на теле

$$v_y = v_x \tau (\bar{\theta} + \bar{\alpha}) \quad (3.2)$$

где τ — относительная толщина тела, $\bar{\theta} = \theta/\tau$, $\bar{\alpha} = \alpha/\tau$, θ — угол наклона касательной к профилю по отношению к хорде, α — угол атаки профиля.

Подстановка (1.2) в краевое условие (3.2) дает $\epsilon^{1/2} AV = (1 - \epsilon AU) \tau (\bar{\theta} + \bar{\alpha})$. Полагая

$$\epsilon = (\tau/A)^{2/3} \quad (3.3)$$

получим, что (3.2) выполняется с точностью $\epsilon^{5/2} A^2$, если

$$V = \bar{\theta} + \bar{\alpha} \quad (3.4)$$

Учитывая, что в переменных $U' = U + K$, V , X , Y уравнения (1.10), (1.11), соотношения (2.1), (2.2) и краевые условия (3.1), (3.4) совпадают с соотношениями в приближении Кармана^[2], результаты решения задачи обтекания могут быть в различных приближениях в зависимости от выбора A . Решение, как это видно из перечисленных соотношений, зависит от K околосзвукового критерия подобия и $\bar{\alpha} = \alpha/\tau$.

Критерий околосзвукового подобия с учетом (3.3) примет вид:

$$K = \frac{1 - M_\infty^2}{(\tau/A)^{2/3}} \quad (3.5)$$

и, в частности, для трансзвуковых потоков

$$K = \frac{1 - M_\infty^2}{\tau^{2/3} [1/2 + (k + 1/2) M_\infty^2]^{2/3}}$$

Аэродинамические коэффициенты подсчитываются по формулам

$$C_x = \tau^{5/3} A^{1/3} \bar{C}_x, \quad C_y = \tau^{5/3} A^{1/3} \bar{C}_y, \quad C_m = \tau^{5/3} A^{1/3} \bar{C}_m \quad (3.6)$$

где \bar{C}_x , \bar{C}_y , \bar{C}_m — некоторые интегралы по контуру профиля, зависящие от K , $\bar{\alpha}$ и формы профиля.

Для сравнения приближения, соответствующего выбору A по формуле (1.14), с приближением Кармана, Спрейтера и точной теорией на фиг. 2 и 3 представлены соотношения между полууглом раствора клина θ_0 и числом M_∞ соответственно для случаев присоединения ударной волны и перехода течения в чисто сверхзвуковой режим. Сплошной линией представлена точная теория, пунктиром — данное приближение, штриховой линией — приближение Спрейтера, штрих-пунктиром — приближение Кармана.

На фиг. 4 дано сравнение результатов расчета сопротивления давления по передней части клиновидного профиля^[3, 4] в данном приближении (сплошная линия), приближения Спрейтера (штриховая линия), приближения Кармана (штрих-пунктир) с экспериментом^[6] (кружочками) для полуугла раствора клина $\theta_0 = 7.5^\circ$. Вертикальными черточками отмечен момент перехода режима обтекания в чисто сверхзвуковой.

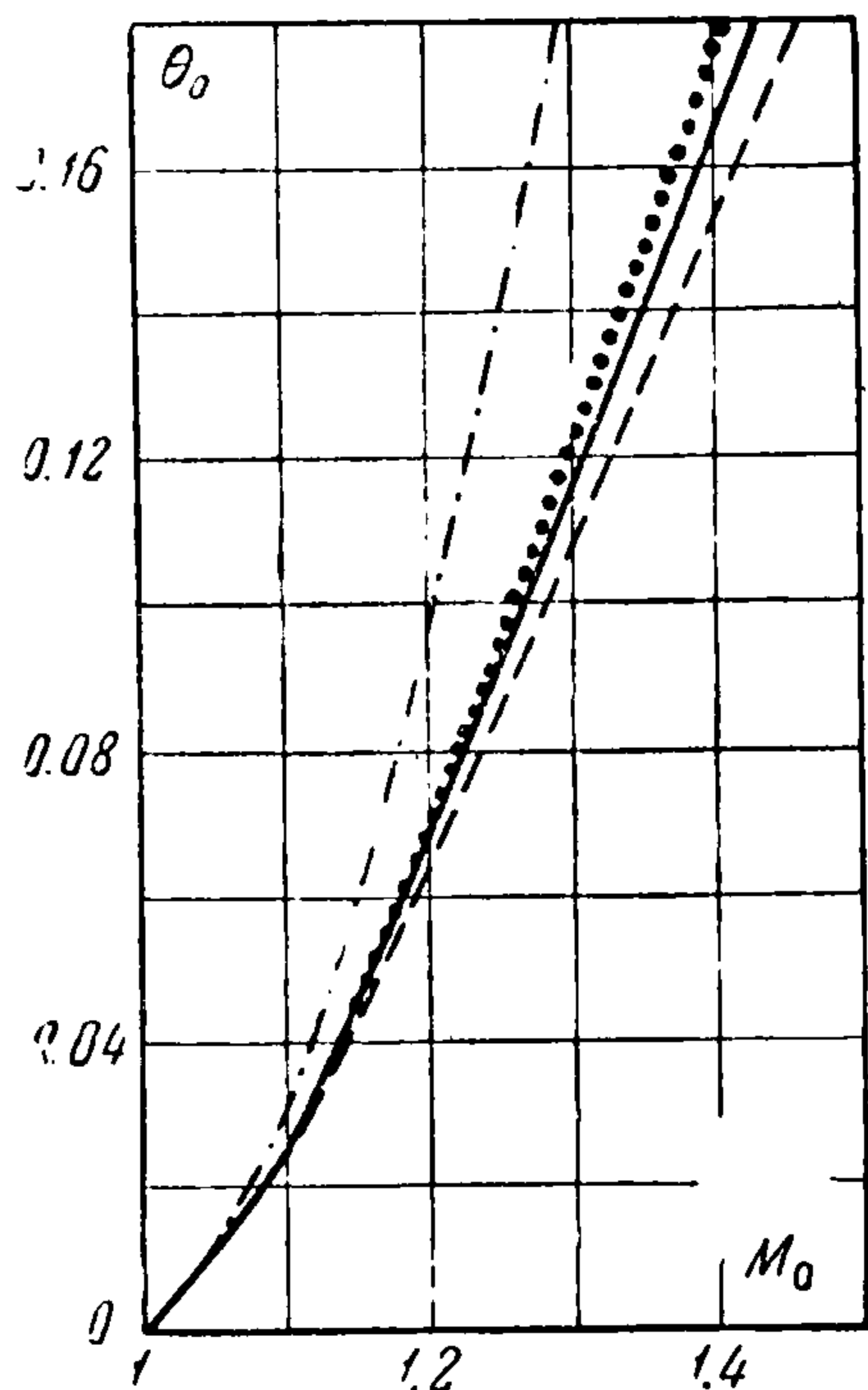
В заключение отметим, что при отсутствии в потоке ударных волн (например, в докритическом потоке) можно не вводить ограничений на M_∞ , считая $1 - M_\infty^2$ достаточно большой по сравнению с ϵ величиной. В этом случае (1.6) примет вид:

$$\rho/\rho_\infty = 1 + M_\infty^2 \epsilon AU - \frac{M_\infty^2 [(k-2) M_\infty^2 + 1]}{2} \epsilon^2 A^2 U^2 + O(\epsilon^3 A^2)$$

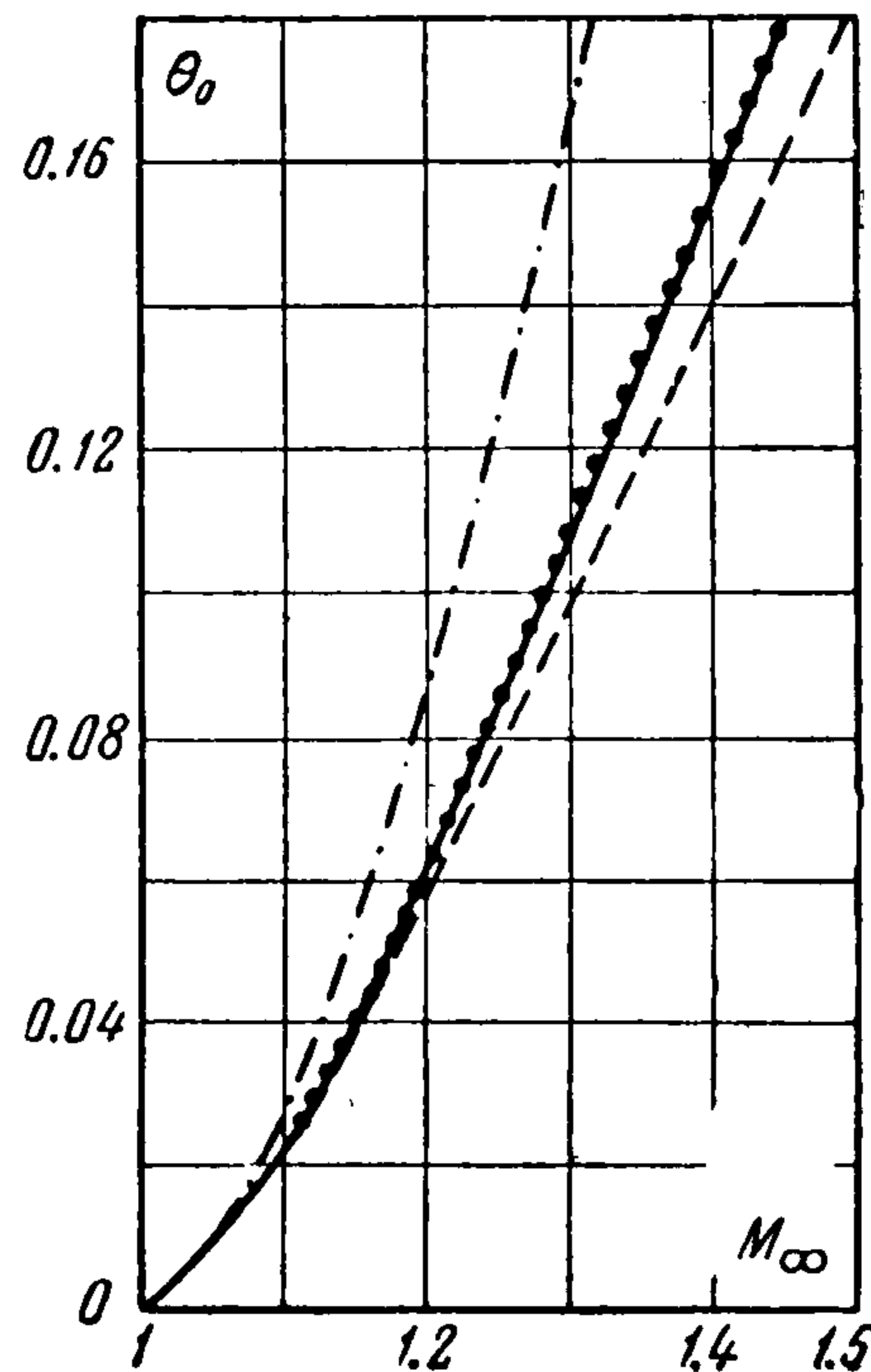
и уравнения (1.1) выполняются с точностью до $\epsilon^2 A^2$, если имеют место (1.10), (1.11) и

$$A = 1/M_\infty^2 [(k-2) M_\infty^2 + 3] \quad (3.7)$$

На фиг. 5 приведена зависимость $\bar{C}_x = f(K)$, где \bar{C}_x определена по формуле (3.6), для струйного обтекания клина при докритических скоростях^[7]. А выбрано: 1) по фор-

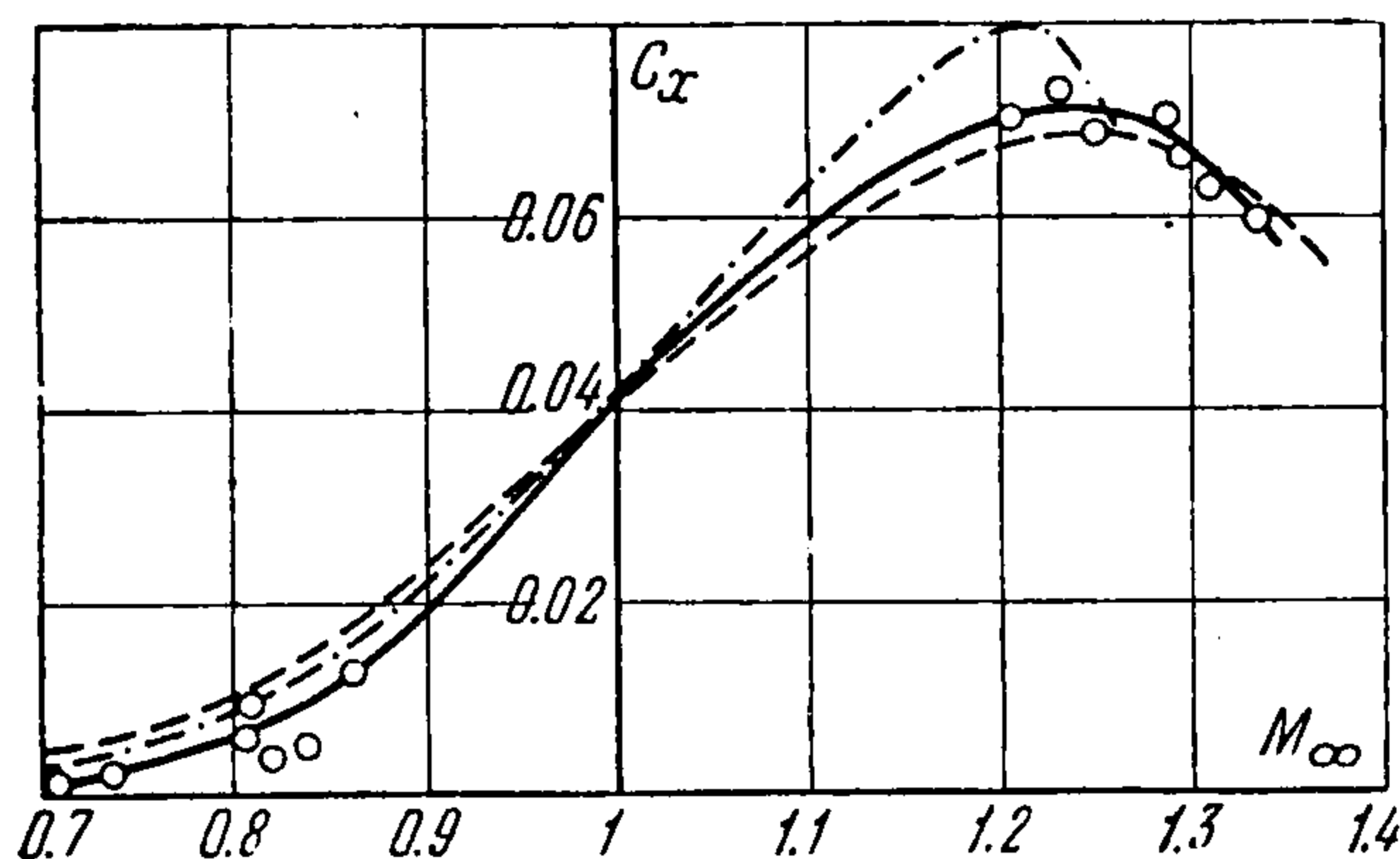


Фиг. 2

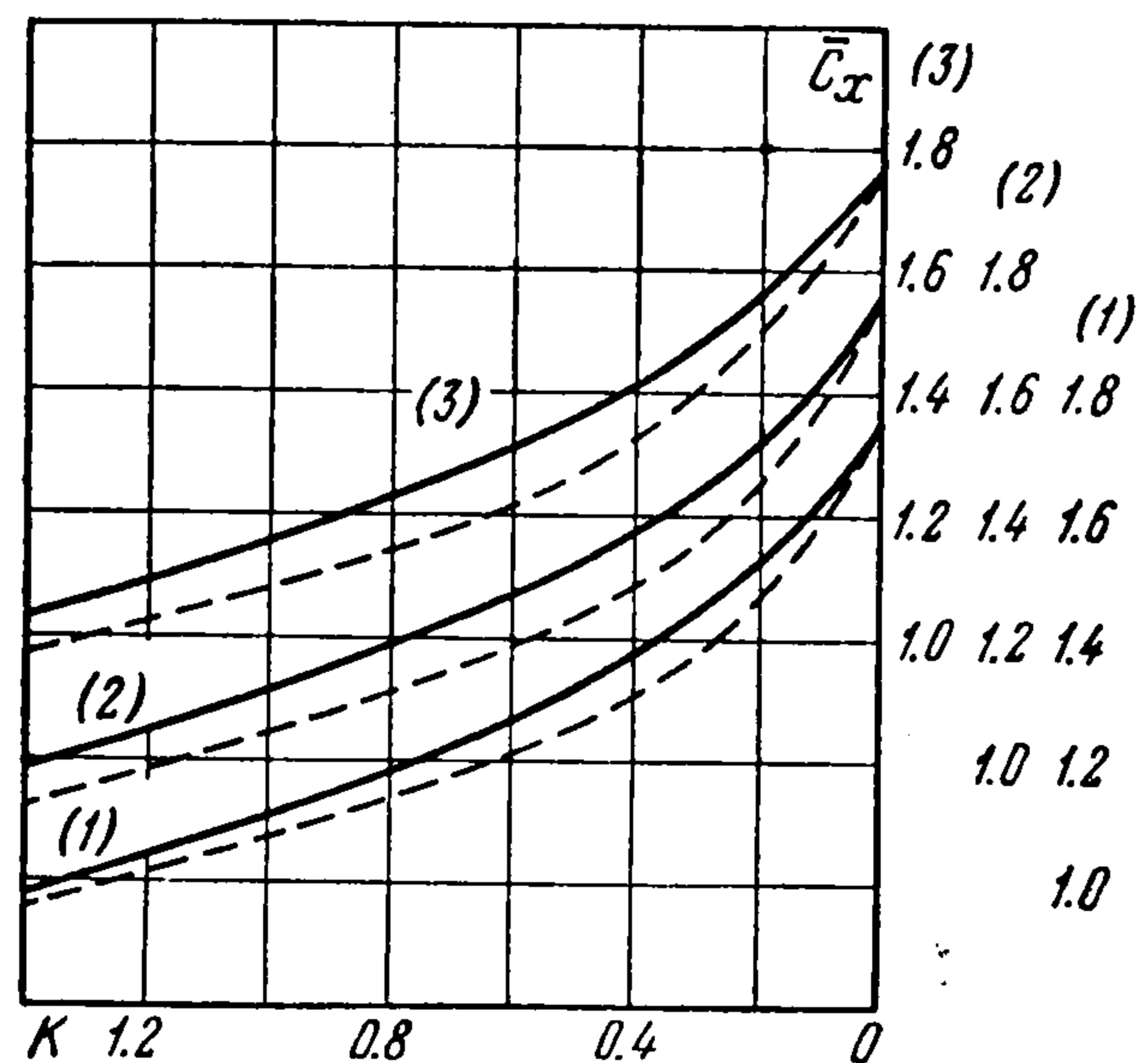


Фиг. 3

муле (3.7), 2) по Спрейтеру или по формуле (1.14), 3) по Карману. Сплошной линией отмечен случай клина с полууглом раствора 5° , точками с полууглом раствора $2,5^\circ$. Так как для струйного обтекания клина при докритических скоростях в потоке отсутствуют звуковая линия и ударные волны, то наилучшее совпадение кривых, под-



Фиг. 4



Фиг. 5

считанных при различных углах полураствора клина, получается при выборе А по формуле (3.7).

Поступила 3 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Карман Т. Закон подобия для трансзвукового потока. Сборник статей «Газовая динамика». ИЛ, М., 1950.
2. Овсянников Л. В. Уравнения околосвукового движения газа. Вестник ЛГУ, № 6, 1952.
3. Vincenty W., Wagoner G. Transonic flow past a wedge profile with detached Bow. Wave. NASA, Rep. 1095, 1952.
4. Коул Д. Сопротивление клиновидного профиля при больших дозвуковых скоростях Сб. перев. «Механика». ИЛ, вып. 4, 1952.
5. Spreiter I. On the application of transonic similarity Rules to Wings of finite span. NASA, Rep. 1153, 1953.
6. Липман и Брисон. Обтекание клиновидного профиля потоком газа с околосвуковой скоростью. Сб. перев. «Механика». ИЛ, вып. 3, 1951.
7. Франкль Ф. И. О струйном обтекании острого клина плоско-параллельным потоком газа и потоком воды в открытом русле при докритических скоростях. Труды физ.-мат. факультета Киргизского университета, вып. 2, 1953.